

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 135 a 136, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle aktuálního (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 135

Nechť a, b, c a d jsou obvykle označené délky stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a e, f délky jeho úhlopříček AC a BD . Dokažte, že platí

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Pro jaké konvexní čtyřúhelníky nastane rovnost?

Radek Horenský

Řešení:

Uvažujme posunutí, které zobrazí bod D na bod B . Označme A' a C' po řadě obrazy bodů A, C v tomto posunutí. Platí tak $|AB| = a, |A'B| = |AD| = d, |C'B| = |CD| = c, |CB| = b$ (obr. 1). Čtyřúhelník $AA'C'C$ je rovnoběžník v němž platí $|AC| = |A'C'| = e, |AA'| = |CC'| = f$. Pro úhly ACC' a CAA' přitom platí $\cos |\angle ACC'| = -\cos |\angle CAA'|$. Podle kosinové věty je

$$\begin{aligned} |AC'|^2 &= |AC|^2 + |CC'|^2 - 2|AC| \cdot |CC'| \cdot \cos |\angle ACC'|, \\ |A'C|^2 &= |AC|^2 + |AA'|^2 - 2|AC| \cdot |AA'| \cdot \cos |\angle CAA'|. \end{aligned}$$

Sečtením obou vztahů dostaneme

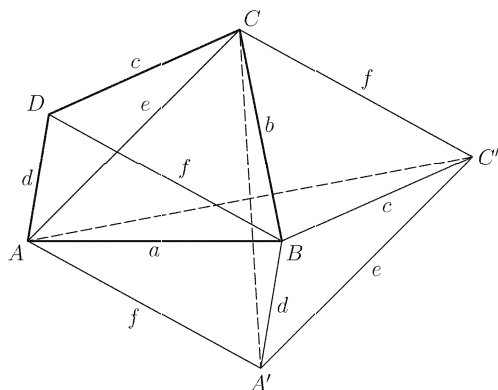
$$|AC'|^2 + |A'C|^2 = 2(e^2 + f^2).$$

Jelikož $2(e^2 + f^2) = (e + f)^2 + (e - f)^2$ a číslo $(e - f)^2$ je nezáporné, platí nerovnost

$$(e + f)^2 \leq |AC'|^2 + |A'C|^2.$$

Rovnost v ní nastane, právě když $e = f$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelníky ABC' a $A'BC$ dostaneme

$$|AC'| \leq |AB| + |C'B| = a + c \quad \text{a} \quad |A'C| \leq |A'B| + |CB| = d + b.$$



Obr. 1

Rovnost v těchto nerovnostech nastane pouze v případech, kdy body A, B, C' , resp. A', B, C leží na jedné přímce. Spojením posledních tří nerovností získáme dokazovanou nerovnost

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2,$$

přičemž rovnost v ní nastane, právě když bod B je průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku $AA'C'C$ se shodnými stranami. Tato situace nastane, právě když čtyřúhelník $ABCD$ má shodné úhlopříčky a dvojice protilehlých stran, tedy právě když $ABCD$ je pravoúhelník (obdélník nebo čtverec).

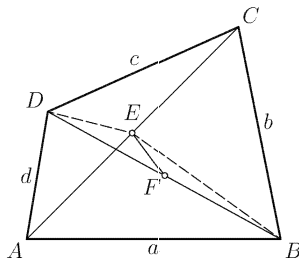
Jiné řešení (podle Jozefa Mészárose)

Označme E, F po řadě středy úhlopříček AC a BD (obr. 2). Pro délky těžnic BE a DE po řadě v trojúhelnících ABC a ACD platí

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= \frac{1}{2} (|AB|^2 + |BC|^2) - \frac{1}{4} |AC|^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} e^2, \\ |DE|^2 &= \frac{1}{2} (|AD|^2 + |DC|^2) - \frac{1}{4} |AC|^2 = \frac{1}{2} (d^2 + c^2) - \frac{1}{4} e^2. \end{aligned}$$

Sečtením těchto vztahů dostaneme

$$|BE|^2 + |DE|^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2).$$



Obr. 2

Pro délku těžnice $|EF|$ trojúhelníku BDE platí

$$|EF|^2 = \frac{1}{2} (|BE|^2 + |DE|^2) - \frac{1}{4} |BD|^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2) - \frac{1}{4} f^2.$$

Jelikož $|EF|^2$ je nezáporné číslo, dostaneme úpravou předcházejícího vztahu

$$e^2 + f^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $E = F$, tedy právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Podle Ptolemaiovy nerovnosti pro čtyřúhelník $ABCD$ dále platí

$$ef \leq ac + bd,$$

přičemž rovnost nastává, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětiový. Přičtením dvojnásobku tohoto vztahu k předcházející nerovnosti získáme

$$e^2 + 2ef + f^2 \leq a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2,$$

což po úpravě dává dokazovanou nerovnost

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Rovnost nastává, právě když je $ABCD$ tětiový rovnoběžník, tedy právě když $ABCD$ je pravoúhelník.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5 a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Neúplné řešení zaslali: *Vladimír Pavel* z Blovic a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 136

Dokažte, že neexistuje reálné číslo c , pro které by čísla

$$x_1 = (c-1)(c-2)\dots(c-2006), \quad x_2 = (c+1)(c+2)\dots(c+2006)$$

byla kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + (c^2 - 1^2)(c^2 - 2^2)\dots(c^2 - 2006^2) = 0.$$

Jaroslav Zhouf

Řešení:

Uvažujme polynom

$$P(c) = (c+1)(c+2)\dots(c+2006)$$

s kladnými (celočíselnými) koeficienty. Jelikož 2006 je sudé číslo, platí

$$P(-c) = (-c+1)(-c+2)\dots(-c+2006) = (c-1)(c-2)\dots(c-2006).$$

Polynom $P(c) + P(-c)$ je sudá funkce a jeho koeficienty jsou dvojnásobky koeficientů polynomu $P(c)$ u sudých mocnin proměnné c , tedy kladná čísla. Proto pro všechna reálná čísla c platí

$$0 < P(c) + P(-c) = x_1 + x_2.$$

Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice budou čísla x_1 a x_2 pro nějaké reálné číslo c kořeny dané kvadratické rovnice, právě když $x_1 + x_2 = 0$, což ale není možné.

Neexistuje tedy reálné číslo c , pro které by čísla x_1 a x_2 byla kořeny dané kvadratické rovnice.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.