

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 171 a 172, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 171

Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla vyhovující podmínkám $abcd = 1$
a

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} < a + b + c + d.$$

- a) Ukažte, že taková čísla a, b, c, d existují.
b) Dokažte, že pro ně platí nerovnost

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} > a + b + c + d.$$

Pavel Novotný (Žilina)

Řešení:

- a) Například pro $a = 10^3$, $b = 10$, $c = 10^{-1}$, $d = 10^{-3}$ platí $abcd = 1$
a přitom

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 300,000\,001 \quad a + b + c + d = 1010,101.$$

- b) Nejprve ukážeme, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c, d se součinem jedna platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \geq 2(a + b + c + d). \quad (1)$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{d} + \frac{a}{d} + \frac{d}{c} \right) \geq \sqrt[4]{\frac{a^3 d}{bcd^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = a.$$

Podobně získáme dalších sedm nerovností

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{2b}{a} + \frac{a}{d} \right) &\geq b, & \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{2a}{b} + \frac{a}{d} \right) &\geq a, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{c}{d} + \frac{2c}{b} + \frac{b}{a} \right) &\geq c, & \frac{1}{4} \left(\frac{c}{d} + \frac{2b}{c} + \frac{b}{a} \right) &\geq b, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{d}{a} + \frac{2d}{c} + \frac{c}{b} \right) &\geq d, & \frac{1}{4} \left(\frac{d}{a} + \frac{2c}{d} + \frac{c}{b} \right) &\geq c, \\ & & \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{2d}{a} + \frac{d}{c} \right) &\geq d. \end{aligned}$$

Sečtením všech osmi nerovností dostaneme nerovnost (1).

Nyní ukážeme sporem, že spolu s předpokladem

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} < a + b + c + d$$

nemůže současně platit

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \leq a + b + c + d,$$

protože sečtením obou těchto nerovností bychom dostali nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} < 2(a + b + c + d),$$

která je ve sporu s dokázanou nerovností (1). Proto platí nerovnost b).

Redakce neobdržela do uzávěrky tohoto čísla žádné úplné řešení této úlohy.

Neúplné řešení zaslal *Jiří Steckbauer* z Květné.

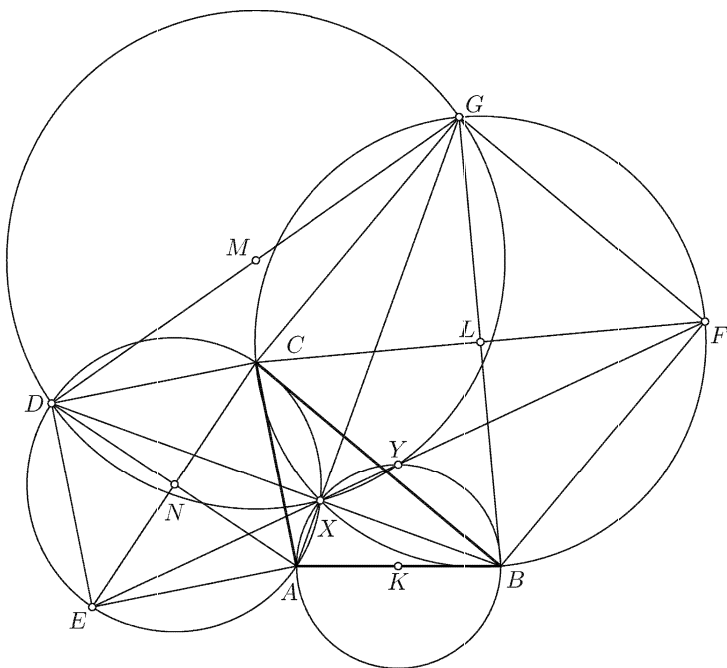
Úloha 172

Je dán trojúhelník ABC , v němž $|AC| \neq |BC|$, a čtverce $ACDE$, $BCGF$ vně sestrojené nad jeho stranami. Dokažte, že kružnice s průměry DG a AB se protínají na přímce EF .

Pavel Leischner

Řešení:

Označme K , M po řadě středy úseček AB , DG , dále L , N po řadě středy čtverců $BCGF$, $ACDE$ a X průsečík přímek AG a BD .



Trojúhelník ACG je obrazem trojúhelníku DCB v otočení kolem bodu C o úhel 90° , proto jsou přímky AG a BD (jako strany těchto trojúhelníků) vzájemně kolmé a platí $|AG| = |BD|$. Tedy podle Thaletovy věty leží jejich průsečík X na kružnicích sestavených nad průměry AB , BG , GD a DA . Tím jsme mimo jiné dokázali, že se kružnice s průměry DG a AB protínají.

Podle věty o obvodovém úhlu na kružnici opsané čtverci $ACDE$ má úhel AXE stejnou velikost jako úhel ACE , tedy 45° . Podobně velikost úhlu BXF je 45° . Velikost úhlu EXF je rovna součtu velikostí úhlů EXA , AXB a BXF , tedy tento úhel je přímý, proto bod X leží na přímce EF .

Úsečky MN a LK jsou středními příčkami trojúhelníků ADG a ABG , proto jsou rovnoběžné s přímkou AG a mají délku rovnou polovině délky úsečky AG . Podobně jsou úsečky KN a LM rovnoběžné s úsečkou BD a mají délku rovnou polovině délky úsečky BD . Ale úsečky AG a BD

jsou vzájemně kolmé a mají stejnou délku, proto je čtyřúhelník $KLMN$ čtverec. (Je to tzv. *Varignonův rovnoběžník* ve čtyřúhelníku $ABGD$.) Jeho úhlopříčky KM a LN jsou vzájemně kolmé. Úsečka LN je střední příčkou trojúhelníku EFC , je proto rovnoběžná s jeho stranou EF . Odtud již plyne, že přímky EF a KM jsou vzájemně kolmé.

Přímka KM prochází středy kružnic sestrojených nad průměry AB a DG , přímka EF prochází jedním jejich průsečíkem (X) a je k ní kolmá, proto prochází i (případným) druhým průsečíkem Y těchto kružnic.

Tím jsme dokázali tvrzení úlohy, tedy že průsečíky kružnic sestrojených nad průměry AB a DG se protínají na přímce EF .

Poznámka. Řešitelé této úlohy, kteří ji řešili způsobem podobným výše uvedenému řešení dokázali, že bod X leží na přímce EF , ovšem pak zapomněli ukázat, že na této přímce leží i bod Y .

Druhá skupina řešitelů dokázala, že body E a F mají stejnou mocnost ke kružnicím sestrojeným nad průměry AB a DG , tedy EF je jejich chordála. Potom však neukázali, že se tyto kružnice protínají.

Jako cvičení čtenářům přenecháme, že kružnice sestrojené nad průměry AB a DG se dotýkají, právě když $|AC| = |BC|$, tedy pro situaci popsanou v úloze vždy existují dva jejich průsečíky X a Y .

Redakce obdržela 7 řešení, žádné však nebylo úplné z důvodů uvedených v poznámce.

Neúplné řešení zaslali: *František Jáchim* z Volyně, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, Nár. mučedníků, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Hynek Jemelík* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Koblížek* z G v Žamberku, Nádražní, *Kateřina Medková* z BGBB v Hradci Králové, Orl. nábr. a *Jakub Solovský* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek