

naznačil a mnohých aj presvedčil: *Krása matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí.* Naozaj rád a veľmi často citujem jeho pedagogický odkaz: *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorá môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.* Výrazne som si medzi učiteľské zákony zapísal: *Vyučovanie nie je veda; to je umenie. Ak by vyučovanie bola veda, tak bude obsahovať najlepší spôsob vyučovania a každý človek by sa musel učiť tým spôsobom.*



György Pólya

Vyučovanie nie je veda, je tam veľa možností pre osobné rozdiely ... Možno aj takto dospejeme k tomu, aby sa vo vyučovaní matematiky na našich školách uplatňovala aspoň trochu didaktického konštruktivismu.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádzame riešenie úloh 147 a 148, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 147

Řešte kvadratickou rovnicí

$$x^2 - (2p + 3q)x + pq^2 = 0$$

s neznámou x a s celočíselnými parametry p ($p \neq 0$) a q , jejíž kořeny jsou tvaru $\frac{c}{p}$ a c , kde c je celé číslo. Zjistěte všechny možné číselné hodnoty kořenů.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice platí

$$2p + 3q = \frac{c}{p} + c \quad \text{a} \quad pq^2 = \frac{c}{p} c,$$

což po úpravě dává

$$c(p + 1) = p(2p + 3q) \quad \text{a} \quad c^2 = (pq)^2. \quad (1)$$

Pokud $c = pq$, potom dosazením do první rovnice (1) dostáváme po úpravě

$$(p - 2)(q - 2) = 4.$$

Všechny rozklady čísla 4 na součin dvou celých čísel probereme v tabulce (podle podmínek úlohy $p - 2 \neq -2$):

$p - 2$	-4	-1	1	2	4
$q - 2$	-1	-4	4	2	1
p	-2	1	3	4	6
q	1	-2	6	4	3
$c = pq$	-2	-2	18	16	18
$\frac{c}{p} = q$	1	-2	6	4	3

Obdobně, pokud $c = -pq$, potom dosazením do první rovnice (1) dostáváme po úpravě

$$(p + 4)(q + 2) = 8.$$

Všechny rozklady čísla 8 na součin dvou celých čísel probereme v tabulce (podle podmínek úlohy $p + 4 \neq 4$):

$p + 4$	-8	-4	-2	-1	1	2	8
$q + 2$	-1	-2	-4	-8	8	4	1
p	-12	-8	-6	-5	-3	-2	4
q	-3	-4	-6	-10	6	2	-1
$c = -pq$	-36	-32	-36	-50	18	4	4
$\frac{c}{p} = -q$	3	4	6	10	-6	-2	1

Daná kvadratická rovnice má pro hodnoty parametrů p, q ze třetího a čtvrtého řádku předchozích tabulek kořeny, které jsou zapsány na odpovídajícím pátém a šestém řádku (celkem 12 možností).

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

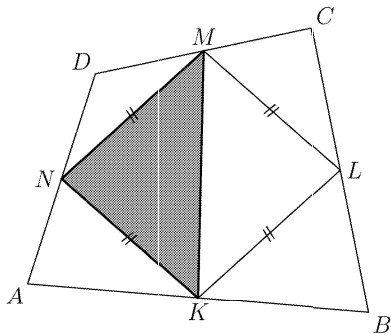
Úloha 148

Označme K , L , M a N středy stran AB , BC , CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že z úseček KL , KM a KN lze sestrojit trojúhelník a vyjádřete jeho obsah pomocí obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Střední příčky KL a MN trojúhelníků ABC a ACD jsou rovnoběžné se (společnou) stranou AC , proto jsou rovnoběžné i navzájem. Podobně ukážeme, že $KN \parallel LM$. Tedy $KLMN$ je rovnoběžník (tzv. *Varignonův* rovnoběžník). Z obrázku je patrné, že trojúhelník KMN má strany délek $|MN| = |KL|$, $|KM|$ a $|KN|$, což dokazuje, že z úseček KL , KM a KN lze sestrojit trojúhelník.



Obsahy trojúhelníků AKN , BKL , CLM , DMN jsou rovny jedné čtvrtině obsahu trojúhelníků ADB , BAC , CBD , DAC . Proto je součet obsahů trojúhelníků AKN , BKL , CLM , DMN roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$, tedy i obsah rovnoběžníku $KLMN$ je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Obsah trojúhelníku KMN je roven polovině obsahu rovnoběžníku $KLMN$, tedy jedné čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Pavel Calábek