

- [5] *Jedinák, D.*: Odvaha i rozvaha pre dokazovanie v školskej matematike. MFI, roč. 15 (2005/06), č. 4, s. 203-212.
- [6] *Jedinák, D.*: Percentá sú zradné čísla pomerné. Rozhledy M-F, roč. 82 (2007), č. 2, s. 51-53.
- [7] *Jedinák, D.*: Vhodná predstava – cesta k úspechu (aj pri štúdiu matematiky). MFI, roč. 14 (2004/05), č. 5, s. 263-268.
- [8] *Jedinák, D.*: Úlohy školskej matematiky, ktorých riešenie mám rád. Učiteľ matematiky, roč. 14 (2005), č. 1 (57), s. 51-58.
- [9] *Kuřina, F.*: Realismus konstruktivních přístupů k vyučování matematice. In: Vedecké štúdie KU, roč. 2, č. 1, s. 40-47, Ružomberok 2002.
- [10] *Kuřina, F. – Půlpán, Z.*: Podivuhodný svět elementární matematiky. Academia, Praha 2006.
- [11] *Lokšová, I. – Lokša, J.*: Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Portál, Praha 1999.
- [12] *Perný, J.*: Konstruktivismus ve vyučování matematice. In: Matematika v škole dnes a zajtra (zborník z konferencie, s. 236-242), Ružomberok: PdF KU, 2007.
- [13] *Pólya, G.*: Mathematics and plausible reasoning. Princeton University Press, Princeton 1954.
- [14] *Pólya, G.*: Mathematical discovery I., II.. John Wiley & Sons, New York – London 1962, 1965.
- [15] *Turek, I.*: Inovácie v didaktike. MPC, Bratislava 2005.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 143 a 144, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 143

Určitý obnos menší než 1000 Kč je rozdělen do deseti číslovaných hromádek (v celých korunách), přičemž platí:

- Když z 1. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 2. hromádce,
- pak ze 2. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 3. hromádce,
- ...

- pak z 9. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 10. hromádce,
- až nakonec z takto zvětšené 10. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 1. hromádce,

pak bude ve všech hromádkách týž obnos.

Kolik Kč bylo v jednotlivých hromádkách původně a kolik nakonec?

Stanislav Trávníček

Řešení:

Označme $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ původní částky v jednotlivých hromádkách a c částku, která zůstane v každé hromádce nakonec. Zřejmě platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10c.$$

Vzhledem k zadání úlohy je pak $10c < 1000$ Kč, tedy

$$c < 100 \text{ Kč}.$$

Označme y částku, kterou přesuneme z druhé hromádky na třetí. Potom ve druhé hromádce byla po prvním kroku částka $10y$, zbyla částka $9y = c$, tedy $y = \frac{1}{9}c$. Ve třetí hromádce pak po přidání částky ve druhém kroku bude $x_3 + \frac{1}{9}c$, po odebrání částky ve třetím kroku tam zbyde částka

$$c = \frac{9}{10} \left(x_3 + \frac{1}{9}c \right).$$

Odtud $x_3 = c$ a ve třetím kroku přesouváme na čtvrtou hromádku opět částku $\frac{1}{9}c = y$.

Tyto úvahy zopakujeme dále pro čtvrtou až desátou hromádku a dostaneme

$$x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = c$$

a v posledním kroku přesouváme na první hromádku částku $\frac{1}{9}c = y$. Potom bude v první hromádce částka

$$\frac{9}{10}x_1 + \frac{1}{9}c = c.$$

Odtud

$$x_1 = \frac{80}{81}c.$$

V prvním kroku jsme tedy z první hromádky na druhou přesouvali částku

$$\frac{1}{10}x_1 = \frac{8}{81}c,$$

na druhé hromádce pak byla částka

$$x_2 + \frac{8}{81}c = 10y = \frac{10}{9}c.$$

Odtud

$$x_2 = \frac{82}{81}c.$$

Na jednotlivých hromádkách tedy byly částky

$$x_1 = \frac{80}{81}c, \quad x_2 = \frac{82}{81}c, \quad x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = c.$$

Vzhledem k tomu, že podle zadání jsou tyto částky celočíselné a $c < 100$ Kč, platí nutně $c = 81$ Kč. Nyní je třeba ještě ověřit, zda můžeme přesouvané sumy vyjádřit pomocí dostupných mincí či bankovek. V prvním kroku se přesouvá částka 8 Kč, ve druhém 10 Kč, v dalších pak částky 9 Kč, což lze.

Původně byly v jednotlivých hromádkách částky

$$x_1 = 80 \text{ Kč}, \quad x_2 = 82 \text{ Kč}, \quad x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = 81 \text{ Kč}$$

a na konci byla na každé hromádce částka 81 Kč.

Správné řešení zaslali *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *David Klačka*, *Samuel Říha*, *Jana Šormová*, *Adam Zemek* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Klimoš*, *Lucie Mohelníková*, *Eliška Nekvapilová* a *Tomáš Toufar*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm a *Alena Peterová* z G v Dobrušce.

Úloha 144

Obdélník $ABCD$ o rozměrech $m \times n$ je rozdělen na mn jednotkových čtverců. Uvažujme libovolný systém přímek, v jejichž sjednocení leží všechny vrcholy zmíněných jednotkových čtverců s výjimkou bodu A . Dokažte, že každý takový systém obsahuje alespoň $m + n$ přímek.

Jaromír Šimša

Řešení:

Daný obdélník umístíme do kartézské souřadnicové soustavy s počátkem v bodě A tak, že celý leží v jejím prvním kvadrantu. Máme ukázat, že každý systém přímek, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z množiny

$$M(n, m) = \{(x, y); x \in \{0, 1, \dots, n\}, y \in \{0, 1, \dots, m\}, x + y > 0\}$$

a neobsahuje bod $(0, 0)$, se skládá alespoň z $m + n$ přímek. Libovolný systém přímek, jejichž sjednocení obsahuje všechny body množiny $M(n, m)$ a neobsahuje bod $A = (0, 0)$, budeme dále nazývat $M(n, m)$ -systém.

Definici množiny $M(n, m)$ můžeme zobecnit i na případy, kdy některé z čísel $M(n, m)$ je rovno 0. Totiž $M(0, 0)$ je prázdná množina, pro přirozená čísla m a n pak položíme

$$M(n, 0) = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$$

$$M(0, m) = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, m)\}$$

Libovolný $M(0, 0)$ -systém pak nemusí obsahovat žádnou přímku. V případě přirozeného čísla n množina $M(n, 0)$ obsahuje n různých bodů, které leží na přímce procházející bodem $(0, 0)$, žádná přímka $M(n, 0)$ -systému nemůže procházet dvěma různými body množiny $M(n, 0)$, protože by jinak procházela také bodem $(0, 0)$. Proto se $M(n, 0)$ -systém skládá z alespoň n přímek. Podobně se $M(0, m)$ -systém skládá z alespoň m přímek. Tvrzení příkladu jsme tak ukázali pro případy, kdy některé z čísel m, n je rovno nule.

Nechť m a n jsou dále přirozená čísla. Uvažujme body množiny $M(n, m)$, které leží na obvodu obdélníku $ABCD$, tj. body z množiny $\mathbf{O}$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} = & \{(x, 0), x \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{(x, m), x \in \{0, 1, \dots, n\}\} \cup \\ & \cup \{(0, y), y \in \{1, 2, \dots, m\}\} \cup \{(n, y), y \in \{0, 2, \dots, m\}\}. \end{aligned}$$

Nechť přímka obsahuje alespoň tři body z $\mathbf{O}$, potom na ní leží jedna ze stran obdélníku $ABCD$. Pokud tato přímka patří do $M(n, m)$ -systému, mohou na ní ležet pouze strany stran BC , CD , tj. jedná se buď o přímku $x = n$, nebo $y = m$.

Předpokládejme, že do $M(n, m)$ -systému nepatří přímky $x = n$ a $y = m$. Potom každá z přímek tohoto systému prochází nejvýše dvěma body z $2(m + n) - 1$ bodů množiny $\mathbf{O}$, tedy do tohoto systému patří alespoň $m + n$ přímek.

Nyní uvažme situaci, kdy některá z přímek BC , CD patří do $M(n, m)$ -systému. Obecněji předpokládejme, že existují celá nezáporná čísla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $l \in \{0, 1, \dots, m\}$, tak, že přímky $x = k$ a $y = l$ do $M(n, m)$ -systému nepatří, kdežto každá z $(m + n - k - l)$ přímek $x = k + 1, x = k + 2, \dots, x = n$ a $y = l + 1, y = l + 2, \dots, y = m$ do tohoto $M(n, m)$ -systému patří. Tyto přímky nemají žádný společný bod s množinou $M(k, l)$. Ale podle předchozího se $M(k, l)$ -systém skládá z alespoň $k + l$ přímek, tedy i v tomto případě se $M(n, m)$ -systém skládá z $(k + l) + (m + n - k - l) = m + n$ přímek. Tím je úloha dokázána.

Poznámka 1. Sjednocení soustavy n přímek $x = k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a soustavy m přímek $y = l$, $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ obsahuje množinu $M(n, m)$, tedy $m + n$ je nejlepší dolní odhad počtu přímek libovolného $M(n, m)$ -systému.

Poznámka 2. Výše uvedeným způsobem úlohu řešili všichni soutěžící, kteří měli úplné řešení.

Správné řešení zaslali *Jan Kusý* a *Tomáš Toufar*, oba z GMK v Bílovci, *Jan Máca* z G v Třebíči, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Libor Peltan* z G v Českých Budějovicích, Česká a *Josef Tkadlec* z GJK v Praze.

Neúplné řešení zaslal *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jan Čapek* z G v Duchcově a *Li Mang* z GChD v Praze.

Pavel Calábek