

Napr. $\frac{2x - (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}$ alebo $\frac{2x+1}{x+1}$

Žiaci často píšu, že $x^2 + 1 = (x+1) \cdot (x-1)$ (nesprávne).

V ďalšom texte uvedieme znenie a výsledky testov realizovaných vo všetkých ročníkoch 2. stupňa ZŠ v rámci prieskumu.

(Pokračovanie)

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 149 a 150, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (17.) ročníku našeho časopisu.

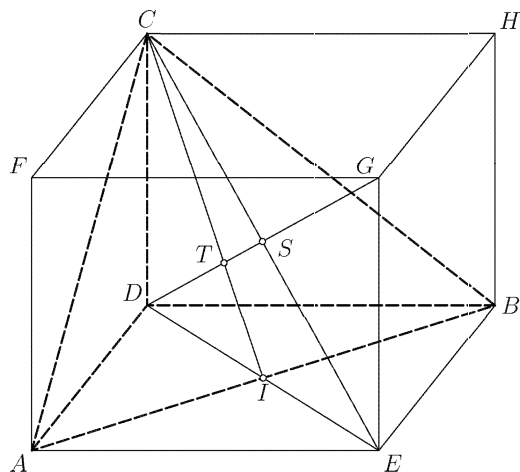
Úloha 149

Nechť $ABCD$ je čtyřstěn, jehož hrany při vrcholu D jsou navzájem kolmé. Označme S střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ a T těžiště jeho stěny ABC . Dokažte, že bod T leží na přímce DS .

Erich Windischbacher (Graz)

Řešení:

Doplňme čtyřstěn $ABCD$ na kvádr $AEBDFGHC$ (viz obr.). Kulová plocha jemu opsaná má střed v průsečíku S tělesových úhlopříček GD a CE , prochází body A, B, C, D , proto je S středem kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Označme I průsečík stěnových úhlopříček AB a DE . Body S a I půlí úhlopříčky, na nichž leží. Dále si všimněme, že body C, D, I, E, G a S leží v jedné rovině, úsečky GD a CI jsou proto různoběžné, označme T jejich průsečík.



Úsečky CI a DS jsou těžnicemi trojúhelníku CDE , proto jeho těžiště T dělí úsečku CI v poměru 2:1. Úsečka CI je ale rovněž těžnice trojúhelníku ABC , bod T je tedy jeho těžištěm. Vidíme, že body D , T (těžiště stěny ABC čtyřstěnu $ABCD$) a S (střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$) leží na jedné přímce DG , což jsme chtěli dokázat.

Správné řešení zaslali *Josef Křišťan* z Plzně, *Simona Domesová* a *Lucie Mohelníková*, obě z GMK v Bílovci, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *David Klačka* a *Hana Šormová*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, Nad Alejí, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6.

Úloha 150

Nechť $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ značí po řadě množinu všech celých a reálných čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna celá čísla x , y platí

$$f(3x - y)f(y) = 3f(x).$$

Pavel Calábek

Řešení:

Uvažujme dva případy:

a) Předpokládejme, že existuje celé číslo y_0 takové, že $f(y_0) = 0$. Dosazením y_0 za y ve daném vztahu dostáváme

$$3f(x) = f(3x - y_0)f(y_0) = f(3x - y_0) \cdot 0 = 0,$$

tedy $f(x) = 0$ pro všechna celá čísla x . Zkouškou snadno ověříme, že nulová funkce $f_0(x) = 0$ pro všechna celá čísla x je řešením dané funkcionální rovnice.

b) Funkce f je různá od nuly pro všechna celá čísla x . Dosazením x za y do daného vztahu dostáváme

$$f(2x)f(x) = 3f(x)$$

pro všechna celá čísla x . Vzhledem k tomu, že $f(x) \neq 0$ platí $f(2x) = 3$, tedy pro všechna sudá celá čísla s je $f(s) = 3$. Nyní necht x a y jsou v dané rovnici libovolná lichá čísla, potom $3x - y$ je sudé číslo a platí

$$3f(x) = f(3x - y)f(y) = 3f(y).$$

Proto pro všechna lichá čísla x a y platí $f(x) = f(y)$. V rovnici položíme $x = 0$, potom pro všechna lichá čísla y platí

$$f(0 - y)f(y) = 3f(0) = 9.$$

Je-li číslo y liché, je také $-y$ liché číslo, proto $f(y) = f(-y)$ a platí $f(-y)f(y) = 9$. Tedy $f(y) \in \{-3, 3\}$. Zkouškou snadno ověříme, že funkce $f_1(x) = 3$ pro všechna celá čísla x a funkce

$$f_2(x) = \begin{cases} 3 & x \text{ sudé} \\ -3 & x \text{ liché} \end{cases}$$

vyhovují dané funkcionální rovnici.

Existují právě tři funkce, které vyhovují zadanému vztahu, jsou to funkce f_0 , f_1 a f_2 .

Správné řešení zaslali *Josef Křišťan* z Plzně, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *Jaromír Kala*, *David Klaška* a *Jiří Marek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Radek Marciňa* z G ChD v Praze 5, *Zborovská*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, *Nad Alejí*, *Jitka Novotná* z GMK v Bílovci, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z GLJ v Holešově,

Neúplné řešení zaslala *Hana Šormová* oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Pavel Calábek