

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 151 a 152, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 151

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c} + \frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a} + \frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b} \geq 1.$$

Dále zjistěte, kdy nastává rovnost.

Petr Kaňovský

Řešení:

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí pro kladná reálná čísla a, b, c

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \geq 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 2 \frac{b}{c},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$. Odtud dostáváme, že platí

$$\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \geq \frac{c^2}{b^2} + 2 \frac{b}{c}$$

a tedy i

$$\frac{\frac{a^2}{c^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} \leq \frac{\frac{a^2}{c^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{2b}{c}} = \frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c}.$$

Užitím principu cyklické záměny platí také

$$\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} \leq \frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a} \quad \text{a} \quad \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} \leq \frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ a $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Užitím těchto tří nerovností tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c} + \frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a} + \frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b} &\geq \\ &\geq \frac{\frac{a^2}{c^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} = 1, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když nastane rovnost ve všech třech užitých nerovnostech, tj. když $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, tedy právě když $a = b = c$.

Jiné řešení podle Josefa Tkadlece:

Pro kladná reálná čísla a, b, c platí identita

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\right)^2 &= \left(\frac{c^2}{b^2} + 2\frac{b}{a}\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + 2\frac{c}{b}\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{a}{c}\frac{c}{b}\right) = \\ &= \frac{c^3 + 2b^3}{b^2c} + \frac{a^3 + 2c^3}{c^2a} + \frac{b^3 + 2a^3}{a^2b}.\end{aligned}$$

Podle Cauchyovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c} + \frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a} + \frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b}\right) \left(\frac{c^3 + 2b^3}{b^2c} + \frac{a^3 + 2c^3}{c^2a} + \frac{b^3 + 2a^3}{a^2b}\right) &\geq \\ &\geq \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)^2\end{aligned}$$

a užitím výše dokázané identity odtud dostaneme dokazovanou nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když

$$\frac{\frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c}}{\frac{c^3 + 2b^3}{b^2c}} = \frac{\frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a}}{\frac{a^3 + 2c^3}{c^2a}} = \frac{\frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b}}{\frac{b^3 + 2a^3}{a^2b}},$$

odkud výpočtem (který nebudeme uvádět) dostaneme, že $a = b = c$.

Správné řešení zaslali: *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Josef Tkadlec* z GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z GLJ v Holešově.

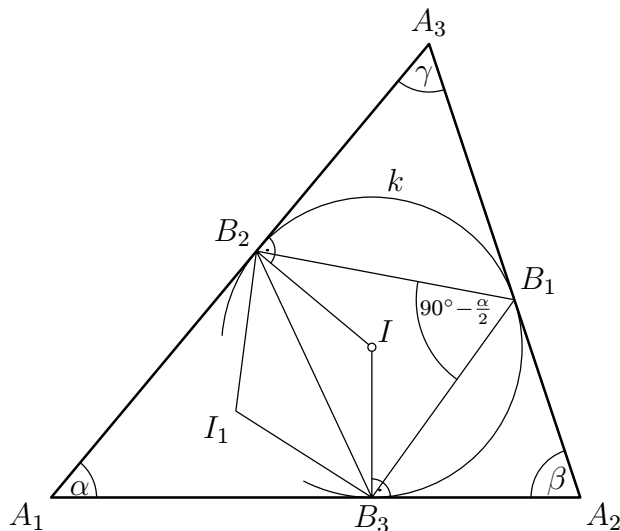
Úloha 152

Nechť B_1, B_2, B_3 jsou dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$ po řadě se stranami A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Označme dále I_1, I_2, I_3 středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům $A_1B_3B_2, A_2B_1B_3, A_3B_2B_1$. Jsou-li úhly $B_2B_1B_3$ a $I_1I_2I_3$ shodné, je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnoramenný. Dokažte.

Jaroslav Švrček

Řešení:

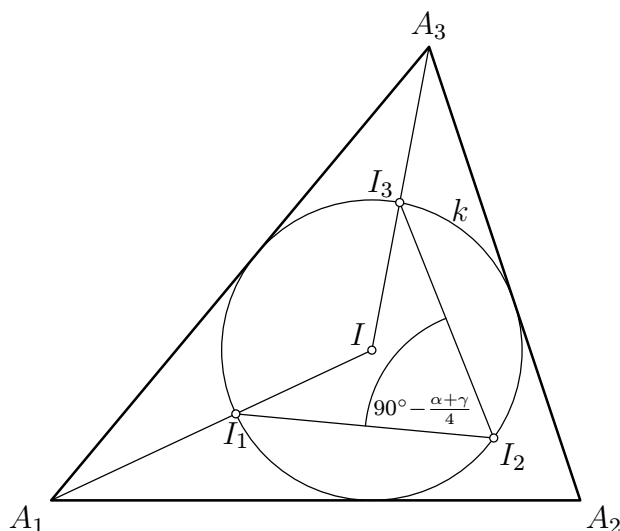
Většina řešení, která redakce obdržela, byla založena na skutečnosti, že body I_1, I_2 a I_3 leží na kružnici k vepsané libovolnému trojúhelníku $A_1A_2A_3$, jejíž střed označíme I . Tento fakt nyní dokážeme (obr. 1). Označme α, β, γ velikosti



Obr. 1

vnitřních úhlů trojúhelníku $A_1A_2A_3$ po řadě při vrcholech A_1 , A_2 , A_3 . Jelikož A_1B_2I a A_1B_3I jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky, je velikost úhlu B_2IB_3 rovna $180^\circ - \alpha$. Tomuto středovému úhlu odpovídá na kružnici k obvodový úhel $B_2B_1B_3$, jeho velikost je tedy $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Navíc je trojúhelník $A_1B_3B_2$ rovnostranný a velikosti vnitřních úhlů při základně B_2B_3 jsou $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Osy vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku při základně B_2B_3 s ní svírají shodné úhly o velikosti $45^\circ - \frac{\alpha}{4}$ a protínají se ve středu I_1 kružnice jemu vepsané. Velikost úhlu $B_2I_1B_3$ je proto $180^\circ - 2(45^\circ - \frac{\alpha}{4}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Body B_1 a I_1 leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou B_2B_3 , součet velikostí úhlů $B_2B_1B_3$ a $B_2I_1B_3$ je 180° , tedy tyto čtyři body B_2 , B_1 , B_3 a I_1 leží na jedné kružnici. Touto kružnicí je kružnice k opsaná trojúhelníku $B_1B_2B_3$. Tedy bod I_1 leží na kružnici k . Podobně ukážeme, že na ní leží i body I_2 a I_3 . Tím jsme ukázali, že body I_1 , I_2 a I_3 leží na kružnici vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$.

Nyní určíme velikost úhlu $I_1I_2I_3$ (obr. 2). Středů I_1 a I_3 kružnic vepsaných



Obr. 2

trojúhelníkům $A_1B_3B_2$ a $A_3B_2B_1$ leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku $A_1A_2A_3$ při vrcholech A_1 a A_3 , které se protínají ve středu I kružnice k .

Velikost úhlu A_3A_1I je $\frac{\alpha}{2}$, velikost úhlu A_1A_3I je $\frac{\gamma}{2}$, proto velikost úhlu A_1IA_3 je $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Tomuto středovému úhlu kružnice k odpovídá obvodový úhel $I_1I_3I_2$, jeho velikost je $90^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{4}$.

Jsou-li úhly $B_2B_1B_3$ a $I_1I_2I_3$ shodné, platí pro jejich velikosti $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{4}$, odtud již dopočítáme $\frac{\gamma}{4} = \frac{\alpha}{4}$, tedy $\alpha = \gamma$. Trojúhelník $A_1A_2A_3$ je proto rovnoramenný, což jsme měli dokázat.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Simona Domesová*, *Miroslav Klimoš*, *Lucie Mohelníková* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *Tomáš Kocáb* z G v Košicích, *Poštová*, *Radek Marciňa* z GChD v Praze 5, *Zborovská*, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, *Nad Alejí*, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Samuel Říha*, *Hana Šormová* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, *tř. Kpt. Jaroše*, *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec*, *Jakub Tôpfer* a *Tomáš Zeman*, všichni z GJK v Praze 6.

Pavel Calábek