

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 133 a 134, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (16.) ročníku našeho časopisu.

V minulém čísle našeho časopisu byly v této rubrice uvedeny dvě nové úlohy. Tiskařský šotek jim však místo správných čísel **137** a **138** přiřadil čísla 135 a 136. Za tuto chybu se čtenářům velmi omlouváme.

Úloha 133

Dokažte, že v desetinném rozvoji čísla $a = 0,0999^{999}$ je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Nechť $b = 0,999^{999}$, potom $a = 10^{-999}b$. Důkaz tvrzení dané úlohy je ekvivalentní s ověřením nerovností $0,1 < b < 1$. Nerovnost $b < 1$ je přitom zřejmá. Položme nyní

$$x_i = \frac{\binom{999}{i}}{1000^i}.$$

Zřejmě platí $x_2 = \frac{999 \cdot 998}{2 \cdot 1000^2} > \frac{1}{3}$ a $x_3 = \frac{999 \cdot 998 \cdot 997}{6 \cdot 1000^3} < \frac{1}{6}$. Pro $i \in \{0, 1, \dots, 998\}$ dostaneme

$$0 < \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{\frac{999!}{(i+1)!(998-i)!1000^{i+1}}}{\frac{999!}{i!(999-i)!1000^i}} = \frac{999-i}{1000(i+1)} < 1,$$

tedy (x_i) je klesající posloupnost kladných čísel. Podle binomické věty platí

$$b = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{999} = x_0 - x_1 + x_2 - \dots - x_{999}.$$

V následujícím výrazu jsou všechny výrazy v závorkách kladné, platí proto

$$b = (x_0 - x_1) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{998} - x_{999}) > x_2 - x_3 > \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} > 0,1.$$

Odtud již plyne, že v desetinném rozvoji čísla a je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Jiné řešení:

Platí

$$-1,0005 < \log 0,0999 < -1.$$

Vynásobením jednotlivých členů v těchto nerovnostech kladným číslem 999 dostaneme nerovnost

$$-999,5 < 999 \cdot (-1,0005) < \log a < -999.$$

Odtud již plyne, že v desetinném rozvoji čísla a je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Tomáš Javůrek* z G v Jeseníku, *Vít Orava* z GMK v Bílovci a *Zbyněk Konečný* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Neúplné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Tomáš Jeziorský* z GMK v Bílovci.

Úloha 134

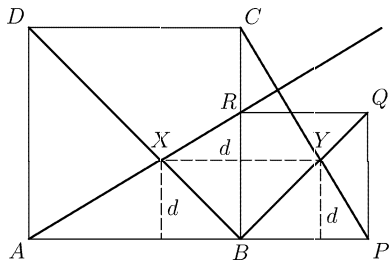
Nechť bod R leží na straně BC čtverce $ABCD$. Uvažujme dále čtverec $BPQR$, jehož vrchol P je bod polopřímky opačné k polopřímce BA . Nechť X je průsečík přímek AR a BD a Y průsečík přímek BQ a PC .

- Dokažte, že přímky AR a PC jsou navzájem kolmé.
- Dokažte, že přímky XY a AB jsou rovnoběžné.

Gottfried Perz (Graz)

Řešení:

Uvažujme otočení O kolem středu B o orientovaný pravý úhel RBP . Body A a R se v tomto otočení zobrazí po řadě na body C a P . Obrazem přímky AR je tedy přímka CP , proto jsou obě navzájem kolmé.



Oba úhly DBC a CBQ mají velikost 45° , proto obrazem přímky BD v otočení O je přímka BQ . Průsečík Y přímek BQ a PC je tedy v tomto otočení obrazem X průsečíku přímek AR a BD . Jelikož X je bodem osy úhlu ABC , má bod X stejnou vzdálenost d od obou jeho ramen BA a BC . Bod Y má tudíž stejnou vzdálenost d od přímky BP (tedy AB). Tím jsme ukázali, že přímka XY je rovnoběžná s přímkou AB .

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Vladimír Žůrek* z Olomouce, *Hana Bendová* z G v České Lípě, *Tomáš Jeziorský*, *Miroslav Klimoš*, a *Miroslav Štufka*, všichni z GMK v Bílovci, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák* a *Hana Šormová* všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Korbel* z G v Jihlavě, *Jana Medková* z G v Brně, Křenová a *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě.

(*Pavel Calábek*)

58. ročník MO v Polsku

Matematická olympiáda v Polsku patří k nejstarším předmětovým soutěžím na světě. Má o dva roky delší tradici než naše MO; ve školním roce 2006/07 probíhá již její 58. ročník. Na rozdíl od naší MO řeší však všichni polští středoškoláci stejné úlohy – v polské MO tedy neexistují věkové kategorie. Pro naše čtenáře uvádíme na ukázkou dvě ze šesti úloh, které byly předloženy (koncem letošního února) soutěžícím II. kola 58. ročníku MO v Polsku.

1. Nechť $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Mají-li rovnice $P(x) = 0$ a $P(P(P(x))) = 0$ společný reálný kořen, pak mají společný celočíselný kořen. Dokažte.
2. Jsou-li a, b, c, d přirozená čísla, pro něž platí $ad = b^2 + bc + c^2$, je číslo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

složené. Dokažte.

(*Jaroslav Švrček*)