

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 127 a 128, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (15.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 127

Nechť K , L , M jsou středy a D , E , F libovolné vnitřní body po řadě stran BC , CA , AB trojúhelníku ABC . Označme K' , L' , M' středy úseček AD , BE a CF . Přímky AD , BE a CF se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK' , LL' a MM' . Dokažte.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Body K' , L' , M' leží po řadě na středních příčkách LM , MK , KL trojúhelníku ABC (obr. 1). Protože střední příčka LM je rovnoběžná se stranou BC , plyne z podobnosti trojúhelníků AMK' a ABD , resp. ALK' a ACD

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|MK'|}{|K'L|}. \quad (1)$$

Cyklickou záměnou dále dostaneme

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|KL'|}{|L'M|}, \quad (2)$$

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|LM'|}{|M'K|}, \quad (3)$$

Vynásobením vztahů (1), (2) a (3) obdržíme

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|KL'|}{|L'M|} \cdot \frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|}.$$

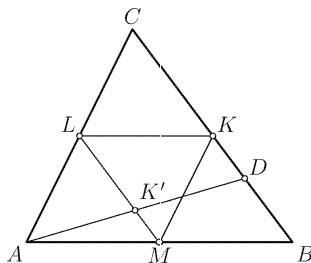
Podle Cèvyovy věty v trojúhelníku ABC se přímky AD , BE a CF protínají v jednom bodě, právě když platí

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

tedy právě když

$$\frac{|KL'|}{|L'M|} \cdot \frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|} = 1.$$

To podle Cèvyovy věty v trojúhelníku KLM nastane, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK' , LL' a MM' .



Obr. 1

Správné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 128

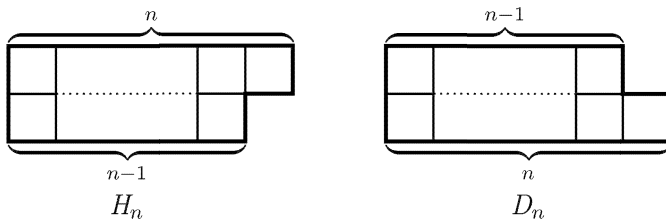
Kolika způsoby můžeme rozřezat obdélník 10×2 na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 ?

(Dvě rozřezání obdélníku považujeme za různá, pokud se liší počtem získaných útvarů nebo polohou alespoň jednoho řezu.)

Pavel Calábek

Řešení:

Pro libovolné přirozené číslo n označme a_n počet možných rozřezání obdélníku $n \times 2$ na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 . Označme dále H_n , resp. D_n šestiúhelník, který je složen ze dvou pásů $n \times 1$ a $(n - 1) \times 1$, přičemž delší pás je nahoře resp. dole (obr. 2). Necht' h_n , resp. d_n udávají počet jejich rozřezání na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 .



Obr. 2

Zřejmě platí $a_1 = 2$ (buď jeden obdélník 2×1 , nebo dva čtverce 1×1), $a_2 = 7$ (obr. 3).



Obr. 3

Šestiúhelník H_n je osově souměrný s šestiúhelníkem D_n . Tedy pro všechna přirozená čísla nutně platí $h_n = d_n$. Snadno se vidí, že $h_1 = d_1 = 1$, $h_2 = d_2 = 3$ (pro h_2 viz obr. 4)



Obr. 4

Předpokládejme, že $n \geq 3$ je libovolné přirozené číslo a uvažujme nějaké přípustné rozřezání obdélníku $n \times 2$. Počet všech možných rozřezání takových, že v pravém horním rohu je čtverec 1×1 je d_n . Počet všech možných rozřezání takových, že vpravo je obdélník 1×2 (postavený na výšku) je a_{n-1} . Počet všech možných rozřezání takových, že vpravo je obdélník 2×1 (postavený na šířku) a pod ním vpravo dole čtverec 1×1 je d_{n-1} . Počet všech možných rozřezání takových, že vpravo jsou pod sebou dva obdélníky 1×2 (postavené na šířku) je a_{n-2} . Tento výčet udává všechny možnosti rozřezání podle útvaru vpravo nahoře a všechny možnosti rozřezání jsou evidentně navzájem různé. Platí proto

$$a_n = d_n + d_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Předpokládejme, že $n \geq 3$ a uvažujme nějaké přípustné rozřezání šestiúhelníku H_n . Vpravo nahoře se nachází buď čtverec nebo obdélník, všechna taková rozřezání jsou navzájem různá, platí proto

$$h_n = a_{n-1} + d_{n-1}.$$

Pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ platí

$$h_n = a_{n-1} + h_{n-1},$$

$$a_n = h_n + h_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Jelikož známe hodnoty a_1 , a_2 , h_1 a h_2 , můžeme podle předchozích vztahů dosazovat do následující tabulky

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_n	1	3	10	32	103	331	1 064	3 420	10 993	35 335
a_n	2	7	22	71	228	733	2 356	7 573	24 342	78 243

Obdélník 10×2 můžeme rozřezat na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 celkem 78 243 různými způsoby.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Poznámka. Pokud bychom v úloze 128 požadovali, aby každé rozřezání daného obdélníku obsahovalo alespoň jeden čtverec 1×1 a alespoň jeden obdélník 2×1 , je v článku *E. Caldy*: Dlážděné plochy a čísla Fibonacciova (MFI, roč. 7, č. 7, s. 396-400) ukázáno, že celkový počet možných rozřezání daného obdélníku $n \times 2$, na obdélníky 2×1 je 89, přitom existuje právě jedno rozřezání obdélníku $n \times 2$ na čtverce 1×1 . Proto by existovalo celkem 78 153 rozřezání požadovaných vlastností.