

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 161 a 162, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 161

Přirozené číslo n nazveme *pozoruhodným*, právě když existují nezáporná celá čísla x a y taková, že $n = 7x^2 + 287y^2$. Dokažte, že pro každé pozoruhodné číslo n jsou rovněž čísla $2009n$ a $2010n$ pozoruhodná.

Gottfried Perz (Graz)

Řešení: Platí $2009 = 287 \cdot 7$. Předpokládejme, že číslo n je pozoruhodné, tedy existují nezáporná celá čísla x, y tak, že $n = 7x^2 + 287y^2$. Potom platí

$$2009n = 287 \cdot 7 \cdot 7x^2 + 7 \cdot 287 \cdot 287y^2 = 7(287y)^2 + 287(7x)^2$$

a současně

$$\begin{aligned} 2010n &= 2009n + n = 7(287y)^2 + 287(7x)^2 + 7x^2 + 287y^2 = \\ &= 7((287y)^2 - 2 \cdot 287xy + x^2) + 287((7x)^2 + 2 \cdot 7xy + y^2) = \\ &= 7(287y - x)^2 + 287(7x + y)^2. \end{aligned}$$

Jelikož čísla $287y$, $7x$, $|287y - x|$, $7x + y$ jsou celá nezáporná, plyne odtud, že čísla $2009n$ a $2010n$ jsou pozoruhodná.

Správné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Petr Boroš* a *Simona Domesová*, oba z GMK v Bílovci, *Michal Horák*, *David Klačka* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jaromír Karmazín* z G ve Velkém Meziříčí, *Jan Nevoral* z G Jihlava, *Jana Masaryka*, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Pařízek* z GBN v Hradci Králové, *Petr Ryšavý* z GJH v Praze a *Trung Ha Duc* z MG v Plzni, Petáková.

Neúplné řešení zaslali *Lukáš Chlad* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Lenka Sumbalová* z GMK v Bílovci.

Úloha 162

Nechť M je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC . Označme T_a , T_b , T_c po řadě středy stran BC , CA , AB . Vrcholy A , B , C vedme přímký rovnoběžné po řadě s přímkami MT_a , MT_b , MT_c . Rozhodněte, zda tyto přímký procházejí jedním společným bodem. Svou odpověď zdůvodněte.

Jaroslav Švrček

Řešení: Označme T těžiště trojúhelníku ABC a uvažujme stejnoolehlost κ se středem v bodě T a koeficientem -2 . Z vlastností těžiště plyne

$$T_a \mapsto A, \quad T_b \mapsto B, \quad T_c \mapsto C.$$

Označme M' obraz bodu M ve stejnoolehlosti κ , potom se přímký MT_a , MT_b a MT_c zobrazí ve stejnoolehlosti κ po řadě na přímký $M'A$, $M'B$ a $M'C$. Obrazem přímký ve stejnoolehlosti je přímká s ní rovnoběžná. Proto přímký rovnoběžné s přímkami MT_a , MT_b , MT_c vedené po řadě body A , B , C jsou přímký $M'A$, $M'B$ a $M'C$, které procházejí jedním společným bodem M' .

Správné řešení zaslali *Vladimír Pavel* z Blovic, *Simona Domesová*, *Jakub Solovský* a *Lenka Sumbalová*, všichni z GMK v Bílovci, *Filip Hlášek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Michal Horák*, *David Kláška* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Adam Juraszek* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova, *Jaromír Karmazín* z G ve Velkém Meziříčí, *Jan Nevoral* z G Jihlava, Jana Masaryka, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Pařízek* z GBN v Hradci Králové, *Dan Šafka* z GJK v Praze 6 a *Trung Ha Duc* z MG v Plzni, Petáková.

Neúplné řešení zaslala *Anna Chejnovská* z GBN v Hradci Králové.

Pavel Calábek