

takže

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{(-2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)^2 + (5 - 2 \cdot 1 - 2)^2 + (4 - 1 \cdot 1 - 3)^2}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1}} = \\ &= \dots = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

L i t e r a t u r a

- [1] *Bartsch, H. J.*: Matematické vzorce, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha 1983.
- [2] *Brožíková, E. – Kittlerová, M.*: Lineární algebra a Analytická geometrie, Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.
- [3] *Bubeník, F. – Zindulka, O.*: Matematika 1, Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.
- [4] *Charvát, J. – Kelar, V. – Šibrava, Z.*: Matematika 1, Sbíрка příkladů, Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.
- [5] *Mikulčák, J. a kol.*: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, SPN, Praha 1988.
- [6] *Šedivý, J. a kol.*: Matematika pro III. ročník gymnázií, SPN, Praha 1986.
- [7] *Vojtěch, J.*: Základy matematiky, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1928.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 153 a 154, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 153

Najděte všechny dvojice reálných čísel (x, y) vyhovující soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 2x^3 + y^3 &= 6, \\ 8x^2y + xy^2 &= 12. \end{aligned}$$

Jaromír Šimša

Od dvojnásobku první rovnice dané soustavy odečteme druhou rovnici a dostaneme

$$4x^3 - 8x^2y - xy^2 + 2y^3 = 0.$$

Tuto rovnici upravíme na (faktorizovaný) tvar

$$(x - 2y)(2x - y)(2x + y) = 0.$$

Nastane proto nutně jeden z případů

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = 2x, \quad y = -2x.$$

Dosazením za y do kterékoliv (např. první) z rovnic dané soustavy obdržíme v jednotlivých případech

$$\frac{17}{8}x^3 = 6, \quad 10x^3 = 6, \quad -6x^3 = 6,$$

odkud již vypočteme neznámou x . Úloha má v oboru reálných čísel tři řešení, kterými jsou následující dvojice (x, y) :

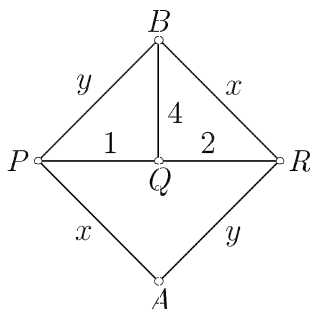
$$\left(2\sqrt[3]{\frac{6}{17}}; \sqrt[3]{\frac{6}{17}}\right), \quad \left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}; 2\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right), \quad (-1; 2)$$

Zkouška u toho postupu není nutná.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Dáša Pekárková* z Tábora, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Simona Domesová*, *Lucie Mohelníková*, *Jitka Novotná* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *Jaromír Kala*, *David Kláška*, *Hana Šormová* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Radek Marciňa* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, Nad Alejí, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z GLJ v Holešově.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 154



Na obrázku je schéma cest mezi místy A, B, P, Q, R i s údaji o jejich délce v kilometrech. Určete nejkratší cestu z A do B v závislosti na reálných hodnotách $x, y \in \langle 1; 8 \rangle$ (trojúhelníkové nerovnosti nemusejí být splněny). V rovině proměnných xy vyznačte výsledné podmínky.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Stačí uvažovat šest různých cest vedoucích z bodu A do bodu B ,

APB , $APQB$, $APQRB$, $ARQPB$, $ARQB$, ARB .

Jejich délky jsou po řadě

$$x + y, \quad x + 5, \quad 2x + 3, \quad 2y + 3, \quad y + 6, \quad x + y.$$

V jednotlivých případech vyšetříme, kdy jsou uvažované cesty nejkratší:

- Cesta APB (spolu s cestou ARB) je nejkratší, právě když

$$y < 5, \quad y < 3 + x, \quad y > x - 3, \quad x < 6.$$

- Cesta $APQB$ je nejkratší, právě když

$$y > 5, \quad x > 2, \quad \underline{y > \frac{1}{2}(x + 2)}, \quad y > x - 1,$$

přitom podtržená podmínka je důsledkem první podmínky a podmínky $x \leq 8$.

- Cesta $APQRB$ je nejkratší, právě když (podtržené podmínky jsou důsledkem zbývajících a omezení na x, y)

$$y > x + 3, \quad x < 2, \quad \underline{y > x}, \quad \underline{y > 2x - 3}.$$

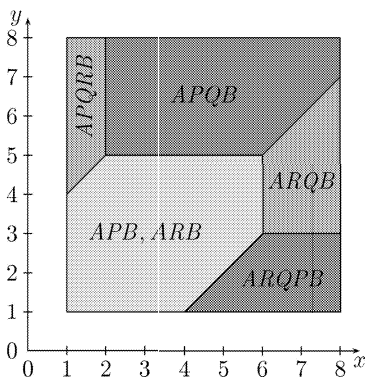
- Cesta $ARQPB$ je nejkratší, právě když

$$y < x - 3, \quad \underline{y < \frac{1}{2}(x + 2)}, \quad \underline{y < x}, \quad y < 3.$$

- Cesta $ARQB$ je nejkratší, právě když

$$x > 6, \quad y < x - 1, \quad \underline{y < 2x - 3}, \quad y > 3.$$

V následujícím grafu jsou vyznačeny výsledné podmínky pro jednotlivé cesty spolu s jejich označením. (Na společných hranicích oblastí je nejkratších cest více.)



Správné řešení zaslali: *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jaromír Kala*, *Jiří Marek* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Lucie Mohelníková*, *Jitka Novotná* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, Nad Alejí, *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Pavel Calábek