

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 165 a 166, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 165

Připravuje se oslava narozenin, na kterou je pozván lichý počet hostů. V místnosti je pro ně přichystán odpovídající počet židlí rozmístěných u několika stolů. Hostitel si před začátkem oslavy všiml zajímavé věci. Všechny hosty lze ve druhé polovině večera přesadit tak, že žádný z nich nebude sedět u stejného stolu jako před přesazením. Kdyby však hostitel před příchodem hostů spojil k sobě libovolné dva stoly i s jejich židlemi a udělal z nich jeden společný stůl, takové přesazení již nebude možné. Kolik stolů je v místnosti?

Marek Pechal

Řešení: Nechť jsou hosté rozesazeni u stolů označených čísly $1, 2, 3, \dots, n$ ($n \geq 2$). Předpokládejme, že počet hostů h u prvního stolu je největší (tj. počet hostů u zbývajících stolů je nejvýše h). Provedme následující úvahu:

Nechť každý z hostů obdrží kartičku s číslem stolu, u něhož právě sedí. Představme si velký kulatý stůl, kolem kterého je rozmístěno tolik židlí, kolik hostů je v místnosti. Kolem tohoto myšleného stolu usazujeme ve směru hodinových ručiček vedle sebe hosty tak, že usadíme nejprve hosty od prvního stolu, potom hosty od druhého stolu atd., až usadíme všechny hosty. Každý z hostů položí před sebe na stůl kartičku s číslem svého stolu a posune se ve směru hodinových ručiček o h míst. Je zřejmé, že před hosty s čísly stolů většími než 1 bude poté ležet kartička s jiným číslem stolu, než u kterého seděli. Před každým z hostů od prvního stolu bude ležet kartička různá od 1, právě když součet počtu hostů u zbývajících stolů bude alespoň h . V takovém případě hosty posadíme ke stolu, jehož číslo před nimi leží, a každý bude sedět u jiného stolu. Naopak, pokud počet hostů u prvního stolu bude větší než celkový počet hostů u zbývajících stolů, neexistuje zřejmě přesazení takové, že by každý z hostů od stolu číslo 1 seděl u stolu s jiným číslem.

Z této úvahy vyplývá, že hosty můžeme přesadit tak, aby každý z hostů

seděl u jiného stolu, právě když počet hostů u každého stolu je alespoň takový, jako počet hostů u všech zbývajících stolů.

Celkový počet pozvaných hostů je lichý a lze je ve druhé polovině večera usadit tak, aby každý seděl u jiného stolu. V místnosti proto nemohou být ani jeden, ani dva stoly. V místnosti jsou tedy alespoň tři stoly. Předpokládejme dále, že v místnosti jsou alespoň čtyři stoly. Z podmínek úlohy vyplývá, že počet hostů u každého stolu je nejvýše roven celkovému počtu hostů u zbývajících stolů. Pokud hostitel spojí dva stoly, u nichž sedí nejmenší počet hostů, není počet hostů u takto vzniklého stolu větší než počet hostů u zbývajících alespoň dvou stolů, a tedy hosty je možné v tomto případě přesadit. Z podmínek úlohy vyplývá, že v místnosti mohou být právě tři stoly. Pokud by u každého z nich například seděl stejný lichý počet hostů, nastane situace popsaná v zadání.

V místnosti jsou proto právě 3 stoly.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Jakub Solovský* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Křivonožka* a *Pavel Trutman*, oba z GMK v Bílovci.

Úloha 166

Dvě shodné kružnice k a l se protínají v bodech A, B . Označme Y obraz libovolného bodu $X \notin \{A, B\}$ kružnice k v otočení se středem v bodě A , které převádí kružnici k na kružnici l . Dokažte, že přímka XY prochází bodem B .

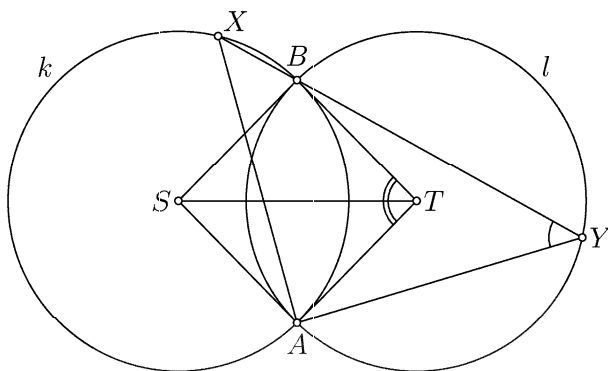
Pavel Leischner

Řešení: Označme S a T po řadě středy kružnic k a l . Bod T je obrazem bodu S v otočení se středem v bodě A , které převádí kružnici k na kružnici l .

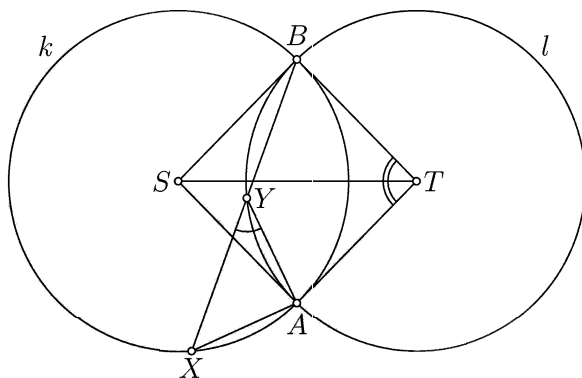
Trojúhelníky YAX a TAS jsou rovnoramenné a mají shodný vnitřní úhel při jejich hlavním vrcholu A . Jsou tedy podobné a úhly XYA a STA jsou shodné. Kružnice k a l jsou souměrně sdružené podle přímky ST , a proto je velikost úhlu BTA dvojnásobkem velikosti úhlu STA a tedy i dvojnásobkem velikosti úhlu XYA .

Pokud bod Y leží na oblouku AB kružnice l vně kružnice k (obr. 1), podle věty o obvodovém a středovém úhlu protíná přímka XY kružnici

l v takovém bodě $C \neq Y$, že velikost středového úhlu CTA je dvojnásobek velikosti úhlu XYA . Takový bod je jediný, bod B , proto přímka XY protíná kružnici l v bodě B .



Obr. 1



Obr. 2

Obdobně můžeme argumentovat, pokud bod Y leží na oblouku AB kružnice l uvnitř kružnice k (obr. 2).

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Petr Boroš* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek