

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 185 a 186, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 185

Dokažte, že

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}}$$

je přirozené číslo.

Stanislav Trávníček

Řešení. Označme

$$u = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}} \quad \text{a} \quad x = u + v.$$

Potom $u^3 + v^3 = 4$ a

$$uv = \sqrt[3]{\left(2 + \frac{10}{\sqrt{27}}\right) \left(2 - \frac{10}{\sqrt{27}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Odtud $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 4 + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x = 4 + 2x$. Číslo x je tedy reálným kořenem rovnice $x^3 - 2x - 4 = 0$. Ale $x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$, přitom rovnice $x^2 + 2x + 2 = 0$ nemá reálné kořeny, jak snadno ověříme například pomocí jejího diskriminantu. Proto rovnice $x^3 - 2x - 4 = 0$ má jediný reálný kořen 2, a tedy $x = 2$, což je přirozené číslo, jak jsme měli dokázat.

Jiné řešení (podle *Jozefa Mészároše* a *Vladimíra Pavla*). Snadno vidíme, že

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 2 + \frac{10}{\sqrt{27}} \quad \text{a} \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 2 - \frac{10}{\sqrt{27}}.$$

Odtud dostaneme

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2,$$

což je přirozené číslo.

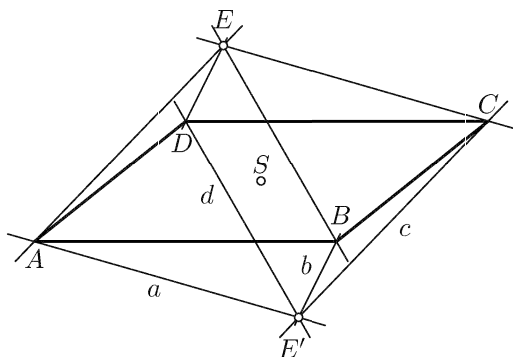
Správná řešení zaslali *Zdeněk Bufka* z České Lípy, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Úloha 186

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod E , který neleží na jeho hranici. V bodech A, B, C, D jsou v daném pořadí sestrojeny rovnoběžky a, b, c, d s přímkami EC, ED, EA a EB . Dokažte, že přímky a, b, c, d procházejí jedním bodem.

Pavel Leischner

Řešení. Označme E' obraz bodu E v souměrnosti podle středu S rovnoběžníku $ABCD$. Přímka $E'A$ je obrazem přímky EC v této středové souměrnosti, je s ní rovnoběžná, proto $a = E'A$. Podobně ukážeme, že $b = E'B$, $c = E'C$ a $d = E'D$. Přímky a, b, c, d tedy procházejí bodem E' , jak jsme měli dokázat.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Pavel Calábek