

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 155 a 156, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (18.) ročníku našeho časopisu.

## Úloha 155

Mařenka se podívala na Pepovy známky z matematiky. Zjistila, že kdyby se mu nezapočítaly dvě nejlepší známky, zhoršil by se jeho průměr známek o 0,5. Aby se mu průměr naopak zlepšil o 0,5, nesměla by mu započítat osm nejhorších známek. Jaký by měl Pepa průměr známek, kdyby mu nezapočítala jednu nejlepší a tři nejhorší známky?

*Radek Horenský*

*Řešení:*

Označme  $n$  ( $n > 8$ ) počet všech Pepových známek z matematiky,  $s$  jejich součet,  $p$  součet dvou nejlepších Pepových známek a  $q$  součet osmi jeho nejhorších známek. Jelikož se jedná o známky kvalifikační stupnice, jsou všechna tato čísla přirozená a platí  $2 \leq p \leq 10$ ,  $8 \leq q \leq 40$ ,  $n \leq s \leq 5n$ . Skutečnost, že při nezapočítání dvou nejlepších známek se průměr Pepových známek zhorší o 0,5, lze zapsat

$$\frac{s}{n} + \frac{1}{2} = \frac{s-p}{n-2}.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$n(n-2) = 4(s-p) - 2p(n-2). \quad (1)$$

Odtud vidíme, že  $n$  je sudé číslo (tedy  $n \geq 10$ ). Jelikož  $s$  a  $p$  jsou součty několika známek, platí  $s-p \leq (n-2)5$ . Odhadneme shora levou stranu ve vztahu (1) a dostaneme  $n(n-2) \leq 20(n-2) - 4(n-2)$ . Odtud již plyne, že  $n \leq 16$ , tedy  $n \in \{10, 12, 14, 16\}$ . Označme navíc  $u$  součet známek, které Pepovi zůstanou, pokud nebudeme uvažovat jeho dvě nejlepší a osm nejhorších známek. Protože  $n \geq 10$  a uvažujeme známky, platí  $0 \leq (n-10) \leq u \leq 5(n-10)$ . Dále máme  $s = p + u + q$  a vztah (1) přepíšeme do tvaru

$$n(n-2) = 4(q+u) - 2p(n-2). \quad (2)$$

Skutečnost, že při nezapočítání osmi nejhorších známek se Pepův průměr zlepší o 0,5, zapíšeme

$$\frac{p + u + q}{n} - \frac{1}{2} = \frac{p + u}{n - 8}.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$n(n - 8) = 2q(n - 8) - 16(p + u). \quad (3)$$

Pokud  $n = 10$ , potom  $u = 0$ , rovnice (2) a (3) přepíšeme do tvaru  $80 = 4q - 16p$  a  $20 = 4q - 16p$ . Vidíme, že soustava těchto rovnic nemá řešení. Tedy  $n \in \{12, 14, 16\}$ . Nyní pro tyto hodnoty  $n$  vyřešíme soustavu rovnic (2) a (3) vzhledem k neznámým  $p$  a  $q$ . Výsledky zapíšeme do tabulky.

| $n$ | 12        | 14                 | 16                 |
|-----|-----------|--------------------|--------------------|
| $p$ | $u - 8$   | $\frac{u - 15}{2}$ | $\frac{u - 24}{3}$ |
| $q$ | $4u - 10$ | $2u - 3$           | $\frac{4u}{3}$     |

Pokud  $n = 12$ , je  $2 \leq u \leq 10$ . Vzhledem k tomu, že  $p \geq 2$  platí nutně  $u = 10$ ,  $p = 2$ ,  $q = 30$ . Ale  $u$  je součet dvou známek, z nichž každá není horší než každá z 8 Pepových nejhorších známek, proto  $4u \leq q$ , což nenastane. Nalezené řešení tedy nevyhovuje podmínkám zadání. Pokud  $n = 14$ , potom  $4 \leq u \leq 20$ . Vzhledem k tomu, že  $p \geq 2$  platí nutně  $u = 19$ ,  $p = 2$ ,  $q = 35$ . Ale  $u$  je součet čtyř známek, z nichž každá není horší než každá z 8 Pepových nejhorších známek, proto  $2u \leq q$ , což nenastane. Tedy i v tomto případě nalezené řešení nevyhovuje podmínkám zadání. Pokud  $n = 16$ , potom  $6 \leq u \leq 30$ . Vzhledem k tomu, že  $p \geq 2$  platí nutně  $u = 30$ ,  $p = 2$ ,  $q = 40$ . Ale  $u$  je součet šesti známek, proto každá z těchto známek je 5,  $q$  je součet osmi nejhorších Pepových známek, proto každá z nich je 5 a  $p$  je součet dvou nejlepších Pepových známek, každá z nich je 1. Pepa tedy dostal z matematiky dvě jedničky a čtrnáct pěték.

*Závěr:* Když Mařenka nezapočítá Pepovi jednu nejlepší a tři nejhorší známky, bude průměr zbývajících zámeček roven  $\frac{56}{12} = \frac{14}{3}$ .

Správné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

## Úloha 156

Do transportního kontejneru, jehož dno má rozměry  $9 \times 9$  a který má výšku 8 (všechny údaje jsou v dm), je třeba naskládat kazety několika typů:  $A$  – dno  $2 \times 3$ , výška 1, cena 700 Kč/ks,  $B$  – dno  $2 \times 4$ , výška 1, cena 1000 Kč/ks,  $C$  – dno  $3 \times 3$ , výška 1, cena 1100 Kč/ks,  $S$  – dno  $1 \times 1$ , výška 2, cena 200 Kč/ks. Prázdný prostor lze vyplnit reklamními kazetami, kostkami  $R$  o rozměrech  $1 \times 1 \times 1$ , cena 50 Kč/ks. Z kazet  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (po jedné od každého z těchto tří druhů) lze navíc po doručení kontejneru do prodejny sestavit dárkový komplet  $K$  v ceně 2990 Kč. Kazety mají být v bedně uloženy tak, aby:

- od každého z druhů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $S$ ,  $R$  byl poslán alespoň jeden kus,
- všechny kazety byly do kontejneru uloženy dnem dolů,
- při prodeji obsahu kontejneru se dosáhlo co největší tržby.

Nakreslete plán uložení kazet do jednotlivých vrstev, uveďte výslednou tržbu a dokažte, že je nejvyšší možná.

*Stanislav Trávníček*

### Řešení:

Nejprve najdeme pro jednotlivé kazety tržbu za  $1 \text{ dm}^3$  a zapíšeme je do tabulky.

| Kazeta                    | $A$                 | $B$    | $C$                 | $S$    | $R$   | $K$    |
|---------------------------|---------------------|--------|---------------------|--------|-------|--------|
| Tržba za $1 \text{ dm}^3$ | $116\frac{2}{3}$ Kč | 125 Kč | $122\frac{2}{9}$ Kč | 100 Kč | 50 Kč | 130 Kč |

Z tohoto přehledu plyne, že největší tržbu přinese komplet  $K$ , proto je třeba volit takové uložení kazet, abychom dostali co nejvíce trojic  $ABC$ . Objem přepravního kontejneru je  $648 \text{ dm}^3$ , objem kazet kompletu  $K$  je  $23 \text{ dm}^3$ . Do kontejneru tedy vejde nejvýše 28 trojic kazet  $ABC$  a zbydou ještě nevyplněné  $4 \text{ dm}^3$ . Podle podmínek do nich musíme uložit ještě alespoň jednu kazetu  $S$  o objemu  $2 \text{ dm}^3$  a jednu kazetu  $R$  o objemu  $1 \text{ dm}^3$ . Zbývajících  $1 \text{ dm}^3$  zaplníme jednou kazetou  $R$ . Je vidět, že při každém jiném rozmístění kazet bychom museli rozebrat alespoň jeden komplet  $K$ , čímž bychom utrpěli větší ztrátu než je možný zisk z nahrazení kazety  $R$  jinými kazetami. Pokud se nám tedy podaří uložit do kontejnerů 28 trojic  $ABC$ , jedna kazeta  $S$  a dvě kazety  $R$ , bude tržní cena takového kontejneru nejvyšší možná. Na následujících obrázcích je příklad takového uložení kazet do jednotlivých vrstev.

Spodní dvě vrstvy

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $C$ | $C$ | $C$ |
| $C$ | $A$ | $A$ |
| $C$ | $B$ | $B$ |

Střední čtyři vrstvy

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $C$ | $A$ | $A$ | $A$ |
| $C$ | $A$ | $A$ |     |
| $C$ | $B$ | $B$ | $B$ |

Horní dvě vrstvy

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $C$ | $B$ | $B$ | $B$ |
| $C$ | $S$ | $R$ | $B$ |
| $C$ | $B$ | $A$ | $A$ |

Přitom kazeta  $S$  leží v obou horních vrstvách kontejneru. Abychom z přepravního kontejneru získali co největší tržbu, uložíme do něj kazety

$$2 \times (2A + 3B + 5C) + 4 \times (5A + 3B + 3C) + 2 \times (2A + 5B + 3C + R + \frac{1}{2}S) = \\ = 28A + 28B + 28C + 2R + S.$$

Celkem za ně utržíme

$$28 \cdot 2\,990 + 2 \cdot 50 + 200 = 84\,020 \text{ Kč}.$$

Správné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

*Pavel Calábek*