

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 159 a 160, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 159

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y = z^3 + 1,$$

$$y^2 + z = x^3 + 1,$$

$$z^2 + x = y^3 + 1.$$

Pavel Calábek

Řešení: Všechny tři rovnice sečteme a po úpravě dostaneme

$$(x+1)(x-1)^2 + (y+1)(y-1)^2 + (z+1)(z-1)^2 = 0. \quad (1)$$

Ukážeme, že všechny tři neznámé nabývají hodnotu alespoň -1 . Předpokládejme, že jedna z neznámých nabývá hodnotu menší než -1 . Jelikož zadaná soustava rovnic je cyklická, můžeme předpokládat, že je to proměnná x a platí $x < -1$. Ze druhé rovnice zadané soustavy potom plyne $y^2 + z < 0$, neboli

$$z < -y^2. \quad (2)$$

Podle první dané rovnice platí $z^3 - y = x^2 - 1 > 0$. Odtud plyne $y < z^3$. Užitím (2) odtud dostaneme $y < z^3 < (-y^2)^3 = -y^6$. Tedy $y(1 + y^5) < 0$. Proto nutně platí $y \in (-1; 0)$. Vzhledem k výše odvozenému omezení $y < z^3 < -y^6$ odtud také plyne $z \in (-1; 0)$. S ohledem na intervaly, ve kterých leží neznámé x, y, z , je $1 + y^3 > 0$ a $z^2 + x < 0$, tedy $z^2 + x < 0 < 1 + y^3$. Tento vztah je ovšem ve sporu se třetí rovnicí zadané soustavy. To je spor s předpokladem, že $x < -1$.

Jelikož všechny neznámé nabývají hodnotu alespoň -1 , nabývá každý ze sčítanců na levé straně rovnice (1) nezáporné hodnoty. Jejich součet bude roven 0, právě když každý ze sčítanců na levé straně této rovnice bude roven 0. To nastane, právě když $x, y, z \in \{-1, 1\}$. Zkouškou snadno

ověříme, že pouze trojice $(-1; -1; -1)$ a $(1; 1; 1)$ jsou řešením zadané soustavy rovnic.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Josef Křišťan* z MFF UK v Praze, *David Klaška* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Martina Vaváčková* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Simona Domesová* z GMK v Bílovci, *Anna Chejnovská* z GBN v Hradci Králové, *Lukáš Chlad* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R.

Úloha 160

Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a ρ_a, ρ_b, ρ_c jsou poloměry kružnic vně připsaných jeho stranám. Určete obsah trojúhelníku ABC , jestliže ρ_a, ρ_b a ρ_c jsou vyjádřeny přirozenými čísly a $\rho = 2$.

Jaroslav Švrček

Řešení: Označme S obsah trojúhelníku ABC a a, b, c velikosti jeho stran BC, CA, AB . Uvedme nejprve několik známých vztahů mezi potřebnými prvky trojúhelníku

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} \quad (3)$$

$$S = \sqrt{\rho \rho_a \rho_b \rho_c}, \quad (4)$$

$$\frac{S}{\rho_a} = \frac{1}{2}(-a + b + c), \quad \frac{S}{\rho_b} = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad \frac{S}{\rho_c} = \frac{1}{2}(a - b + c). \quad (5)$$

Na druhou stranu, pokud $\rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c$ jsou kladná reálná čísla vyhovující vztahu (3), můžeme pomocí vztahů (4) a (5) jednoznačně určit hodnoty a, b, c . Ze vztahu (5) navíc plyne, že tato čísla budou splňovat trojúhelníkové nerovnosti, tedy bude existovat trojúhelník, pro nějž by byly $\rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c$ po řadě poloměry kružnice vepsané a poloměry kružnic připsaných jednotlivým stranám.

Podle zadání úlohy tedy stačí určit všechna řešení (diofantovské) rovnice (3) v oboru přirozených čísel pro $\rho = 2$. Vztah (3) má tvar

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}. \quad (6)$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 < \rho_a \leq \rho_b \leq \rho_c$. Ze vztahu (6) plyne $\rho_a \geq 3$. Kdyby $\rho_a > 6$, potom by platilo $\frac{1}{6} > \frac{1}{\rho_a} \geq \frac{1}{\rho_b} \geq \frac{1}{\rho_c}$ a tedy

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} < \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

což je ve sporu s (3). Proto $\rho_a \in \{3, 4, 5, 6\}$. Všechny čtyři případy rozebereme samostatně.

Nechť $\rho_a = 3$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(\rho_b - 6)(\rho_c - 6) = 36.$$

Vzhledem k tomu, že $-3 = \rho_a - 6 \leq \rho_b - 6 \leq \rho_c - 6$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla a mohou nastat možnosti z následující tabulky:

$\rho_b - 6$	1	2	3	4	6
$\rho_c - 6$	36	18	12	9	6

Odtud již snadno vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c . Tato čísla a obsah trojúhelníku vypočítaný podle vztahu (4) jsou uvedena v prvních pěti sloupcích tabulky na konci řešení tohoto příkladu.

Nechť $\rho_a = 4$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(\rho_b - 4)(\rho_c - 4) = 16.$$

Vzhledem k tomu, že $0 = \rho_a - 4 \leq \rho_b - 4 \leq \rho_c - 4$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla a mohou nastat možnosti z následující tabulky:

$\rho_b - 4$	1	2	4
$\rho_c - 4$	16	8	4

Odtud již snadno vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c a zapíšeme i s obsahem trojúhelníku do šestého až osmého sloupce tabulky na konci řešení.

Nechť $\rho_a = 5$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(3\rho_b - 10)(3\rho_c - 10) = 100.$$

Vzhledem k tomu, že $5 = 3\rho_a - 10 \leq 3\rho_b - 10 \leq 3\rho_c - 10$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla větší než 5, která při dělení třemi dávají zbytek 2. Proto $3\rho_b - 10 = 5$ a $3\rho_c - 10 = 20$. Odtud již vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c a zapíšeme i s obsahem trojúhelníku do devátého sloupce závěrečné tabulky.

Nechť $\rho_a = 6$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(\rho_b - 3)(\rho_c - 3) = 9.$$

Vzhledem k tomu, že $3 = \rho_a - 3 \leq \rho_b - 3 \leq \rho_c - 3$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla, a musí být $\rho_b - 3 = 3$ a $\rho_c - 3 = 3$. Odtud již vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c a zapíšeme i s obsahem trojúhelníku do posledního sloupce následující tabulky.

ρ	2									
ρ_a	3					4			5	6
ρ_b	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6
ρ_c	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6
S	42	$24\sqrt{2}$	$18\sqrt{3}$	30	$12\sqrt{6}$	$20\sqrt{2}$	24	$16\sqrt{2}$	$10\sqrt{5}$	$12\sqrt{3}$

Všech deset možných obsahů trojúhelníků vyhovujících podmínkám úlohy je uvedeno v posledním řádku předchozí tabulky.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Josef Křišťan* z MFF UK v Praze, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Simona Domešová* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci, *Adam Juraszek* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *David Klačka* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Nevorál* z G Jihlava, *Jana Masaryka*, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Ryšavý* z GJH v Praze, *Jáchym Sýkora* z z GChD v Praze 5 a *Martina Vaváčková* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslal *Lukáš Chlad* z G v Plzni, Mikulášské nám.

Pavel Calábek