

Zajímavé matematické úlohy

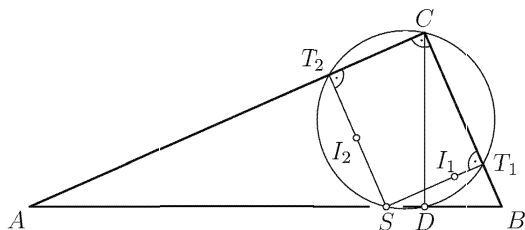
Uvádíme řešení úloh 163 a 164, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 163

Nechť D je pata výšky k přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC . Označme I_1 střed kružnice vepsané trojúhelníku BCD a T_1 její bod dotyku se stranou BC . Dále označme I_2 střed kružnice vepsané trojúhelníku CAD a T_2 její bod dotyku se stranou AC . Dokažte, že se přímky T_1I_1 a T_2I_2 protínají na přeponě AB .

Gottfried Perz (Graz)

Řešení: Přímky T_1I_1 a T_2I_2 jsou kolmé po řadě ke stranám BC a AC . Označme S průsečík přímek T_1I_1 a T_2I_2 . Čtyřúhelník ST_1CT_2 je pravoúhelník; jeho vrcholy leží na kružnici s průměry CS a T_1T_2 .



Trojúhelník ADC je obrazem trojúhelníku CDB v zobrazení složeném z otočení se středem v bodě D a úhlem $+90^\circ$ (viz obr.) a stejnoolehlosti se středem D a koeficientem $\frac{|AC|}{|BC|}$. (Toto zobrazení se v literatuře často nazývá *spirální podobnost*.)

Protože bod T_2 je obrazem bodu T_1 v uvedené spirální podobnosti, jsou přímky T_2D a T_1D navzájem kolmé. Podle Thaletovy věty leží bod D na kružnici s průměrem T_1T_2 . Jiným průměrem této kružnice je ale také úsečka CS , proto v případě $D \neq S$ je úhel CDS pravý a bod S leží na přeponě AB . V případě $D \equiv S$ na ní ovšem leží také. Tím jsme ukázali, že bod S nutně leží na přeponě AB .

Jiné řešení: Stejně jako v předcházejícím řešení označíme S průsečík přímk $T_1 I_1$ a $T_2 I_2$ a ukážeme, že $ST_1 CT_2$ je pravoúhelník. Označíme-li a, b, c obvyklým způsobem délky stran trojúhelníku ABC , plyne z podobnosti trojúhelníků ADC a CDB , že $|BT_1| = \frac{a}{b} \cdot |CT_2|$ a $|CT_1| = |ST_2| = \frac{a}{b} \cdot |AT_2|$. Podle Pythagorovy platí v pravoúhlém trojúhelníku $AT_2 S$

$$|AS| = \sqrt{|AT_2|^2 + |ST_2|^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \cdot |AT_2| = \frac{c}{b} \cdot |AT_2|.$$

Podobně ukážeme, že

$$|BS| = \sqrt{|BT_1|^2 + |CT_2|^2} = \frac{c}{b} \cdot |CT_2|.$$

Potom ale $|AS| + |BS| = \frac{c}{b} \cdot (|AT_2| + |CT_2|) = c$. Pokud by bod S neležel na přeponě AB , podle trojúhelníkové nerovnosti by platilo $|AS| + |BS| > |AB| = c$, což je spor. Proto bod S leží na přeponě AB .

Poznámka. Ze vztahu $|AS| = \frac{c}{b} \cdot |AT_1|$ a z podobnosti trojúhelníků ABC a ACD dále plyne, že bod S je dotykovým bodem kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou AB .

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Petr Boroš*, *Simona Domesová*, *Jakub Solovský* a *Lenka Šumbalová*, všichni z GMK v Bílovci, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Michal Horák*, *David Klačka* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Adam Juraszek* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Pařízek* z GBN v Hradci Králové, *Jáchym Sýkora* z z G ChD v Praze 5, *Dan Šafka* z GJK v Praze, *Trung Ha Duc* z MG v Plzni, *Petáková* a *Martina Vaváčková* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslali *Vladimír Pavel* z Blovic a *Anna Chejnovská* z GBN v Hradci Králové.

Úloha 164

Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí

$$(\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^5 x + \cos^5 x) = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

Ján Mazák (Košice)

Řešení: Užitím vztahu

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\end{aligned}$$

zjistíme, že daná rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{aligned}(\sin^3 x + \cos^3 x) (\sin^5 x + \cos^5 x) &= \\ = 2 (\sin^4 x + \cos^4 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x).\end{aligned}\quad (1)$$

Ukážeme, že jejím řešením není reálné číslo x , pro které platí $\cos x = 0$. Pokud by jím bylo, platilo by $|\sin x| = 1$, což po dosazení do rovnice (1) vede ke sporu $1 = 2$. Obě strany rovnice (1) tedy můžeme vydělit nenulovým číslem $\cos^8 x$. Substitucí $y = \operatorname{tg} x$ získáme z rovnice (1) rovnici

$$(y^3 + 1)(y^5 + 1) = 2(y^4 + 1)(y^4 - y^2 + 1),$$

kterou upravíme do tvaru

$$0 = (y - 1)^2(y^6 + 2y^5 + y^4 - y^3 + y^2 + 2y + 1).\quad (2)$$

Není těžké ukázat, že výraz $y^6 + 2y^5 + y^4 - y^3 + y^2 + 2y + 1$ nabývá pro reálná čísla y pouze kladných hodnot. Plyne to například z rovnosti

$$y^6 + 2y^5 + y^4 - y^3 + y^2 + 2y + 1 = (y^2 - 1)^2(y + 1)^2 + \frac{1}{2}y^2(y^2 + 3(y + 1)^2 + 1).$$

Rovnice (2) má proto jediné řešení $y = 1$, kterému vzhledem k použité substituci odpovídá řešení původní rovnice tvaru $x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jaromír Karmazín* z G ve Velkém Meziříčí, *David Kláška* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Ryšavý* z GJH v Praze a *Dan Šafka* z GJK v Praze.

Dodatečně redakce obdržela správná řešení úloh číslo 160 a 162 od *Petra Boroše* z GMK v Bílovci a správné řešení úlohy číslo 162 od *Františka Jáchima* z Volyně.

Pavel Calábek