

O více než sto let později se opět diskutuje o stupni náročnosti maturitní zkoušky a o místě matematiky v ní. Státní maturita by opět měla být vysvědčením „dospělosti k návštěvě univerzitní“, řečeno slovy začátku dvacátého století. To ale podle mého názoru není možné bez matematiky. Proto si dovoluji připojit se k těm, kteří volají po zařazení matematiky jako povinného předmětu státní maturitní zkoušky i na začátku století jednadvacátého.

L i t e r a t u r a

- [1] Státní okresní archiv České Budějovice: Jirsíkovo státní gymnasium, Maturitní protokoly, inv. č. 1200, signatura II/b/IV – 42, 1894 – 1906, karton č. 60, 61.
- [2] Státní okresní archiv České Budějovice: Jirsíkovo státní gymnasium, Výkaz o zkouškách maturitních 1899, Přehled výsledků zkoušek maturitních 1900 – 1906, inv. č. 1021 – 1028, signatura I/c – 1013 – 1020, kniha č. 1021 – 1028.
- [3] *Morkes, F.*: Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí, ÚIV – CERMAT, Praha 2003.
- [4] *Řezníčková, K.*: Študáci a kantoři za starého Rakouska, české střední školy v letech 1867 – 1918, Libri, Praha 2007.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 167 a 168, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 167

V rovině jsou dány úsečky AB a CD . Najděte všechny body V této roviny, pro které mají trojúhelníky ABV a CDV stejný obsah.

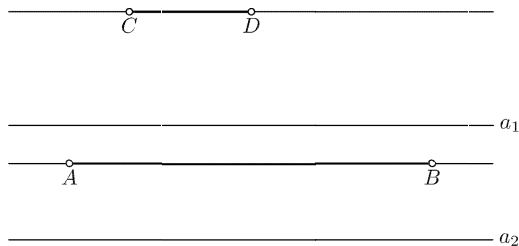
Šárka Gergelitsová

Řešení. Označme a a c délky úseček AB a CD a dále b a d po řadě vzdálenosti bodu V od přímk AB a CD . Obsah trojúhelníku ABV pak je $\frac{1}{2}ab$ a obsah trojúhelníku CDV je $\frac{1}{2}cd$.

Nejprve uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD totožné. Pokud jsou délky úseček AB a CD shodné, má požadovanou vlastnost každý bod V roviny, který neleží na přímce AB , jinak žádný bod požadované vlastnosti neexistuje.

Dále uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD rovnoběžné a předpokládejme, že úsečky AB a CD mají stejné délky, tj. $a = c$. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ABV a CDV plyne $b = d$, tedy bod V má stejnou vzdálenost od přímek AB a CD a proto leží na ose rovnoběžek AB a CD . Naopak je vidět, pro každý bod osy rovnoběžek AB a CD platí, že obsahy trojúhelníků ABV a CDV jsou shodné.

Nyní uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD rovnoběžné a mají různou délku. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ABV a CDV plyne $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} \neq 1$, tedy bod V má daný poměr vzdáleností od dvou rovnoběžek AB a CD . Množinou všech takových bodů je dvojice rovnoběžných přímek a_1 , a_2 s rovnoběžkami AB a CD . Opět vidíme, že každý bod V ležící na každé z těchto přímek má požadovanou vlastnost.

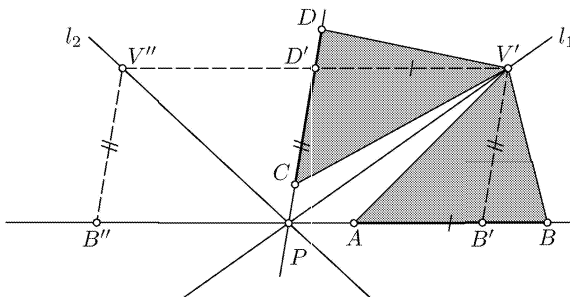


Nakonec uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD různoběžné. Označme S jejich průsečík. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ABV a CDV plyne $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$. Přímky AB a CD rozdělí rovinu na čtyři konvexní úhly s vrcholy v bodě S . Necht' bod V leží v jednom z těchto úhlů, jeho velikost označme ω . Polopřímka s počátkem ve vrcholu tohoto úhlu procházející bodem V rozdělí tento úhel na dva úhly, označme φ velikost toho, na jehož rameni leží přímka CD . Potom $b = |AV| \sin(\omega - \varphi)$, $d = |AV| \sin \varphi$ a platí

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \frac{|AV| \sin(\omega - \varphi)}{|AV| \sin \varphi} = \sin \omega \cotg \varphi - \cos \omega.$$

Protože poměr délek úseček AB a CD je konstantní, musí být konstantní i $\cotg \varphi$. Odtud již plyne, že všechny body V , pro které mají trojúhelníky ABV a CDV stejný obsah leží na dvou přímkách, které svírají

s přímkami AB a CD úhly dané velikosti (s výjimkou průsečíku těchto přímek) a procházejí jejich průsečíkem P . K sestrojení těchto přímek využijeme skutečnost, že úhlopříčka rovnoběžníku dělí tento rovnoběžník na dva trojúhelníky shodného obsahu. Sestrojíme rovnoběžník, jehož sousední strany leží na přímkách AB a CD a mají délky shodné s délkami úseček AB a CD .



Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Vladimír Pavel* z Blovic a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 168

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $\sqrt{3n-1} + \sqrt{4n-1}$ iracionální.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Nejprve ukážeme, že druhá odmocnina nezáporného celého čísla je racionální (a dokonce celá), právě když toto číslo je druhou mocninou celého čísla. Předpokládejme, že nezáporné celé číslo m není druhou mocninou celého čísla. Potom v prvočíselném rozkladu čísla m existuje prvočíslo p , které je v liché mocnině. Předpokládejme, že $\sqrt{m}$ je racionální číslo a dá se zapsat ve tvaru r/s , kde r a s jsou nesoudělná přirozená čísla. Z rovnosti $\sqrt{m} = r/s$ plyne po úpravě $s^2m = r^2$. Protože p dělí m , musí prvočíslo p dělit r^2 , tedy r . V prvočíselném rozkladu r^2 je prvočíslo p v sudé mocnině, v prvočíselném rozkladu m v liché, proto p dělí také s , což je spor s tím, že r a s jsou nesoudělná čísla.

Předpokládejme, že existuje přirozené číslo n takové, že $\sqrt{3n-1} + \sqrt{4n-1}$ je rovno (kladnému) racionálnímu číslu a . Platí $\sqrt{4n-1} =$

$= a - \sqrt{3n - 1}$. Po umocnění na druhou a úpravě dostaneme

$$\sqrt{(3n - 1)} = \frac{a^2 - n}{2a}.$$

Odtud vidíme, že číslo $\sqrt{(3n - 1)}$ je také racionální, podle tvrzení dokázaného výše tedy číslo $(3n - 1)$ je druhou mocninou celého čísla. Ovšem druhé mocniny celých čísel mají při dělení třemi zbytky 0 a 1, číslo $3n - 1$ má při dělení třemi zbytek 2, což je spor s předpokladem, že a je racionální

Poznámka. Řešitelé, kteří nepodali úplné řešení, si většinou neuvědomili, že součet dvou iracionálních čísel může být racionální. Např. čísla $\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$ jsou iracionální, jejich součet je ale číslo přirozené, tedy racionální.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Jakub Solovský* z GMK v Bílovci,

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *František Jáchim* z Volyně a *Josef Malík* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek

(Dokončení ze str. 128)

Na obdobném principu funguje například také hromadné zobrazování prezentací ve všech běžně podporovaných formátech (PPT, PPTX, ODP, JPG, PDF, PNG, GIF). Fakt, že studenti budou prezentaci věnovat pozornost, pak „zajišťuje“ současné uzamknutí jejich klávesnic i myši. Učitel může také stejným způsobem pustit videokázku či předem připravenou instruktáž či hromadně spustit libovolný program nebo konkrétní webovou stránku.

Další funkci, kterou pedagogové v učebnách vybavených PC Controlem hojně využívají, je možnost vytvořit a žákům odeslat test. S pomocí externího programu na tvorbu testů jej totiž může připravit nejen v „učitelském“ počítači v učebně, ale kde-

koliv jinde. Do testu může libovolně vkládat například obrázky, schémata a nastavit libovolný počet možných odpovědí. Jedním kliknutím myši pak test zobrazí na monitorech všech počítačů, studenti jej vyplní a odešlou zpět. Program pak na základě zadaných správných odpovědí test automaticky vyhodnotí a během chvíle tak učitel získá výsledky a studentům rozešle známky.

Program si můžete vyzkoušet. Na stránkách www.pc-control.cz naleznete ke stažení časově omezenou verzi programu. Tato trial verze obsahuje všechny funkce ZLATÉ edice programu PC Control a máte možnost ji využívat po 30 dní zdarma.

Libor Kubes
kubes@16up.cz