

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 140 a 141, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 141

Z dřevěného kvádru o rozměrech $a \times b \times c$, kde a, b, c jsou přirozená čísla větší než 1, vyřezeme u některých dvou protilehlých vrcholů daného kvádru dvě rohové jednotkové krychličky. Určete všechny trojice a, b, c , pro které lze takto vytvořené těleso rozřezat na *dvojkrychle* $2 \times 1 \times 1$.

Jožef Cmar

Řešení:

Kvadr o rozměrech $a \times b \times c$ umístíme do kartézské souřadnicové soustavy tak, že jeden z jeho vrcholů je umístěn v počátku, celý kvádr leží v prvním oktantu a jedna z vyříznutých krychliček má vrchol v počátku. Těleso s touto polohou označme $T(a, b, c)$. Pokud bude existovat rozřezání zkoumaného tělesa na dvojkrychle, budou tyto dvojkrychle složené z jednotkových krychliček, jejichž vrcholy mají celočíselné souřadnice. Pro celá čísla x, y, z označme $k(x, y, z)$ jednotkovou krychličku s vrcholy (x, y, z) , $(x + 1, y, z)$, $(x, y + 1, z)$, $(x, y, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z)$, $(x + 1, y, z + 1)$, $(x, y + 1, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z + 1)$. Z kvádru $a \times b \times c$ tak budou vyříznuty krychličky $k(0, 0, 0)$ a $k(a - 1, b - 1, c - 1)$. Jednoduše nahlédneme, že dvě krychličky $k(x_1, y_1, z_1)$ a $k(x_2, y_2, z_2)$ budou mít společnou stěnu, právě když

$$\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = \{1, 0, 0\},$$

budou mít společnou hranu, právě když

$$\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = \{1, 1, 0\},$$

a budou mít společný vrchol, právě když

$$\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = \{1, 1, 1\},$$

Pokud jsou a, b, c vesměs lichá čísla, je $T(a, b, c)$ složeno z $abc - 2$ krychliček, což je liché číslo a tedy toto zkoumané těleso nelze rozřezat na dvojkrychle, jejichž objem je 2.

Nechť dvě z čísel a, b, c jsou sudá čísla a třetí je liché. Pro $x \in \{0, 1, \dots, a-1\}$, $y \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ a $z \in \{0, 1, \dots, c-1\}$ obarvěme jednotlivé jednotkové krychličky následujícím způsobem. V případě, když $x+y+z$ je sudé číslo, obarvěme krychličku $k(x, y, z)$ bílou barvou, jinak ji obarvěme černou barvou. Celý kvádr $a \times b \times c$ se tak skládá z $\frac{1}{2}abc$ černých krychliček a z $\frac{1}{2}abc$ bílých krychliček, přitom se tyto krychličky pravidelně střídají. Abychom dostali $T(a, b, c)$, vyřízli jsme z kvádru $a \times b \times c$ krychličky $k(0, 0, 0)$ a $k(a-1, b-1, c-1)$, obě jsou obarvené bíle. Pokud by existovalo rozřezání $T(a, b, c)$ na dvojkrychle, skládala by se každá z jedné černé a z jedné bílé krychličky a tedy bílých a černých krychliček by byl stejný počet. Jelikož se ale zkoumané těleso $T(a, b, c)$ skládá z $\frac{1}{2}abc - 2$ bílých a $\frac{1}{2}abc$ černých krychliček, nemůže existovat rozřezání zkoumaného tělesa $T(a, b, c)$ na dvojkrychle.

Nyní ukážeme, že pokud $a+b+c$ je sudé číslo, lze $T(a, b, c)$ rozřezat na dvojkrychle. Důkaz provedeme několikerým užitím matematické indukce vzhledem k proměnným a, b, c .

Těleso $T(2, 2, 2)$ lze rozřezat na tři dvojkrychle, ty jsou složeny například z krychliček $(k(1, 0, 0), k(1, 1, 0))$, $(k(0, 0, 1), k(1, 0, 1))$ a $(k(0, 1, 0), k(0, 1, 1))$. Těleso $T(3, 3, 2)$ lze rozřezat na dvojkrychle

$$\begin{aligned} &(k(1, 0, 0), k(2, 0, 0)), \quad (k(2, 1, 0), k(2, 2, 0)), \quad (k(0, 1, 0), k(1, 1, 0)), \\ &(k(0, 2, 0), k(1, 2, 0)), \quad (k(0, 0, 1), k(1, 0, 1)), \quad (k(2, 0, 1), k(2, 1, 1)), \\ &(k(0, 1, 1), k(1, 1, 1)), \quad (k(0, 2, 1), k(1, 2, 1)). \end{aligned}$$

Podobně lze rozřezat na dvojkrychle tělesa $T(3, 2, 3)$ a $T(2, 3, 3)$.

Předpokládejme, že lze rozřezat na dvojkrychle těleso $T(a, b, c)$. Ukážeme, že potom lze rozřezat také $T(a+2, b, c)$. Z tělesa $T(a+2, b, c)$ odřízneme dvojkrychle $(k(x, y, z), k(x+1, y, z))$ pro trojice (x, y, z) z množiny

$$\{(x, y, z) | x = a, y \in \{0, 1, \dots, b-1\}, z \in \{0, 1, \dots, c-1\},$$

$$(y, z) \neq (b-1, c-1)\}$$

a pro trojici $(a-1, b-1, c-1)$. Potom dostaneme těleso $T(a, b, c)$, které podle indukčního předpokladu na dvojkrychle rozřezat lze. Podobně ukážeme, že z předpokladu, že na dvojkrychle lze rozřezat těleso $T(a, b, c)$ plyne, že na dvojkrychle lze rozřezat tělesa $T(a, b+2, c)$ či $T(a, b, c+2)$.

Užitím principu matematické indukce tak zjistíme, že na dvojkrychle lze rozřezat každé těleso $T(a, b, c)$, kde a, b, c jsou taková přirozená čísla větší než jedna, že součet $a + b + c$ je sudé číslo.

Správné řešení zaslali *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *David Kláška* a *Jana Šormová*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Klímoš* a *Jan Kusý*, oba z GMK v Bílovci, *Jan Máca* z G v Třebíči, *Li Mang* z GChD v Praze, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Libor Peltan* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova, Česká*, *Josef Tkadlec* z GJK v Praze a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 142

Určete počet všech přirozených čísel n menších než 2008, pro něž je číslo $2^n - n^2$ dělitelné sedmi.

Peter Novotný

Řešení:

Nejprve prozkoumáme zbytky při dělení sedmi čísel 2^n a n^2 pro několik prvních přirozených čísel n . Tyto zbytky zapíšeme do tabulky.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
zbytek 2^n při dělení 7	2	4	1	2	4	1	2	4
zbytek n^2 při dělení 7	1	4	2	2	4	1	0	1

Z tabulky vidíme, že $2^3 \equiv 1 \pmod{3}$, pro všechna celá nezáporná čísla k, j platí $2^{3k+j} = (2^3)^k 2^j \equiv 2^j \pmod{3}$. Zbytky čísel 2^n při dělení sedmi se budou opakovat s periodou 3. Pro všechna celá nezáporná čísla k dále platí

$$(k+7)^n - k^n = 7 \left((k+7)^{n-1} + (k+7)^{n-2}k + (k+7)^{n-3}k^2 + \dots + k^n \right),$$

proto zbytky při dělení sedmi čísel n^2 se budou opakovat s periodou 7. Celkem tedy vidíme, že zbytky při dělení sedmi čísel $2^n - n^2$ se budou opakovat s periodou 21.

Nyní najdeme všechna přirozená čísla n z množiny $N_{21} = \{1, 2, \dots, 21\}$, pro která čísla 2^n a n^2 dávají při dělení sedmi stejné zbytky. Uvažujme všechny možné zbytky čísel 2^n .

- Zbytek 1 dává číslo 2^n pro $n \equiv 0 \pmod{3}$ a číslo n^2 pro $n \equiv 1 \pmod{7}$ nebo $n \equiv 6 \pmod{7}$. Všechna taková čísla z množiny N_{21} jsou 6 a 15.
- Zbytek 2 dává číslo 2^n pro $n \equiv 1 \pmod{3}$ a číslo n^2 pro $n \equiv 3 \pmod{7}$ nebo $n \equiv 4 \pmod{7}$. Všechna taková čísla z množiny N_{21} jsou 4 a 10.
- Zbytek 4 dává číslo 2^n pro $n \equiv 2 \pmod{3}$ a číslo n^2 pro $n \equiv 2 \pmod{7}$ nebo $n \equiv 5 \pmod{7}$. Všechna taková čísla z množiny N_{21} jsou 2 a 9.

Všechna čísla n z množiny N_{21} , pro která je číslo $2^n - n^2$ dělitelné sedmi jsou čísla

$$2, 4, 6, 9, 10 \text{ a } 15.$$

Platí $2007 = 95 \cdot 21 + 12$. Vzhledem k tomu, že zbytky při dělení sedmi čísla $2^n - n^2$ se opakují s periodou 21, je počet všech čísel menších než 2008, pro něž je $2^n - n^2$ dělitelné sedmi, roven $95 \cdot 6 + 5 = 575$.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *David Kláška*, *Samuel Říha* a *Adam Zemek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Klimoš*, *Lucie Mohelníková* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Máca* z G v Třebíči, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Libor Peltan* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, Česká, *Josef Tkadlec* z GJK v Praze a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Neúplné řešení zaslali *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Alena Peterová* z G v Dobrušce a *Jana Šormová* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.