

Zajímavé matematické úlohy

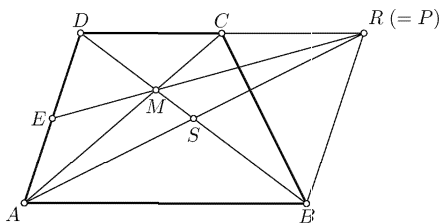
Uvádíme řešení úloh 179 a 180, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 179

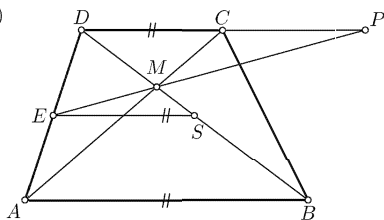
Nechť pro základny AB a CD lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB| = 2|CD|$. Označme M průsečík jeho úhlopříček AC a BD , E střed strany AD a P průsečík přímek EM a CD . Dokažte, že platí $|CP| = |CD|$.

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení. Doplňme nejprve lichoběžník $ABCD$ na rovnoběžník $ABRD$ a označme S průsečík jeho úhlopříček (obr. 1). Z vlastností rovnoběžníku plyne $|DR| = |AB|$, tedy podle zadání $|CR| = |CD|$. Bod S je středem úhlopříček BD a AR .



Obr. 1



Obr. 2

Odtud vidíme, že úsečky SD a AC jsou těžnicemi trojúhelníku ADR a M je jeho těžiště. Třetí těžnice tohoto trojúhelníku leží tudíž na přímce EM , která protíná přímku CD v jediném bodě R . Proto bod P je totožný s bodem R . Z rovnosti $|CR| = |CD|$ tak plyne $|CP| = |CD|$.

Jiné řešení. (podle Lenky Staré)

Nechť S je střed úhlopříčky BD (obr. 2). Úhly ABM a MDC jsou střídavé, tudíž shodné. Úhly AMB a CMD jsou vrcholové, tedy shodné. Podle předpokladů platí $|AB| = 2|CD|$, tedy trojúhelníky ABM a CMD jsou podobné s poměrem podobnosti $2 : 1$, proto $|BM| = 2|DM|$. Odtud

a z rovnosti $|DS| = |SB|$ dále plyne $2|MS| = |DM|$. Jelikož ES je střední příčka trojúhelníku ABD , platí $|ES| = \frac{1}{2}|AB| = |CD|$. (Je rovnoběžná se stranou AB a tedy i se stranou CD .) Podobnými úvahami ukážeme, že trojúhelníky EMS a PMD jsou podobné s poměrem podobnosti $1 : 2$. Odtud již plyne $|PD| = 2|SE| = 2|CD|$, což je ekvivalentní s tvrzením $|CP| = |CD|$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *David Binar*, *Jana Novotná*, *Dominik Tělužil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplících, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Eva Gocníková* z GJS v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* a *Michal Nožička* oba z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jan Klusáček* z G v Třebíči, *Jakub Krásenský* z G v Jihlavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Pavel Polcer* z G v Brně, Křenová, *Lenka Stará* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplné řešení zaslal *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci.

Úloha 180

Najděte nejmenší přirozené číslo k s vlastností: Z každých k (ne nutně různých) přirozených čísel z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$ lze vždy vybrat několik čísel, jejichž součin dává při dělení číslem 67 zbytek 1.

Pavel Calábek

Řešení. Nejprve ukážeme, že $k > 65$. K tomu nám stačí zjistit, že nejmenší přirozená mocnina čísla 2, která při dělení prvočíslem 67 dává zbytek 1, je 66. Potom z 65 čísel rovných dvěma nebudeme moci vybrat několik čísel, jejichž součin při dělení 65 dává zbytek 1.

Podle malé Fermatovy věty číslo 67 dělí číslo $2^{66} - 1$. Nechť n je nejmenší přirozené číslo takové, že 67 dělí $2^n - 1$. Ukážeme, že n dělí číslo 66. Pokud by to neplatilo, existovalo by celé nezáporné číslo m a přirozené číslo r z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ tak, že $66 = mn + r$. Z kongruence

$$1 \equiv 2^{66} \equiv 2^{mn+r} \equiv (2^n)^m 2^r \equiv 1^m 2^r \equiv 2^r \pmod{67}$$

plyne, že 67 dělí $2^r - 1$, což je spor s tím, že n je nejmenší přirozené číslo této vlastnosti. Množina dělitelů čísla 66 menších než 66 je množina $\{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33\}$. Čísla $2^1, 2^2, 2^3, 2^6, 2^{11}$ mají při dělení 67 po řadě zbytky 2, 4, 8, 64, 38. Z kongruencí

$$2^{22} \equiv (2^{11})^2 \equiv 38^2 \equiv 37 \pmod{67},$$

$$2^{33} \equiv (2^{11})^3 \equiv 38^3 \equiv 66 \pmod{67}$$

plyne, že ani čísla $2^{22}, 2^{33}$ nemají při dělení 67 zbytek 1. Proto $k > 65$.

Nyní ukážeme, že z každých 66 (ne nutně různých) přirozených čísel označených $a_1, a_2, \dots, a_{66}$ z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$ lze vždy vybrat několik čísel, jejichž součin dává při dělení číslem 67 zbytek 1. Označme

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 a_2, \quad s_3 = a_1 a_2 a_3, \quad \dots, \quad s_{66} = a_1 a_2 \dots a_{66}.$$

Žádné z čísel s_i není dělitelné prvočíslem 67. Pokud by některé z nich dávalo při dělení 67 zbytek 1, tvrzení platí. Jinak těchto 66 čísel má 65 možných zbytků z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$, podle Dirichletova principu tedy existují alespoň dvě čísla s_q a s_r ($1 \leq q < r \leq 66$), která dávají stejný zbytek při dělení 67. Proto 67 dělí jejich rozdíl $s_r - s_q$. Avšak

$$s_r - s_q = s_q (a_{q+1} a_{q+2} \dots a_r - 1).$$

Součin čísel $a_{q+1} a_{q+2} \dots a_r$ dává při dělení 67 zbytek 1 a dokazované tvrzení platí i v tomto případě.

Tím jsme ukázali, že nejmenší přirozené číslo k dané vlastnosti je 66.

Poznámka. Ve druhém odstavci jsme ukázali, že číslo 2 je tzv. *primitivním kořenem* modulo 67. Místo mocnin čísla 2 stačilo uvažovat mocniny libovolného primitivního kořene, jak správně uvedli někteří řešitelé, i když věty o existenci primitivního kořene nepatří do středoškolského učiva.

Správná řešení zaslali *David Hruška* z G v Plzni, *Mikulášské nám.*, *Jakub Krásenský* z G v Jihlavě, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Lenka Stará* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova* a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplné řešení zaslal *Michal Kopf* z SG v Opavě.

Pavel Calábek