

$$(9 + 5)/7 = (8 - 6) \cdot 1,$$

$$(9 + 7)/8 = (1 + 3)/2,$$

$$(9 + 1)/5 = (2 + 4)/3.$$

Závěr. Prozkoumáním všech případů jsme tak dokázali platnost daného tvrzení.

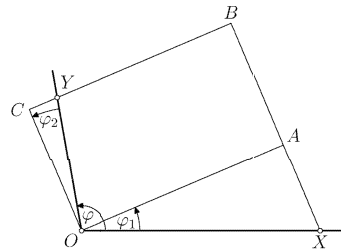
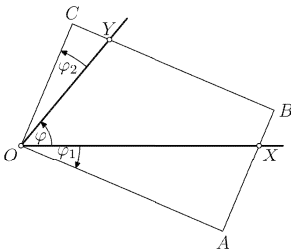
Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 157 a 158, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 157

Jsou dány body O , X , Y , které neleží na téže přímce. Sestrojte obdélník $OABC$ maximálního obsahu takový, že body X a Y leží po řadě na přímkách AB a BC .

Šárka Gergelitsová



Řešení:

Označme φ velikost orientovaného úhlu XOY . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 < \varphi < 180^\circ$. Dále označme φ_1 velikost orientovaného úhlu XOA a φ_2 velikost orientovaného úhlu YOC . Pokud by bod A

byl bodem přímky OX různým od bodu X , ležely by body O, A, B na téže přímce, tedy by netvořily vrcholy obdélníku, proto $-180^\circ < \varphi_1 < 180^\circ$. Navíc, bod A je patou kolmice z bodu O na přímku BX procházející bodem X , proto dokonce $-90^\circ < \varphi_1 < 90^\circ$. Podobně ukážeme, že $-90^\circ < \varphi_2 < 90^\circ$ (viz obrázky).

Vzhledem k tomu, že úhel AOC je pravý, platí $90^\circ = |\varphi + \varphi_2 - \varphi_1|$, tedy nastane jedna z možností

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi - 90^\circ, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi + 90^\circ. \quad (1)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku AOX platí $|AO| = |OX| \cdot \cos \varphi_1$, z pravoúhlého trojúhelníku COY máme $|CO| = |OY| \cdot \cos \varphi_2$, obsah S obdélníku $OABC$ je tedy

$$\begin{aligned} S &= |AO| \cdot |CO| = |AX| \cdot |CX| \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = \\ &= \frac{1}{2} |AX| \cdot |CX| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

Nastane proto jedna z možností

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |AX| \cdot |CX| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi - 90^\circ)), \\ S &= \frac{1}{2} |AX| \cdot |CX| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi + 90^\circ)). \end{aligned}$$

Délky úseček $|OX|$ a $|OY|$ jsou dány. Vzhledem k omezením $-90^\circ < \varphi - 90^\circ < 90^\circ$, $90^\circ < \varphi + 90^\circ < 270^\circ$ platí $\cos(\varphi - 90^\circ) > 0$ a $\cos(\varphi + 90^\circ) < 0$. Obsah obdélníku $OABC$ tedy nabude maxima v prvním případě, kdy $\cos(\varphi - 90^\circ) > 0$, což znamená, že pravý úhel AOC je orientovaný kladně. Dále vidíme, že obsah S bude v tomto případě největší, právě když $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$. Vzhledem k omezením φ_1 a φ_2 to nastane, právě když $\varphi_1 + \varphi_2 = 0^\circ$. Odtud a z rovnice (1) plyne, že to nastane, právě když

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{\varphi - 90^\circ}{2}.$$

To znamená, že strany obdélníku $OABC$ svírají s osami úhlu XOY opačně orientované úhly stejné velikosti, kterou umíme vyjádřit pomocí dané odchylky φ .

Vzhledem k faktu, že body A a C leží na Thaletových kružnicích s průměry OX a OY , je konstrukce pravoúhlého trojúhelníku $OABC$ zřejmá. Tento pravoúhlý trojúhelník bude obdélník, právě když $|OX| \neq |OY|$. V případě $|OX| = |OY|$ úloha nemá řešení.

Správné řešení zaslali: *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Samuel Říha* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Josef Tkadlec* z G v GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Úloha 158

Označme K množinu všech přirozených čísel k , pro něž lze číslo k^2 zapsat jako součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích celých čísel.

- a) Dokažte, že každé číslo z množiny K dává při dělení číslem 66 zbytek 11 nebo 55.
- b) Najděte všechna čísla z množiny K , která jsou menší než 2 009 (lze užít kalkulačku).

Aleš Kobza

Řešení:

- a) Pro každé číslo $k \in K$ podle zadání platí

$$k^2 = (n-5)^2 + (n-4)^2 + (n-3)^2 + \dots + (n+5)^2, \quad (2)$$

kde n je vhodné celé číslo. Vztah (1) upravíme na ekvivalentní tvar

$$k^2 = 11(n^2 + 10).$$

Odtud vyplývá, že číslo k^2 musí být dělitelné 11, vzhledem k tomu, že 11 je prvočíslo, musí být dělitelné 11 i číslo k . To znamená, že zbytkem z po dělení čísla k číslem 66 musí být některé z čísel z množiny $\{0, 11, 22, 33, 44, 55\}$.

Předpokládejme, že $z \in \{0, 22, 44\}$. Potom je číslo k sudé, tedy i číslo n musí být sudé. Proto číslo n^2 při dělení čtyřmi dává zbytek 0. Číslo $11(n^2 + 10)$ při dělení čtyřmi tedy dává zbytek 2. Jelikož $k^2 = 11(n^2 + 10)$, znamená to, že číslo k^2 je dělitelné dvěma, ale není dělitelné čtyřmi, což je spor. Tedy zbytek z je některé z čísel z množiny $\{11, 33, 55\}$.

Ukážeme, že $z \neq 33$. Číslo n při dělení třemi dává jeden ze zbytků 0, 1, 2. Číslo $11(n^2 + 10)$ v těchto případech po dělení třemi dává zbytky po řadě 2, 1, 1. Tedy číslo $k^2 = 11(n^2 + 10)$ (tedy i k) není nikdy dělitelné číslem 3. Zbytek po dělení čísla k číslem 66 tedy nemůže být 33, proto může být pouze některé z čísel z množiny $\{11, 55\}$, což jsme chtěli dokázat.

b) S využitím počítače zjistíme, že existují právě čtyři čísla z množiny K , která jsou menší než 2 009, jsou to čísla 11, 77, 143 a 1 529. Platí totiž

$$\begin{aligned}11^2 &= (-4)^2 + (-3)^2 + \dots + 6^2, \\77^2 &= 18^2 + 19^2 + \dots + 28^2, \\143^2 &= 38^2 + 39^2 + \dots + 48^2, \\1\,529^2 &= 456^2 + 457^2 + \dots + 466^2.\end{aligned}$$

Správné řešení zaslali: *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R. a *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8.

Neúplné řešení zaslali: *Samuel Říha* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Pavel Calábek

Eukleides: ZÁKLADY. Knihy I–IV. Vydala OPS, Nymburk 2008, 154 stran, ISBN: 978–80–903773–7–0

Mezi architektonickými skvosty lidských dějin je málo tak impozantních výtvorů, jakým je stavba geometrie.

Už sám název knihy působí přímo magicky: jakoby se před čtenářem zjevila prapůvodní tvář starověké vědy a současně vystupoval z řádků i obraz jejího tvůrce – člověka, obdařeného přísně logickým myšlením.

Je záslužné, že se po tolika staletích rozhodli autoři této poměrně útlé, ale hutné publikace uctít nehynoucí památku začátků „královské“ vědy a využít ji jako podnětu k novému, současnému zamyšlení nad jejím nestárnoucím obsahem.

Jde o kolektiv autorů, zanícených společně sdíleným zájmem převést původní

překlad antického spisu do mluvy dnešních vyjadřovacích prostředků a dát mu plně srozumitelný a tím i velmi čtivý, aktuální výklad.

Podkladem a vůdčím motivem pro tuto „zprostředkovatelskou“ činnost je zasvěcený komentář profesora Petra Vopěnky, znalce problematiky zajisté povolaného k tak potřebnému počínu.

Proto po přečtení knížky zůstane v čtenáři nejen hluboký dojem, úcta a obdiv, ale vznikne i nutkavý zájem o další z celkem třinácti knih „Základů“, které má autorský kolektiv v plánu napříští ještě vydat.

Nezbývá tedy, než se těšit, že pokračování na dané téma se bude v co možno nejbližší době realizovat se stejným úspěchem a zapůsobí tak účinně, jako se to podařilo v případě tohoto úvodu do „Základů“.

Vladimír Vlček