

Řešení. Pro sudá n je daná úloha řešitelná, protože lze nalézt cestu vycházející z rohového pole tak, že postupně projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$. Ukažme, že pro lichá $n \geq 3$ taková cesta neexistuje. Uvažujme šachovnici s černým polem v rohu. Každý tah „šikmo“ spojí dvě pole stejné barvy ze sousedních řad šachovnice. Pro lichá n je však počet černých polí v libovolných dvou sousedních řadách odlišný. Proto minimálně jedno pole v první řadě a jedno pole v poslední řadě není možno spojit „šikmo“ s jiným polem šachovnice. Vzhledem k tomu, že obě pole nemohou být koncovým polem cesty (cesta může končit takem „přímo“, který spojuje dvě sousední pole různé barvy, ale takové pole může být jen jedno), není možné danou šachovnici předepsaným způsobem projít.

Poznámka. Invariant, který lze při řešení této úlohy použít, je dán rozdílem počtu černých polí na lichých řádcích a počtu černých polí na sudých řádcích šachovnice $n \times n$. Tento rozdíl je v případě lichého n roven číslu n . Při dodržení všech podmínek ze zadání (každé černé pole ze sudé řady je spojeno s nějakým černým polem z liché řady) však může tento rozdíl být roven maximálně číslu 1.

L i t e r a t u r a

- [1] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, Inc. 1998.
- [2] *Kanel-Belov, A. J. – Kovaldži, A. K.*: Kak rešajut nestandartnyje zadači (rusky). MCMNO, Moskva 1997.
- [3] *Makrides, G. a kol.*: Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách. MATH.EU Projekt, 2006.
- [4] <http://www.animath.fr/cours/invariants.html>

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 137 a 138, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 137

V oboru nezáporných reálných čísel určete všechna řešení soustavy rovnic

$$2x_1 + x_2^2 = x_3^3,$$

$$2x_2 + x_3^2 = x_1^3,$$

$$2x_3 + x_1^2 = x_2^3.$$

Pavel Calábek

Řešení:

Nejprve předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že např. $x_1 = 0$. Z druhé rovnice dané soustavy plyne $x_2 = x_3 = 0$. Zkouškou snadno ověříme, že trojice $(0; 0; 0)$ je řešením dané soustavy rovnic.

Nyní hledejme řešení dané soustavy rovnic v oboru kladných reálných čísel. Označme $m = \min\{x_1, x_2, x_3\} > 0$ a $M = \max\{x_1, x_2, x_3\} > 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 = m$. Z druhé rovnice dané soustavy vyplývá

$$m^3 = x_1^3 = 2x_2 + x_3^2 \geq 2m + m^2,$$

tedy

$$m^3 - m^2 - 2m = m(m+1)(m-2) \geq 0.$$

Protože m je kladné číslo, plyne odtud $m \in \langle 2; +\infty \rangle$.

Podobně zjistíme, že

$$M^3 \leq 2M + M^2.$$

Odtud $M \in (0; 2)$.

Vzhledem k tomu, že $m \leq M$, plyne z obou předcházejících vztahů

$$m = M = 2.$$

Pokud tedy existuje řešení dané soustavy v oboru kladných reálných čísel, musí nutně platit $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. Zkouškou snadno ověříme, že trojice $(2; 2; 2)$ je také řešením dané soustavy.

Daná soustava má dvě řešení v oboru nezáporných čísel. Jsou jimi trojice $(0; 0; 0)$ a $(2; 2; 2)$.

Poznámka. Jelikož je daná soustava cyklická, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že jedna ze složek řešení je například největší, nelze však předpokládat, že složky řešení jsou uspořádány v jistém pořadí. Toto si bohužel neuvědomili autoři některých neúplných řešení.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Miloslav Hübsch* z Prahy 5.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 138

Do daného čtverce $ABCD$ vepište obdélník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K, L, M, N ležely po řadě na stranách AB, BC, CD, DA uvažovaného čtverce a přitom aby pětiúhelníku $KLCMN$ bylo možno vepsat kružnici (tj. aby byl tečnový).

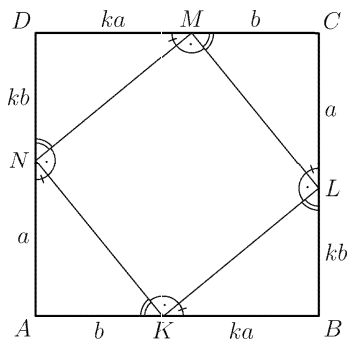
Jaroslav Švrček

Řešení:

Nechť vrcholy K, L, M, N obdélníku $KLMN$ leží po řadě na stranách AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$. Potom jsou zřejmě trojúhelníky (viz obr. 1) NAK a LCM resp. KBL a MDN shodné, přitom trojúhelníky NAK a KBL jsou podobné s koeficientem k . Označme a, b po řadě velikosti odvěsen NA a AK pravoúhlého trojúhelníku NAK . Potom pro velikosti stran AB a BC čtverce $ABCD$ platí

$$|AB| = |AK| + |KB| = b + ka,$$

$$|BC| = |BL| + |LC| = kb + a.$$



Obr. 1

Ze shodnosti stran AB a BC plyne

$$b + ka = kb + a,$$

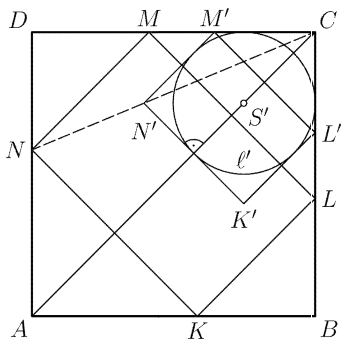
což upravíme na tvar

$$(b - a)(1 - k) = 0.$$

Z rovnosti $k = 1$ plyne, že $KLMN$ je čtverec, což odporuje zadání. Nutně tedy platí $a = b$, odtud již dostaneme, že úsečky MN a LK jsou osově souměrné podle úhlopříčky AC , resp. úsečky LM a KN jsou osově souměrné podle úhlopříčky BD .

Označme ℓ kružnici vepsanou pětiúhelníku $KLCMN$. Kružnice ℓ se dotýká stran BC , CD čtverce $ABCD$, její střed S tedy leží na ose úhlu BCD , což je úhlopříčka AC čtverce $ABCD$.

Obdélník $KLMN$ sestrojíme pomocí stejnolehlosti. Necht' ℓ' je libovolná kružnice se středem S' , která se dotýká polopřímek CB a CD . Sestrojíme obdélník $K'L'M'N'$ takový, že $K'N'$ je tečna ke kružnici ℓ' kolmá na polopřímku CA , $K'L'$ resp. $M'N'$ jsou tečny ke kružnici ℓ' rovnoběžné s přímkou AC a body L' , M' leží po řadě na polopřímkách CB , CD (viz obr. 2). Takový obdélník $K'L'M'N'$ můžeme sestavit právě jedním způsobem. Označme N průsečík polopřímky CN' s úsečkou DA a uvažujme stejnolehlost h se středem C , která převádí obdélník $K'L'M'N'$ v obdélník $KLMN$, který je vepsán požadovaným způsobem do čtverce $ABCD$. Obrazem kružnice ℓ' je pak kružnice ℓ vepsaná pětiúhelníku $KLCMN$. Tím je (jednoznačně) určen obdélník $KLMN$ daných vlastností.



Obr. 2

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5. *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.