

Zajímavé matematické úlohy

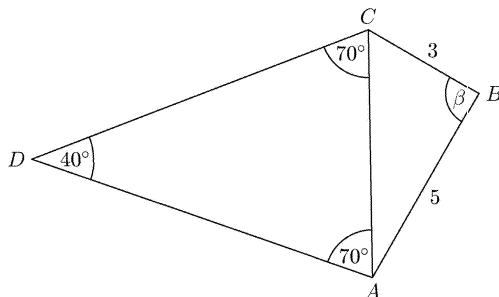
Uvádíme řešení úloh 181 a 182, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 181

Uvažujme trojúhelník ABC , v němž $|AB| = 5$ a $|BC| = 3$. Nechť ACD je rovnoramenný trojúhelník ACD vně připsaný straně AC trojúhelníku ABC , jehož velikost vnitřního úhlu proti základně AC je 40° . Určete velikost vnitřního úhlu β při vrcholu B v trojúhelníku ABC , pro niž má úsečka BD maximální délku.

Jozef Mészáros (Jelka)

Řešení.



Velikost vnitřních úhlů při základně AC trojúhelníku ACD je 70° . Podle sinové věty platí $|CD| = |DA| = |AC| \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}$. Užitím Ptolemaiovy nerovnosti ve čtyřúhelníku $ABCD$ dále máme $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$, přitom rovnost nastane, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětiový. V našem případě tedy je

$$|AC| \cdot |BD| \leq 5 \cdot |AC| \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} + 3 \cdot |AC| \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ},$$

proto

$$|BD| \leq 8 \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

Rovnost zde nastane, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový, tj. když velikost úhlu β je 140° .

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *David Bainer*, *Jana Novotná*, *Dominik Těluřil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplicích, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, Parlérova, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* a *Michal Nožička* oba z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jan Klusáček* z G v Třebíči, *Michal Kopf* z SG v Opavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, Nádražní, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Pavel Polcer* z G v Brně, Křenová, *Lenka Stará* z G v Č. Budějovicích, Jírovcova, *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Úloha 182

V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(z + x) = z^2 x^2 + 1,$$

$$y(x + y) = x^2 y^2 + 1,$$

$$z(y + z) = y^2 z^2 + 1.$$

Jaroslav Švrček

Řešení.

Pokud by jedna z neznámých byla rovna 0, potom jsme ve sporu s některou rovnicí soustavy. Tedy čísla x, y, z jsou kladná. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí $z^2 x^2 + 1 \geq 2zx$. Rovnost nastává, právě když $zx = 1$. Z první rovnice pak máme

$$x(z + x) = z^2 x^2 + 1 \geq 2zx,$$

odkud využitím podmínky $x > 0$ dostaneme $x \geq z$. Podobně ze druhé rovnice plyne $y \geq x$ a ze třetí $z \geq y$. Odtud vidíme, že $x = y = z$ a že ve všech užitých AG nerovnostech nastane rovnost. Z rovností $1 = zx = xy = yz$ již plyne $x = y = z = 1$.

Závěr. Jediným řešením dané soustavy je trojice $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *David Bainer*, *Dominik Těluřil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplicích, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, Parlérova, *Eva*

Gocníková z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* a *Michal Nožička* oba z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jan Klusáček* z G v Třebíči, *Michal Kopf* z SG v Opavě, *Jakub Krásenský* z G v Jihlavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, Nádražní, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Lenka Stará* z G v Č. Budějovicích, Jírovцова, *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplné řešení zaslali: *Jana Novotná* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Polcer* z G v Brně, Křenová.

Pavel Calábek

(Dokončení ze s. 284)

L. Pika v Plzni. Bronzové získali Ondřej Bartoš z Gymnázia ve Žďáru nad Sázavou a Hynek Kasl z Gymnázia v Plzni, Mikulášské nám. Mezinárodní chemická olympiáda, v pořadí již 43., se konala v Turecku (v Ankaře) za účasti 273 soutěžících ze 70 zemí. Čtyři čeští reprezentanti přivezli 2 zlaté a po jedné stříbrné a bronzové medaili. Zlaté získali Ondřej Hák z Gymnázia a SOŠ v Hořicích v Podkrkonoší a František Petrouš z Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovцова ul., stříbrnou Petr Louša z Gymnázia v Havlíčkově Brodě a bronzovou medaili Aneta Pospíšilová z Gymnázia v Mikulově. Mezinárodní biologická olympiáda, v pořadí 22., se konala v Číně na Tchaj-wanu (v Tchaj-pej) za účasti 228 soutěžících z 58 zemí. Naši čtyři reprezentanti přivezli 4 medaile, všechny bronzové. Byli to Karel Kodejš z Gymnázia v Jablonci nad Nisou, Kateřina Medková z Biskupského gymnázia v Hradci Králové, Lenka Čurnová a Václav Nuc, oba z Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovцова ul. Mezinárodní matematická olympiáda, v pořadí již 52., se konala v Nizozemsku (v Amsterdamu) za rekordní účasti 564 soutěžících ze 101 zemí. Šest českých reprezentantů dovezlo 1 stříbrnou a 3 bronzové medaile. Stříbro získal Anh

Dung Le, student vietnamské národnosti z Gymnázia v Tachově a bronzové medaile přivezli Michael Bílý z Gymnázia v Klatovech, Štěpán Šimsa z Gymnázia v Litoměřicích a Tomáš Zeman z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Mezinárodní olympiáda v informatice, v pořadí 23., se konala rovněž v Thajsku (v městě Pattaya) za účasti 302 soutěžících z 81 zemí. Čtyři čeští reprezentanti dovezli tři stříbrné medaile. Jsou to Filip Hlásek z Gymnázia v Plzni, Mikulášské nám., Hynek Jemelík z Gymnázia v Brně, tř. Kpt. Jaroše a Jakub Zíka z Gymnázia v Praze 6, Nad Alejí. Mimořádné ceny za výrazné úspěchy na 5. Mezinárodní astronomické a astrofyzikální olympiádě, konané v Polsku (ve Varšavě) za účasti 134 soutěžících z 26 států, získali Stanislav Fořt za zlatou medaili a absolutní vítězství a Jakub Vošmera za stříbrnou medaili, oba stříbrní i na MFO v Thajsku.

Na Sychrově se 4. prosince 2011 sešel a byl oceněn výkvět současných nejlepších českých studentů přírodních věd. Potěšitelné je, že z 22 udělených nadačních cen je 14 (64 %) za obor matematika, fyzika a informatiky, tedy v oborech, na něž je zaměřen tento časopis.

Bohumil Vybíral
Univerzita Hradec Králové