

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 131 a 132, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 131

V trojúhelníku ABC při obvyklém označení stran, úhlů a výšek platí rovnost

$$\frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

právě když jeden z úhlů γ , $|\alpha - \beta|$ má velikost 90° . Dokažte.

Jaromír Šimša

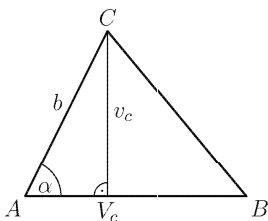
Řešení:

Uvažujme libovolný trojúhelník ABC . Označme V_c patu výšky z vrcholu C ke straně AB . Je-li $\alpha < 90^\circ$, potom v pravoúhlém trojúhelníku AV_cC s pravým úhlem při vrcholu C platí $v_c = b \sin \alpha$ (obr. 1a). Pokud je $\alpha > 90^\circ$, potom v pravoúhlém trojúhelníku AV_cC platí $v_c = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha$ (obr. 1b). Pro $\alpha = 90^\circ$ platí rovněž $v_c = b \sin \alpha$. Proto v libovolném trojúhelníku ABC platí

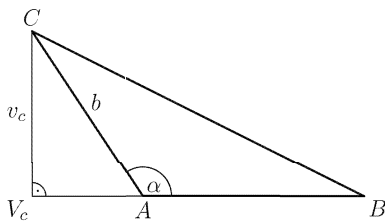
$$\frac{1}{b} = \frac{\sin \alpha}{v_c}.$$

Obdobně ukážeme, že

$$\frac{1}{a} = \frac{\sin \beta}{v_c}.$$



Obr. 1a



Obr. 1b

Rovnost ze zadání úlohy je tedy ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{v_c^2} = \frac{\sin^2 \beta}{v_c^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{v_c^2},$$

která je ekvivalentní s rovností

$$1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta. \quad (1)$$

Postupnými úpravami pravé strany vztahu (1) dostaneme dále

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 1 - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Rovnost (1) je tedy ekvivalentní s rovností

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že α a β jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, je tato rovnost ekvivalentní s jednou ze tří rovností $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\alpha - \beta = -90^\circ$ a $\alpha - \beta = -90^\circ$. V prvním případě platí $\gamma = 90^\circ$, druhé dva případy dávají $|\alpha - \beta| = 90^\circ$, což jsme chtěli ukázat.

Jiné řešení (podle Zbyňka Konečného):

Nechť V_c je pata výšky z vrcholu C ke straně AB . Uvažujme po řadě obrazy A' , V'_c , B' bodů A , V_c , B v kruhové inverzi podle kružnice se středem v bodě C a poloměrem 1. Potom

$$|CA'| = \frac{1}{a}, \quad |CV'_c| = \frac{1}{v_c}, \quad |CB'| = \frac{1}{b}.$$

Protože body A , V_c , B leží v přímce a přímka CV_c je na tuto přímku kolmá, z vlastností uvažované kruhové inverze plyne, že body A' , V'_c , B' a C leží na kružnici s průměrem CV'_c (obr. 2).

Pokud bod V_c (tedy i bod V'_c) leží uvnitř úhlu ACB , je rovnost ze zadání podle Pythagorovy věty a vlastností Thaletovy kružnice ekvivalentní s podmínkou $\gamma = 90^\circ$.

Úloha 132

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro kladná reálná čísla $b+c, c+a, a+b$ platí

$$\frac{(b+c) + (c+a) + (a+b)}{3} \geq \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $b+c = c+a = a+b$, tj. právě když $a = b = c$. Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{(a+b+c)^3}{(b+c)(c+a)(a+b)} \geq \frac{27}{8},$$

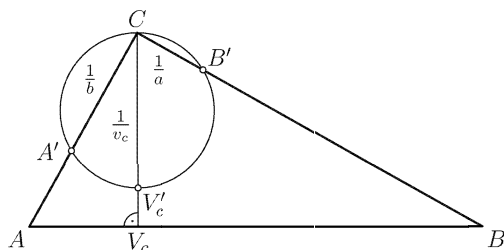
kterou již snadno upravíme na tvar

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

Rovnost zde nastává, právě když $a = b = c$.

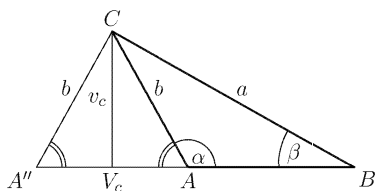
Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Josef Křišťan* z Plzně, *Hana Bendová* z G v České Lípě, *Anežka Faltýnková* z GJŠ v Přerově, *Tomáš Jeziorský*, *Miroslav Klimoš*, *Vojtěch Kozák*, *Lucie Mohelníková*, *Vít Orava* *Tomáš Raček*, a *Miroslav Štufka*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Komínek*, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák*, *Hana Šormová* a *Petr Velan*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Korbel* z G v Jihlavě, *Jana Medková* z G v Brně, Křenová a *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě.

Neúplné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy a *František Jáchim* z Volyně.



Obr. 2

Nechť bod V_c neleží uvnitř úhlu ACB . Jak rovnost ze zadání úlohy, tak podmínky pro úhly vylučují, že by mohl ležet na jeho ramenech. Předpokládejme, že úhel CAB je tupý. Označme A'' bod souměrně sdružený s bodem A podle bodu V_c . Platí $|CA''| = b$. Nyní pata výšky z vrcholu C ke straně $A''B$ trojúhelníku $A''BC$ leží uvnitř úhlu $A''CB$ (obr. 3). Rovnost ze zadání je tedy ekvivalentní s podmínkou, že úhel $A''CB$ je pravý. Vzhledem k tomu, že $|\angle CA''A| = |\angle CAA''| = 180^\circ - \alpha$, je tato podmínka ekvivalentní s rovností $(180^\circ - \alpha) + \beta = 90^\circ$, tedy $\alpha - \beta = 90^\circ$. V případě, že úhel CBA je tupý, bychom obdobně ukázali, že rovnost ze zadání úlohy je ekvivalentní s podmínkou $\beta - \alpha = 90^\circ$.



Obr. 3

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Josef Křišťan* z Plzně, *Miroslav Klímoš* z GMK v Bílovci, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák*, *Hana Šormová* a *Petr Velan*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě.

Neúplné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně a *Jana Medková* z G v Brně, Křenová.