

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 177 a 178, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 177

Nechť pro body D, E strany BC trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EAC| = \frac{1}{3}|\sphericalangle BAC|.$$

Dokažte nerovnost $|BD| + |EC| > \frac{2}{3}|BC|$.

Jozef Mészáros

Řešení.

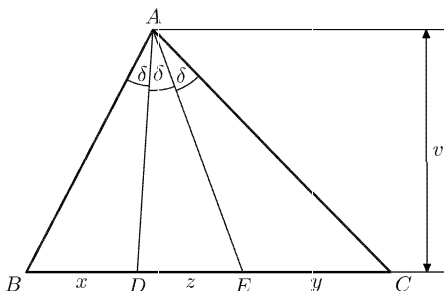
Zvolme následující označení (viz obr.): $|\sphericalangle BAC| = 3\delta$, $|BD| = x$, $|EC| = y$, $|DE| = z$ a označme v velikost výšky trojúhelníku ABC na stranu BC . Podle tohoto označení platí $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EAC| = \delta$, $|BC| = x + z + y$ a dle zadání máme dokázat nerovnost $x + y > \frac{2}{3}(x + z + y)$, která je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2}(x + y) > z. \quad (1)$$

Z konkávnosti funkce sinus na intervalu $(0; \pi)$ plyne pro δ ($0^\circ < \delta < 60^\circ$) nerovnost $3 \sin \delta > \sin 3\delta$, odtud

$$\frac{\sin \delta}{\sin 3\delta} > \frac{1}{3}. \quad (2)$$

(Tato nerovnost je také důsledkem vzorce $\sin 3\delta = 3 \sin \delta - 4 \sin^3 \delta < 3 \sin \delta$.)



Ze známého vzorce pro obsah trojúhelníku plyne

$$P_{ABD} \cdot P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \delta \cdot \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AC| \cdot \sin \delta = \\ = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin 3\delta \cdot \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \delta \cdot \frac{\sin \delta}{\sin 3\delta} = P_{ABC} \cdot P_{ADE} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin 3\delta},$$

kde P_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ . Užitím nerovnosti (2) obdržíme odhad

$$P_{ABD} \cdot P_{AEC} > \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot P_{ADE}$$

Podle jiného vzorce pro obsah trojúhelníku dále platí

$$\frac{1}{2}xv \cdot \frac{1}{2}yv = P_{ABD} \cdot P_{AEC} > \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot P_{ADE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x+z+y)v \cdot \frac{1}{2}zv.$$

Tento vztah upravíme a dostaneme

$$xy > \frac{1}{3}(x+z+y)z.$$

Důkaz nerovnosti (1) povedeme sporem. Předpokládejme, že existuje trojúhelník ABC , ve kterém platí $\frac{1}{2}(x+y) \leq z$. Potom užitím předcházející nerovnosti máme

$$xy > \frac{1}{3}(x+z+y)z \geq \frac{1}{3} \left[x + \frac{1}{2}(x+y) + y \right] \cdot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Tato nerovnost je ale ekvivalentní s nerovností $0 > (x-y)^2$, což je spor. Proto platí

$$\frac{1}{2}(x+y) > z,$$

což jsme chtěli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 178

Dokažte, že číslo $5^n + 7^n + 13^n$ je složené pro každé přirozené číslo n .

Martin Panák

Řešení.

Vypočteme několik prvních hodnot součtu $s_n = 5^n + 7^n + 13^n$:

n	1	2	3	4	5	6
s_n	25	243	2 665	31 587	391 225	4 960 083

Pomocí této tabulky můžeme vyslovit hypotézu, že $5 \mid s_n$ pro n liché a $3 \mid s_n$ pro n sudé. Tuto hypotézu nyní dokážeme.

Předpokládejme, že číslo n je sudé, tedy existuje přirozené číslo k tak, že platí $n = 2k$. Potom

$$s_{2k} = 25^k + 49^k + 169^k = (3 \cdot 8 + 1)^k + (3 \cdot 16 + 1)^k + (3 \cdot 56 + 1)^k.$$

Číslo s_{2k} má při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $1 + 1 + 1 = 3$, které je třemi dělitelné. Tím jsme naši hypotézu dokázali pro sudá čísla n .

Předpokládejme, že číslo n je liché, tedy existuje celé nezáporné číslo k tak, že platí $n = 2k + 1$. Potom

$$s_{2k+1} = 5 \cdot 25^k + 7 \cdot 49^k + 13 \cdot 169^k = 5 \cdot 25^k + 7 \cdot (5 \cdot 10 - 1)^k + 13 \cdot (5 \cdot 34 - 1)^k.$$

Číslo s_{2k+1} má tedy při dělení pěti stejný zbytek jako číslo $0 + 7 \cdot (-1)^k + 13 \cdot (-1)^k = -20$, které má při dělení pěti zbytek 0. Tím jsme naši hypotézu dokázali pro lichá čísla n .

Dále pro přirozená čísla n zřejmě platí $s_n \geq 5 + 7 + 13 = 20$. Z dokázané hypotézy plyne, že $5 \mid s_n$ pro n liché a $3 \mid s_n$ pro n sudé, tedy čísla s_n musí být nutně složená, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *György Oláh* z Komárna, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné a *Martin Raszyk* z G v Karviné,

Pavel Calábek