

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 175 a 176, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 175

Dokažte, že číslo $2011^2 - 2010$ je dělitelem čísla $2011^{2010} - 1$.

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení. Označme $x = 2011$. Máme dokázat, že $x^2 - x + 1$ dělí číslo $x^{2010} - 1$. Jelikož $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, stačí dokázat, že $x^3 + 1$ dělí číslo $x^{2010} - 1$. Ze vztahu

$$\begin{aligned} x^{2010} - 1 &= x^3 \left((x^3)^{669} + 1 \right) - (x^3 + 1) = \\ &= x^3 (x^3 + 1) \left((x^3)^{668} - (x^3)^{667} + (x^3)^{666} - \dots + 1 \right) - (x^3 + 1) \end{aligned}$$

vidíme, že $x^3 + 1$ dělí menšence i menšitele, proto dělí i jejich rozdíl. Tím je úloha dokázána.

Poznámka. Řešitelé našli několik dalších rozkladů výrazu $x^{2010} - 1$. *Karol Gajdoš* a *Jiří Steckbauer* použili rozkladu

$$x^{2010} - 1 = (x^3 + 1) \left((x^3)^{334} - (x^3)^{333} + \dots + 1 \right) (x^{1005} + 1),$$

zatímco *Anton Hnáth* a *Jozef Mészáros* pracovali s rozkladem

$$x^{2010} - 1 = (x^3 + 1) (x^3 - 1) \left((x^6)^{334} - (x^6)^{333} + \dots + 1 \right).$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 176

Kružnice k a l se protínají ve dvou různých bodech A a B . Tečna ke kružnici k v bodě A protíná kružnici l v bodě D a tečna ke kružnici l

v bodě A protíná kružnici k v bodě C ($C \neq A \neq D$). Tečna ke kružnici l v bodě D a polopřímka AB se protínají v bodě E . Nechť F je průsečík přímky AC s kružnicí opsanou trojúhelníku BCE . Dokažte, že body A , D , E , F leží na téže kružnici.

Ján Mazák (Košice)

Řešení. Pokud bod F neleží na oblouku CBE kružnice opsané trojúhelníku BCE (obr. 1), je $FCBE$ tětiový čtyřúhelník. Součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů tětiového čtyřúhelníku je 180° , proto $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BCA|$. Podle tvrzení o shodnosti obvodového a úsekového úhlu platí $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDE|$. Tedy

$$|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BDE|.$$

Podle tvrzení o shodnosti obvodového a úsekového úhlu dále platí

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ADB|.$$

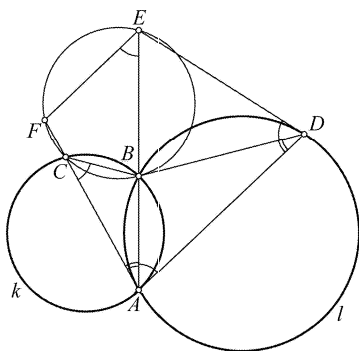
Bod F leží v polorovině opačné k polorovině AED a platí

$$|\sphericalangle AFE| + |\sphericalangle ADE| =$$

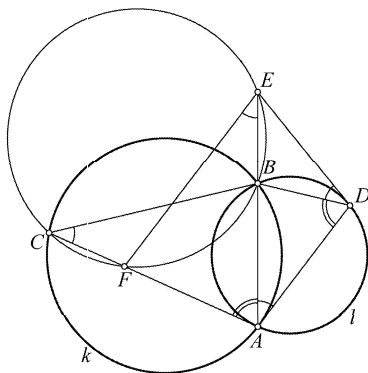
$$= (180^\circ - |\sphericalangle AEF| - |\sphericalangle EAF|) + (|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDE|) =$$

$$= (180^\circ - |\sphericalangle BEF| - |\sphericalangle BAC|) + (|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BEF|) = 180^\circ,$$

což stačí k tomu, aby čtyřúhelník $ADEF$ byl tětiový.



Obr. 1



Obr. 2

Pokud bod F leží na oblouku CBE kružnice opsané trojúhelníku BCE , vede se důkaz obdobně (obr. 2). Rovnost $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BCA|$ zde plyne z vlastností obvodových úhlů.

Poznámka. Z důkazu plyne, že velikost vnitřních úhlů u vrcholů A a D tětíivového čtyřúhelníku $ADEF$ je stejná, proto tento čtyřúhelník je buď rovnoramenný lichoběžník, nebo pravoúhelník.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Pavel Calábek

(Dokončení ze str. 637)

z bismutu s podobně tvarovaným drátem z mědi a vytvořil smyčku. Náhodně zjistil, že když podrží jeden ze spojů bismut-měď v teplé ruce, magnetka umístěná uvnitř smyčky se pohne. Pokus stále opakoval citlivým zahříváním v místě spojů různých vodičů – vznikalo zde konstantní napětí a začal proudit „termický“ proud – tepelná energie se přímo mění v elektrickou. Protože se zprvu mylně domníval, že jde o efekt způsobený magnetickým polarizováním dvou kovů teplotním spádem, nazval jej „termomagnetismus“.

Po mnohonásobném opakování pokusů s rozdílnými páry kovů uspořádal podle velikosti účinků na magnetku celkem 28 materiálů do termoelektrické řady, začínající bismutem jako extrémně negativním kovem, a končící tellurem jako kovem extrémně pozitivním. Svoje termomagnetické studie uveřejnil v roce 1823 pod názvem „Magnetická polarizace kovů a rud rozdílem teplot“.

Použití termočlánku je dvojí: jednak jej lze použít k měření teploty, jednak jako

zdroj stálého elektrického proudu (elektromotorické napětí tohoto zdroje i jeho vnitřní odpor jsou velmi stálé). Jak to již u mnohých vědeckých objevů bývá, také termoelektrický jev je poznamenán problémy s prioritou. Za nezávislého objevitele termoelektriny bývá rovněž pokládán Angličan *James Cumming* (1777–1861), který první popis svého objevu uvedl v časopise *Annales of Philosophy* v roce 1823. Stručná zpráva o Seebeckově byla sice uveřejněna v též časopise roku 1822, ale jeho podrobný popis nebyl zveřejněn dříve než v roce 1825. Přestože je velmi pravděpodobné, že Cumming učinil svůj objev nezávisle, tím se Seebeckova priorita asi nezpochybňuje.

Za svého pobytu v Beyreuthu se Seebeck v roce 1795 oženil s *Julianou Amálií Ulrikeovou*, dcerou Královského pruského dvorního rady. Životopisné prameny udávají z rodiny přinejmenším jednoho syna, Louis Fredericka. Thomas Johann Seebeck zemřel ve věku 61 let 10. prosince 1831 v Berlíně.

Bohumil Tesařík