

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 145 a 146, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 145

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro která platí

$$x^2 + y^2 = (x + 3)(2y + 4).$$

Pavel Calábek

Řešení: Rovnici upravíme na tvar

$$(x - y)^2 = 4x + 6y + 12.$$

Pro libovolná celá čísla x, y je výraz na pravé straně číslo dělitelné dvěma, tedy i výraz na levé straně musí být dělitelný dvěma. Pokud má rovnice řešení v oboru celých čísel, existuje celé číslo k tak, že platí

$$\begin{aligned}x - y &= 2k, \\4x + 6y + 12 &= 4k^2.\end{aligned}$$

Odtud

$$x = \frac{2k^2 + 6k - 6}{5}, \quad y = \frac{2k^2 - 4k - 6}{5}.$$

Nechť číslo k dává při dělení pěti zbytek j , tedy existují celá čísla m a j , kde $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, tak, že platí $k = 5(m - 1) + j$. Potom

$$\begin{aligned}x &= 10m^2 - 14m + 4mj - 4j + 4 + \frac{2j^2 + 6j - 6}{5}, \\y &= 10m^2 - 24m + 4mj - 4j + 14 + \frac{2j^2 - 4j - 6}{5}.\end{aligned}\tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že m a j jsou celá čísla, jsou x a y celá, právě když čísla $\frac{1}{5}(2j^2 + 6j - 6)$ a $\frac{1}{5}(2j^2 - 4j - 6)$ jsou celá, tj. právě když $j \in \{3, 4\}$. Našli jsme nutnou podmínku existence řešení. Na druhou stranu zkouškou snadno ověříme, že každá z dvojic (vzniklých ze vztahu (1) volbou $j = 3, j = 4$)

$$(x, y) = (10m^2 - 2m - 2, 10m^2 - 12m + 2) \quad (2)$$

$$(x, y) = (10m^2 + 2m - 2, 10m^2 - 8m) \quad (3)$$

pro libovolné celé číslo m vyhovuje dané rovnici.

Dané rovnici vyhovuje nekonečně mnoho celých čísel, každé z nich se dá zapsat jedním ze způsobů (2) nebo (3), kde m je libovolné celé číslo.

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 146

V rovnostranném trojúhelníku ABD se stranou délky 2 označme C střed strany BD . Tento trojúhelník rozstříháme na polovinu podél přímky AC . Trojúhelník ABC zůstane pevně na místě a trojúhelník ACD se kolem něj otočí takto: Nejprve se otočí kolem bodu A do polohy $AC'B$, pak se otočí kolem bodu B do polohy $A'CB$ a nakonec se otočí kolem bodu C do původní polohy ACD . Určete obsah rovinného útvaru, který pokryje při tomto pohybu trojúhelník ACD .

Jaroslav Zhouf

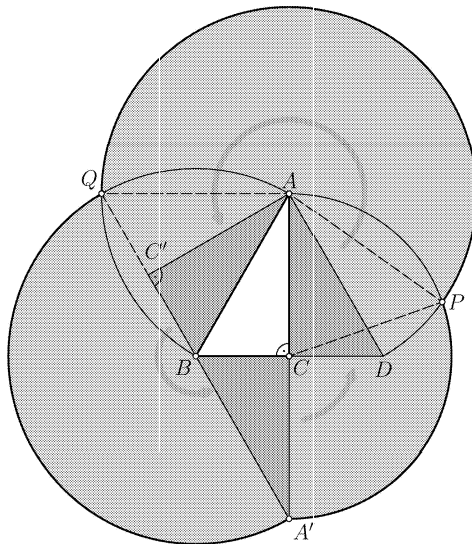
Řešení: Výška rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 2 je $|AC'| = \sqrt{3}$. Vidíme, že trojúhelník ACD pokryje při svém pohybu oblast, která je sjednocením kruhů $k_A(A; 2)$, $k_B(B; 2)$ a $k_C(C; \sqrt{3})$ bez vnitřku trojúhelníku ABC (viz obrázek, kde jsou zároveň tmavší barvou zvýrazněny klíčové polohy trojúhelníku ACD). Označme P průsečík kružnic $k_a(A; 2)$ a $k_c(C; \sqrt{3})$, Q průsečík kružnic k_a a $k_b(B; 2)$.

Trojúhelník ABQ je rovnostranný. Trojúhelník ACP je rovnoramenný se základnou AP délky 2 a rameny délek $\sqrt{3}$. Pro velikost φ úhlu PAC platí

$$\cos \varphi = \frac{|AP|}{2|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Jelikož v dalším textu budeme hledat obsahy kruhových výsečí, uvádějme, na rozdíl od zažitých zvyklostí, velikosti úhlů v obloukové míře. Tedy

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{a} \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$



Oblast pokrytou pohybem trojúhelníku ACD rozdělme na několik částí:

- a) Kruhová výseč kruhu k_A ohraničená body P a Q . Velikost nekonvexního úhlu PAQ je

$$2\pi - |\angle QAB| - |\angle BAC| - |\angle CAP| = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \varphi = \frac{3\pi}{2} - \varphi,$$

tedy velikost jemu odpovídající kruhové výseče kruhu k_A je

$$S_1 = 4\pi \frac{\frac{3}{2}\pi - \varphi}{2\pi} = 3\pi - 2\varphi.$$

- b) Rovnostranný trojúhelník ABQ ; jeho obsah je

$$S_2 = \sqrt{3}.$$

- c) Kruhová výseč kruhu k_B ohraničená body Q a A' . Velikost úhlu $A'BQ$ je

$$|\angle A'BC| + |\angle CBA| + |\angle ABQ| = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

a velikost kruhové výseče kruhu k_B ohraničené body Q a A' je

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi.$$

d) Trojúhelník $A'BC$; jeho obsah je

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e) Kruhová výseč kruhu k_C ohraničená body A' a P . Jestliže velikost vnitřního úhlu při základně AP rovnoramenného trojúhelníku APC je φ , potom velikost vnitřního úhlu při vrcholu C je $\pi - 2\varphi$. Velikost (vedlejšího) úhlu $A'CP$ potom je

$$\pi - |\angle ACP| = \pi - (\pi - 2\varphi) = 2\varphi$$

a velikost jemu odpovídající kruhové výseče kruhu k_C je

$$S_5 = 3\pi \cdot \frac{2\varphi}{2\pi} = 3\varphi.$$

f) Trojúhelník ACP , jeho obsah je

$$S_6 = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AP| \cdot \sin |\angle CAP| = \frac{1}{2} 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}.$$

Obsah plochy, kterou pokryje při svém pohybu trojúhelník ACD je tedy

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 &= (3\pi - 2\varphi) + \sqrt{3} + 2\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\varphi + \sqrt{2} = \\ &= 5\pi + \varphi + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} = 5\pi + \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 20,68. \end{aligned}$$

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Pavel Calábek