

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 183 a 184, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 183

V ostroúhlém trojúhelníku ABC s neshodnými vnitřními úhly o velikostech α , β při vrcholech A a B označme P patu výšky z vrcholu C a R patu výšky z vrcholu A . Dále označme Q ($Q \neq P$) bod přímky AB , pro který platí $|AP| \cdot |BQ| = |AQ| \cdot |BP|$. Dokažte, že kružnice sestrojená nad průměrem PQ prochází bodem R , právě když $\alpha = 45^\circ$.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Body P a R leží podle Thaletovy věty na kružnici s průměrem AC , čtyřúhelník $APRC$ je tedy tětíkový, tudíž $|\sphericalangle PRB| = \alpha$ (obr. 1).

Ze zadání plyne

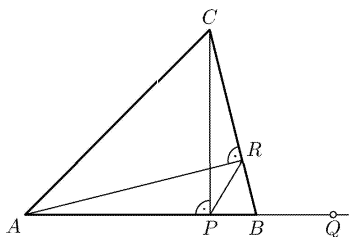
$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AQ|}{|BQ|}.$$

Jestliže kružnice sestrojená nad průměrem PQ prochází bodem R , potom bod Q je bodem polopřímky PB , tedy $|AQ| > |BQ|$. Odtud $|AP| > |BP|$, a proto $\alpha < \beta$. Naopak, jestliže $\beta < \alpha = 45^\circ$, potom je trojúhelník tupohlý. Stačí tedy uvažovat případ $\alpha < \beta$.

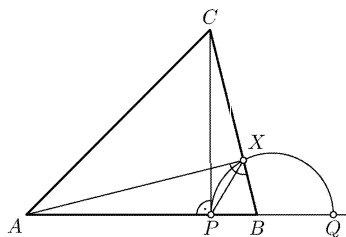
Kružnice sestrojená nad průměrem PQ je proto Apolloniiovou kružnicí vzhledem k bodům P a Q . Pro její průsečík X se stranou BC pak platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AX|}{|BX|}.$$

To znamená, že bod P dělí úsečku AB v poměru $|AX|:|BX|$. Podle věty o ose vnitřního úhlu je uvedené tvrzení ekvivalentní s tvrzením, že XP je osou úhlu AXB . Úhly AXP a PXB mají tudíž stejnou velikost (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Pokud $X = R$, je trojúhelník AXB pravoúhlý, a tedy $\alpha = |\sphericalangle PRB| = |\sphericalangle PXB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AXB| = 45^\circ$. Naopak, je-li $\alpha = 45^\circ$, platí $|\sphericalangle PRB| = 45^\circ$. Bod P pak leží na ose úhlu ARB , přičemž platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AR|}{|BR|}.$$

To ale znamená, že bod R leží na Apolloniově kružnici nad průměrem PQ . Tím je důkaz ukončen.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, *Parléřova*, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Nádražní*, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jana Novotná* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Polcer* z G v Brně, *Křenová*, *Martin Raszyk* z G v Karviné a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Úloha 184

Nechť p je prvočíslo a $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $P(n)$ není dělitelné p pro žádné celé číslo n . Ukažte, že existuje polynom $Q(x)$ s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $P(n)Q(n) - 1$ je dělitelné číslem p pro každé celé číslo n .

Ján Mazák

Řešení. Ukážeme, že polynom $Q(x) = P^{p-2}(x)$ má požadované vlastnosti. Jelikož $P(x)$ má celočíselné koeficienty, potom $Q(x)$ má celočíselné koeficienty. Dále pro žádné celé číslo n není číslo $P(n)$ dělitelné p , proto podle malé Fermatovy věty prvočíslo p dělí číslo $P^{p-1}(n) - 1 = P(n)Q(n) - 1$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Řešitelé, kteří poslali neúplné řešení, dokazovali, že za podmínek úlohy číslo p dělí (pro všechna celá čísla n) číslo $P(n) - P(0)$, případně ekvivalentní tvrzení. To však neplatí. Stačí uvážit $p = 3$ a $P(x) = x^2 + 1$.

Správná řešení zaslali: *David Bainer*, *Dominik Tělužil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplicích, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Michal Kopf* z SG v Opavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, Nádražní, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Lenka Stará* z G v Č. Budějovicích, Jírovcova, *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Pavel Calábek