

pohľadom do histórie citujúc významného francúzskeho matematika *P. S. Laplacea* (1749-1827): „Čítajte Eulerove diela. Euler je učiteľom nás všetkých“. *Leonard Euler* (1707–1783) je naozaj hviezdou matematického neba. Goniometriu ostrého uhla poznali starí Gréci, indická, arabská a čínska matematika. No až Euler sa „vymanil“ zo zajatia pravouhlého trojuholníka a dal goniometrii podobu akú poznáme dnes. Slávna Eulerova rovnosť ukazuje vzťah medzi goniometrickými funkciami a komplexnými číslami.

Literatúra

- [1] *Odvárko, O. a kol.*: Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia. SPN, Bratislava 1985.
- [2] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. SPN, Praha 1972.
- [3] *Vyšín, J. a kol.*: Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia. SPN, Bratislava 1976.
- [4] *Znám, Š. a kol.*: Pohľad do dejín matematiky. Alfa, Bratislava, SNTL, Praha 1986.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádime riešenie úloh 169 a 170, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 169

Najděte všechna celá čísla n , pro která je hodnota výrazu $2^n - 91$ třetí mocninou některého celého čísla.

Pavel Calábek

Rěšení:

Označme x celé číslo, pro které je $2^n - 91$ jeho třetí mocninou. Platí tedy

$$x^3 = 2^n - 91. \quad (1)$$

Nutnou podmínkou existence x je, aby číslo n bylo celé nezáporné, to předpokládáme ve zbytku řešení. Prvočíselný rozklad čísla 91 je $91 = 7 \cdot 13$. Nejprve vyšetříme zbytky při dělení číslem 7 obou stran rovnice (1).

Pro libovolné celé číslo x platí $(x+7)^3 - x^3 = 7(3x^2 + 21x + 49)$. Odtud vidíme, že zbytky třetích mocnin celých čísel při dělení sedmi se opakují s periodou sedm. Třetí mocniny celých čísel při dělení 7 mají zbytky 0 (pro čísla x dělitelná 7), 1 (pro čísla x se zbytky 1, 2 a 4 při dělení 7) a 6 (pro čísla x se zbytky 3, 5 a 6 při dělení sedmi).

Dále platí $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$, proto se zbytky čísel tvaru 2^n při dělení 7 opakují s periodou 3. Celé nezáporné mocniny čísla 2 mají při dělení 7 zbytky 1 (když n je dělitelné třemi), 2 (pro n se zbytkem 1 při dělení 3) a 4 (pro n se zbytkem 2 při dělení třemi). Tyto zbytky tak mají i čísla $2^n - 91$.

Vidět to můžeme ostatně i z následující tabulky:

x	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$x^3 \bmod 7$	...	0	1	1	6	1	6	6	0	1	1	6	1	...
n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$(2^n - 91) \bmod 7$		1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	...

Vraťme se k rovnici (1). Číslo $2^n - 91$ může mít při dělení sedmi jeden ze zbytků 1, 2, 4, a číslo x^3 může mít při dělení sedmi jeden ze zbytků 0, 1, 6. Jediný možný společný zbytek je proto 1. Odtud již plyne, že číslo n musí být dělitelné 3 a x má při dělení sedmi jeden ze zbytků 1, 2 a 4. Je tedy $n = 3m$ pro vhodné celé nezáporné číslo m .

Rovnici (1) upravíme do tvaru

$$(2^m - x)(2^{2m} + 2^m x + x^2) = 91. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že číslo m je celé nezáporné a číslo x celé, jsou oba činitele levé strany výrazu (2) celá čísla. Navíc $2^{2m} + 2^m x + x^2 = (2^m + \frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0$, proto jsou oba činitele čísla kladná. Pro úplné řešení úlohy rozebereme všechny možnosti rozkladu čísla 91 na součin dvou kladných celých čísel, tyto možnosti jsou dané následující tabulkou:

$A = 2^m - x$	1	7	13	91
$B = 2^{2m} + 2^m x + x^2$	91	13	7	1

Z rovnosti $A = 2^m - x$ plyne $2^m = A + x$, proto

$$B = 2^{2m} + 2^m x + x^2 = (A + x)^2 + (A + x)x + x^2 = 3x^2 + 3Ax + A^2,$$

neboli

$$0 = 3x^2 + 3Ax + A^2 - B.$$

Tuto rovnici budeme řešit jako kvadratickou rovnici vzhledem k neznámé x pro čtyři dané dvojice čísel A a B . Pro $(A, B) = (1, 91)$ je $x \in \{-6, 5\}$, pro $(A, B) = (7, 13)$ je $x \in \{-3, -2\}$, pro $(A, B) = (13, 7)$ a $(A, B) = (91, 1)$ tato rovnice nemá reálné kořeny. Číslo $A + x (= 2^m)$ je ovšem mocninou čísla 2 pouze pro $A = 7$ a $x = -3$. Proto $m = 2$, tedy $n = 6$.

Závěr. Hodnota výrazu $2^n - 91$ je třetí mocninou celého čísla pouze pro $n = 6$ a platí $2^6 - 91 = (-3)^3$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, Nár. mučedníků, *Jiří Bišek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, Komenského, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, tř. Jiřího z Poděbrad, *Josef Hazi* z G v Chebu, Nerudova, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Miroslav Koblížek* z G v Žamberku, Nádražní, *Barbora Mílová* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci, *Pavel Ševeček* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích, Svojsíkova, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou a *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická,

Neúplná řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Hynek Jemelík*, z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Tomáš Kubelka* z G v Žamberku, Nádražní.

Úloha 170

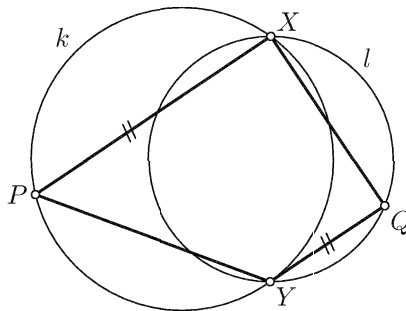
Na kružnici k jsou dány dva různé body X a Y tak, že přímka XY neprochází středem kružnice k . Úsečka XY je průměrem kružnice l . Na větším oblouku XY kružnice k leží bod P a na kružnici l bod Q tak, že čtyřúhelník $PXQY$ je konvexní a přitom $PX \parallel QY$. Dokažte, že velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení:

Přímky PX a QY jsou rovnoběžné, úhly XPY a PYQ jsou přilehlé, tedy platí $|\sphericalangle XPY| + |\sphericalangle PYQ| = 180^\circ$. Podle věty o obvodovém úhlu

velikost úhlu XPY nezávisí na poloze bodu P na delším oblouku XY kružnice k . Proto velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).



Obr. 1

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, Nár. mučedníků, *Jiří Bišek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, Komenského, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, tř. Jiřího z Poděbrad, *Josef Hazi* z G v Chebu, Nerudova, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Hynek Jemelík* a *Pavel Ševeček*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Miroslav Koblížek* a *Tomáš Kubelka*, oba z G v Žamberku, Nádražní, *Kateřina Medková* z BGBB v Hradci Králové, Orl. nábř., *Barbora Mollová* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci, *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích, Svojsíkova, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou a *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická.

Pavel Calábek