

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 139 a 140, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 139

Určete všechny dvojice a, b přirozených čísel, pro něž jsou hodnoty odmocnin $\sqrt{a^2 - 8b}$ a $\sqrt{b^2 - 8a}$ celá čísla.

Jaromír Šimša

Řešení:

Předpokládejme, že $m = \sqrt{a^2 - 8b}$ a $n = \sqrt{b^2 - 8a}$ jsou celá nezáporná čísla. Bez újmy na obecnosti, s ohledem na symetrii výrazů, předpokládejme, že $a \geq b$. Z této nerovnosti a z nerovnosti $a^2 - 8b \geq 0$ plyne $a^2 \geq 8b \geq 8a$. Podle podmínek úlohy je číslo a přirozené, tedy $a \geq 8$. Odtud a z nerovnosti $b^2 - 8a \geq 0$ plyne $b \geq 8$. Tedy a, b jsou přirozená čísla, pro která platí

$$a \geq b \geq 8. \quad (1)$$

V dalších úpravách užijeme vztah (1) a dostaneme

$$a^2 > a^2 - 8b \geq a^2 - 8a + 8(8 - a) = (a - 8)^2, \quad (2)$$

proto

$$a > m = \sqrt{a^2 - 8b} \geq a - 8.$$

Protože číslo $8b$ je sudé, mají čísla a a m stejnou paritu a podle předchozího vztahu platí

$$m \in \{a - 8, a - 6, a - 4, a - 2\}.$$

Každou z těchto možností vyšetříme zvlášť.

Nechť $m = a - 8$, potom v (2) nastane rovnost, tedy platí $a = b$ a $a = 8$. Snadno ověříme, že čísla $a = 8$ a $b = 8$ vyhovují podmínkám úlohy.

Nechť $m = a - 6$. Potom z definice čísla m plyne

$$8b = a^2 - m^2 = 12a - 36, \quad \text{tedy} \quad b = \frac{3a - 9}{2}$$

a platí

$$n^2 = b^2 - 8a = \frac{9a^2 - 86a + 81}{4} = \frac{\left(3a - \frac{43}{3}\right)^2 - \frac{1120}{9}}{4}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$1120 = 9 \left(3a - \frac{43}{3}\right)^2 - 36n^2 = (9a - 43 + 6n)(9a - 43 - 6n).$$

Z nerovnosti $9a \geq 9 \cdot 8 > 43$ vidíme, že oba činitele na pravé straně předchozí rovnosti jsou přirozená čísla. Tato čísla navíc při dělení třemi dávají zbytek 2 a číslo $9a - 43 + 6n$ je větší než $9a - 43 - 6n$. Všechny rozklady čísla 1120 na součin přirozených čísel, která při dělení číslem 3 dávají zbytek 2, jsou vyšetřeny v následující tabulce:

$9a - 43 - 6n$	2	5	8	14	20	32
$9a - 43 + 6n$	560	224	140	80	56	35
n	$\frac{93}{2}$	$\frac{73}{4}$	11	$\frac{11}{2}$	3	$\frac{1}{4}$
a	36	$\frac{35}{2}$	13	10	9	$\frac{17}{2}$
$b = \frac{3a-9}{2}$			15		9	

Dvojice $a = 13$, $b = 15$ nevyhovuje předpokladu $a \geq b$, tedy v případě $m = a - 6$ vyhovuje úloze jediná dvojice čísel (a, b) , a to dvojice $(9; 9)$.

Nechť $m = a - 4$. Potom z definice čísla m plyne

$$8b = a^2 - m^2 = 8a - 16, \quad \text{tedy} \quad b = a - 2$$

a platí

$$n^2 = b^2 - 8a = a^2 - 12a + 4 = (a - 6)^2 - 32.$$

Tento vztah dále upravíme

$$32 = (a - 6)^2 - n^2 = (a - 6 - n)(a - 6 + n).$$

Z nerovnosti $a \geq 8$ vidíme, že oba činitele na pravé straně předchozí rovnosti jsou přirozená čísla. Vzhledem k tomu, že rozdíl činitelů na pravé straně je $2n$, mají oba činitele stejnou paritu, přitom $a - 6 - n < a - 6 + n$. Všechny rozklady čísla 32 na součin přirozených čísel, která mají stejnou paritu, jsou vyšetřeny v následující tabulce:

$a - 6 - n$	2	4
$a - 6 + n$	16	8
n	7	2
a	15	12
$b = a - 2$	13	10

V případě $m = a - 4$ vyhovují úloze dvě dvojice čísel (a, b) , a to dvojice $(15; 13)$ a $(12; 10)$.

Nechť $m = a - 2$. Potom z definice čísla m plyne

$$8b = a^2 - m^2 = 4a - 4, \quad \text{tedy} \quad a = 2b + 1$$

a platí

$$n^2 = b^2 - 8a = b^2 - 16b - 8 = (b - 8)^2 - 72.$$

Tento vztah dále upravíme

$$72 = (b - 8)^2 - n^2 = (b - 8 - n)(b - 8 + n).$$

Z nerovnosti $b \geq 8$ vidíme, že oba činitele na pravé straně předchozí rovnosti jsou přirozená čísla. Vzhledem k tomu, že rozdíl činitelů na pravé straně je $2n$, mají oba činitele stejnou paritu, přitom $b - 8 - n < b - 8 + n$. Všechny rozklady čísla 72 na součin přirozených čísel, která mají stejnou paritu, jsou vyšetřeny v následující tabulce:

$b - 8 - n$	2	4	6
$b - 8 + n$	36	18	12
n	17	7	3
b	27	19	17
$a = 2b + 1$	55	39	35

V případě $m = a - 2$ vyhovují úloze tři dvojice čísel (a, b) , a to dvojice $(55; 27)$, $(39; 19)$ a $(35; 17)$.

Je-li (a, b) dvojice přirozených čísel, která řeší úlohu, pro kterou platí $a \geq b$, potom i dvojice (b, a) řeší úlohu. Všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž jsou hodnoty odmocnin $\sqrt{a^2 - 8b}$ a $\sqrt{b^2 - 8a}$ celá čísla, jsou z množiny

$$\{(8; 8), (9; 9), (12; 10), (15; 13), (35; 17), (39; 19), (55; 27), \\ (10; 12), (13; 15), (17; 35), (19; 39), (27; 55)\}$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Miroslav Klimoš* z GMK v Bílovci a *Samuel Říha* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Le Duc Khanh Chuong* z GChD v Praze.

Úloha 140

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC a ϱ poloměr kružnice jemu vepsané. Pak platí nerovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Nejprve dokážeme tvrzení: Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Potom platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1. \quad (3)$$

Důkaz: Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° , platí tedy $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Vyjádříme $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ pomocí zbývajících úhlů.

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

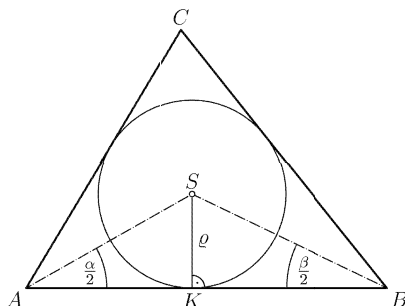
Odtud již plyne

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Nyní přistupme k řešení dané úlohy. Velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A , B , C trojúhelníku ABC označme α , β , γ . Označme dále S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K její dotkový bod se stranou AB . Bod S je průsečíkem os úhlů CAB a CBA , velikosti úhlů SAK a SBK jsou po řadě $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ (viz obr.). Máme

$$\begin{aligned} c = |AB| &= |AK| + |KB| = |SK| \cotg \frac{\alpha}{2} + |SK| \cotg \frac{\beta}{2} = \\ &= \varrho \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$



Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel $\cotg \frac{\alpha}{2}$ a $\cotg \frac{\beta}{2}$ platí

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \geq 2\sqrt{\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2}},$$

příčemž rovnost nastane, právě když $\alpha = \beta$. Odtud získáme

$$c = \varrho \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right) \geq 2\varrho \sqrt{\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2}},$$

což upravíme na tvar

$$\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Cyklickou záměnou dále dostaneme

$$\frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Sečtením těchto vztahů a užitím identity (3) získáme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{4\varrho^2},$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zde nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, tedy pro rovnostranný trojúhelník.

Jiné řešení:

Pro obsah P trojúhelníku ABC platí $P = s\varrho$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Podle Heronova vzorce obsah trojúhelníku vypočteme

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Tedy platí $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s\varrho$, odkud plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\varrho^2} &= \frac{s}{4(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{4(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= \frac{1}{4(s-b)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-b)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro kladná (podle trojúhelníkové nerovnosti) čísla $s-a$ a $s-b$ platí

$$c = (s-a) + (s-b) \geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a = b$. Tuto nerovnost upravíme na tvar

$$\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4(s-a)(s-b)}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4(s-b)(s-c)}, \quad \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4(s-a)(s-c)}.$$

Sečtení těchto tří nerovností s využitím (4) dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4(s-b)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-b)} = \frac{1}{4\varrho^2},$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost nastává, právě když $a = b = c$, tedy právě když je daný trojúhelník rovnostranný.

Jiné řešení (podle Karola Gajdoše):

Podle vztahu (4) platí

$$\frac{1}{4\varrho^2} = \frac{s}{4(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a+b+c}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

a daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\begin{aligned} \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{4\varrho^2} = \frac{a+b+c}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Uvědomme si, že platí

$$\begin{aligned} b^2c^2(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= \\ &= b^2c^2(-a+b+c)(a^2 - (b-c)^2) = \\ &= b^2c^2(-a+b+c)a^2 - b^2c^2(-a+b+c)(b-c)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti (5) jmenovateli výrazů na obou stranách této nerovnosti, výrazy na levé straně upravíme podle (6) a po úpravě dostaneme nerovnost ekvivalentní s (5) ve tvaru

$$\begin{aligned}
& -b^2c^2(-a+b+c)(b-c)^2 - c^2a^2(a-b+c)(c-a)^2 - \\
& -a^2b^2(a+b-c)(a-b)^2 + \\
& + a^2b^2c^2(-a+b+c) + a^2b^2c^2(a-b+c) + a^2b^2c^2(a+b-c) \leq \\
& \leq a^2b^2c^2(a+b+c).
\end{aligned}$$

Tato nerovnost je ovšem ekvivalentní s nerovností

$$0 \leq b^2c^2(-a+b+c)(b-c)^2 + c^2a^2(a-b+c)(c-a)^2 + a^2b^2(a+b-c)(a-b)^2,$$

kteřá zřejmě platí, jelikož výrazy na pravé straně jsou podle trojúhelníkové nerovnosti vesměs nezáporná čísla. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $a = b = c$.

Poznámka. Lze ukázat, že identita (3) platí i v obrácené podobě. Necht' x , y , z jsou kladná reálná čísla taková, že platí

$$xy + yz + zx = 1,$$

potom existuje trojúhelník s vnitřními úhly α , β , γ takový, že platí

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové a *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. Radhoštěm.

Neúplné řešení zaslali *Vladimír Pavel* z Blovic a *Le Duc Khanh Chuong* z GChD v Praze.

Cestou do redakce našeho časopisu se zatoulala správná řešení úloh **135** a **136** *Karola Gajdoše* z Trnavy, čímž se mu omlouváme a zařazujeme ho mezi úspěšné řešitele těchto úloh.