

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 173 a 174, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle aktuálního ročníku časopisu MFI.

Úloha 173

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x} + 2} &= y - 2, \\ \sqrt{\sqrt{y} + 2} &= x - 2.\end{aligned}$$

Radek Horenský

Řešení. Ze zadání úlohy plyne, že obě neznámé x, y jsou nezáporné. Po snadné úpravě první rovnice dané soustavy pak obdržíme

$$y = 2 + \sqrt{\sqrt{x} + 2} \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Analogicky $x \geq 2 + \sqrt{2}$. Pokud $x > y$, je

$$y - 2 = \sqrt{\sqrt{x} + 2} > \sqrt{\sqrt{y} + 2} = x - 2 \quad \text{tj.} \quad y > x,$$

což je ve sporu s předpokladem $x > y$. Podobně lze ukázat, že neplatí ani $y > x$. Nutně tedy $x = y$.

Nyní již stačí vyřešit rovnici

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} = x - 2.$$

Jejím umocněním dostáváme $\sqrt{x} + 2 = x^2 - 4x + 4$. Tuto rovnici vyřešíme užitím substituce $x = t^2$. Vzhledem k podmínce $x \geq 2 + \sqrt{2}$ stačí najít řešení pro $t \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}} > 1$. Po úpravě pak dostaneme algebraickou rovnici čtvrtého stupně

$$t^4 - 4t^2 - t + 2 = 0. \tag{1}$$

Postupnými úpravami levé strany rovnice (1) máme

$$\begin{aligned} t^4 - 4t^2 - t + 2 &= t^2(t^2 - 4) - (t - 2) = t^2(t + 2)(t - 2) - (t - 2) = \\ &= (t - 2)(t^3 + 2t^2 - 1). \end{aligned}$$

Funkce $t^3 + 2t^2 - 1$ je však rostoucí na množině kladných reálných čísel. Pro všechna $t > 1$ tudíž platí

$$t^3 + 2t^2 - 1 > 1 + 2 - 1 = 2 > 0.$$

Proto má rovnice (1) jediný reálný kořen větší nebo roven $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, a to $t = 2$.

Závěr. Daná soustava má v oboru reálných čísel právě jedno řešení $(x, y) = (4; 4)$. Zkouškou se přesvědčíme o správnosti nalezeného řešení.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, *Jiří Biolek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *Josef Hazi* z G v Chebu, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Kateřina Medková* z BGGB v Hradci Králové, *Jakub Solovský*, z GMK v Bílovci, *Pavel Ševeček* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Štěpán Šimsa* z GJJ v Lito-měřicích, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou a *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická.

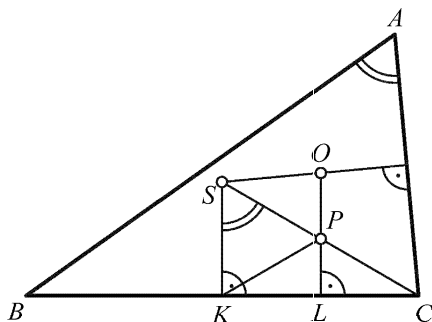
Neúplná řešení zaslali *Barbora Mólová* z GMK v Bílovci a *Hynek Jemelík* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Úloha 174

Uvažujme trojúhelník ABC v němž K značí střed strany BC . Dále nechť S a O jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a AKC . Průsečík kolmice z bodu O k přímce BC s přímkou CS označme P . Dokažte větu: Má-li úhel BAC velikost 60° , potom $|SK| = |CP|$. Platí i věta obrácená?

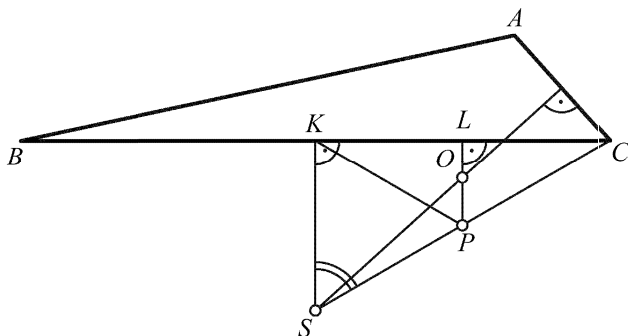
Jaroslav Švrček

Řešení. Předpokládejme, že velikost úhlu BAC je 60° (obr. 1), tedy bod S leží v polorovině BCA . Body O a S jako středy kružnic opsaných leží na ose strany AC . Označme L střed úsečky KC . Přímký SK a OL jsou jako osy stran BC a KC rovnoběžné. Odtud plyne, že LP je střední příčka trojúhelníku KCS , tedy bod P je středem přepony CS pravoúhlého trojúhelníku KCS , je proto středem kružnice jemu opsané a platí $|CP| = |KP| = |SP|$.



Obr. 1

Protože velikost obvodového úhlu BAC na kružnici opsané trojúhelníku ABC je 60° , je velikost jemu odpovídajícího středového úhlu BSC rovna 120° , tedy velikost úhlu KSC je 60° . V trojúhelníku KSP platí $|KP| = |SP|$ a velikost jednoho vnitřního úhlu je rovna 60° , tento trojúhelník je tedy rovnostranný a platí $|KP| = |SK|$. Z rovnosti $|KP| = |CP|$ dále plyne $|SK| = |CP|$, což jsme měli dokázat.



Obr. 2

Obrácená věta neplatí. Pokud velikost úhlu BAC je 120° (obr. 2), leží bod S v polorovině opačné k polorovině BCA a velikost úhlu CSK je 60° . Stejně jako v předchozím případě ale můžeme ukázat, že trojúhelník KSP je rovnostranný, odkud plyne $|CP| = |PK| = |KS|$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, Komenského, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, tř. Jiřího z Poděbrad, *Josef Hazi* z G v Chebu, Nerudova, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Barbora Mílová* z GMK v Bílovci, *Pavel Ševeček* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích a *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou.

Neúplná řešení zaslali *Jiří Biolek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Miroslav Koblížek* a *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Kateřina Medková* z BGGB v Hradci Králové, Orlické nábřeží, *Jakub Solovský*, z GMK v Bílovci, *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická.

Pavel Calábek

Nakladatelství MATH Publishing nabízí zájemcům o matematiku následující publikace:

Cesta k integrálu – historie určitého integrálu od Archimeda k Riemannovi.

Historie analýzy – historie matematické analýzy od antiky do zformování funkcionální analýzy, 14 kapitol, 13 předních světových historiků matematiky, historie jednotlivých odvětví matematické analýzy.

Eukleides: Základy – teprve historicky 2. české vydání, k dispozici je 1., 2., 3. část, s komentářem prof. Vopěnky.

Al Chvarizmi: Aritmetický a algebraický traktát – poprvé česky, opět komentář prof. Vopěnky.

Kontaktní adresa: RNDr. Karel Vašíček, Družstevní 117, 530 09 Pardubice,
tel: 466401520, 605848934, mail: dr.vasicek@atlas.cz

V nabídce jsou i další publikace. Podrobněji na <http://www.mathpublishing.eu>
