

MATEMATIKA

Významné milníky matematické genetiky

FRANTIŠEK KATRNOŠKA – MICHAL KŘÍŽEK

Ústav matematiky VŠCHT, Praha – Matematický ústav AV ČR, Praha

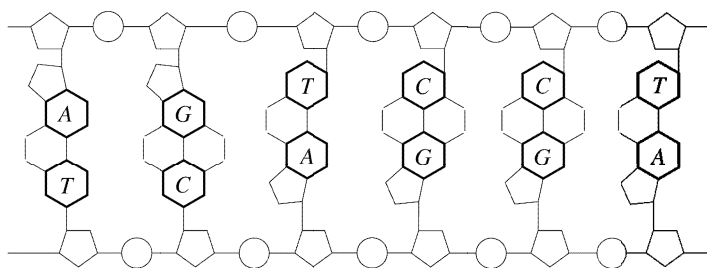
1. Úvod

V roce 1825 český přírodovědec *Jan Evangelista Purkyně*¹ (1787 – 1869) objevil buněčné jádro, aniž tušil, že vlastně objevil obrovskou databanku informací. Genetická informace v jádře buňky je totiž zaznamenána v chromozómech digitálně, provedeme-li např. ztotožnění

$$A = 00, \quad C = 01, \quad G = 10, \quad T = 11, \quad (1)$$

kde A , C , G a T postupně označují nukleotidy adenin, cytosin, guanin a thymin. Ty jsou součástí dvojšroubovice molekuly kyseliny DNA obsažené v jádře každé buňky. Na dvojšroubovici DNA proti sobě vždy stojí báze A a T , které jsou propojeny dvěma vodíkovými můstky, a báze C a G propojené třemi vodíkovými můstky (srov. obr. 1). Například jádro lidské buňky obsahuje přibližně $3 \cdot 10^9$ takových nukleotidových párů. To podle přiřazení (1) odpovídá šesti miliardám bitů (tj. nul a jedniček). Uvážíme-li, že 1 byte je 8 bitů, zjistíme, že jádro každé lidské buňky obsahuje 750 MB informace, což je zhruba kapacita jednoho CD. Hustota záznamu informace v jádře lidské buňky je ale podstatně větší než na CD, neboť průměr jádra činí pouhých 5 μm .

¹V r. 1824 Purkyně popsal tři základní daktyloskopické obrazce (oblouk, smyčka a vír) a zjistil, že jsou dědičné – viz [14].



Obr. 1. Schematické znázornění struktury řetězců DNA. Nukleotidy označené symboly *A*, *T*, *C* a *G* jsou propojeny vodíkovými můstky, což jsou velice slabé chemické vazby. Molekuly cukru deoxyribózy (označené pětiúhelníky) a molekuly kyseliny fosforečné (označené kroužky) jsou spojené silnými kovalentními vazbami a chrání tak genetickou informaci před poškozením. Ve skutečnosti je celá molekula DNA zkroucená do dvojité pravotočivé spirály.

Horní vlákno z obr. 1 odpovídá podle přiřazení (1) posloupnosti

...001011010111....

Příroda tedy „vynalezla“ dvojkovou (nebo chcete-li čtyřkovou) soustavu k zápisu dědičné informace. Dolní vlákno z obr. 1 odpovídá posloupnosti ...110100101000.... Vidíme, že příroda „vynalezla“ i unární operaci negace.

V tomto článku si stručně připomeneme důležité události, které podstatně přispěly k rozvoji relativně nového oboru – matematické genetiky, která je styčnou disciplínou matematiky, informatiky a biologie.

2. Mendelovské a postmendelovské období

V roce 1865 přednášel brněnský augustiniánský kněz *Johann Gregor Mendel* o svých pokusech s křížením hrachu na schůzích Přírodovědného spolku. Zveřejnil je v průkopnické práci [12], která ovšem zapadla především proto, že vědecká veřejnost nepochopila možné souvislosti biologie a matematiky. Hlavní výsledky jeho práce jsou dnes známy jako tři Mendelovy zákony (o uniformitě míšenců, o štěpení znaků, o volné kombinovatelnosti vloh).² Ke stejným závěrům nezávisle dospěli na počátku

²Často se setkáváme se i s jiným pojmenováním Mendelových zákonů, např. zákon o stejnosti kříženců první generace, zákon dominance a rozdělení vlastností rodičů v druhé generaci a zákon o rasové čistotě pohlavních buněk.

20. století *Hugo de Vries*, *Carl Correns*, *Erich von Tschermak* a *William Bateson* (viz [1]), kteří Mendela nazvali otcem nového vědního oboru – genetiky.³ Mendelovy zákony tak postupně vešly ve všeobecnou známost po celém světě (viz [15] a [16]). Mendel vlastně nepřímo objevil základní jednotky dědičnosti, které dnes nazýváme geny.

Zcela rozhodující pro Mendelův úspěch bylo to, že měl velice dobré základy z matematické statistiky a fyziky. Na studiích ve Vídni⁴ navštěvoval např. přednášky *Christiana Dopplera* z experimentální fyziky. Pečlivě studoval Ettingshausenovu učebnici *Die kombinatorische Analysis* (1826), z níž se naučil kombinatorice a matematickým modelům potřebným pro výsledky svého pozdějšího výzkumu. Důležitou oblastí Mendelova zájmu byla i astronomie a meteorologie, při jejichž studiu se naučil zpracovávat velké množství naměřených dat. Zcela nejdůležitější pro Mendelovy genetické pokusy bylo dlouhodobé šlechtění rozmanitých odrůd hrachu, až získal tzv. čisté linie (srov. obr. 2). Ty pak vzájemně křížil a zkoumal vlastností potomků. Přitom se mj. soustředil na dědičnost následujících sedmi znaků:

1. tvar zralých semen (kulatý, svraštělý),
2. zbarvení semen (bílý, žlutý, zelený),
3. zbarvení osemení (bílý, šedivý, šedohnědý aj.),
4. tvar zralých lusků (jednoduše klenutý, hluboce zaškrbený),
5. zbarvení nezralých lusků (jasně žlutý, zelený),
6. postavení květů (axiální, terminální),
7. délka hlavního stonku (krátký, dlouhý).

Je zajímavé, že již tehdy poznal, že tyto znaky jsou na sobě nezávislé. Dnes víme, proč tomu tak je. Každý z těchto sedmi znaků je totiž uložen na jiném chromozómu a hrach má právě 7 párů chromozómů – viz tabulku 1.

V roce 1905 *W. Bateson* poprvé užil pojmu *genetika* (viz [16, str. 17]), který se záhy vžil, přestože tato nová vědní disciplína nebyla vždy přijímána s porozuměním. Termín *gen* zavedl *W. Johannsen* v roce 1909 (viz [9]). V dnešní době pod tímto označením rozumíme úsek molekuly nukleové kyseliny, který nese základní jednotku dědičné informace – gen. Většina

³Jen málokomu se podaří založit zcela nový vědní obor; z českých vědců lze ještě jmenovat nositele Nobelovy ceny Jaroslava Heyrovského, který založil polarografii.

⁴Než odjel na studia do Vídně, učil matematice ve Znojmě a Brně.

Počty chromozómů u různých organismů			
druh organismu	počet chromozómů	druh organismu	počet chromozómů
škrkavka koňská	2	člověk	46
komár pisklavý	6	šimpanz	48
octomilka	8	brambor	48
moucha	12	prase	60
řasa šroubatka	12	ovce	66
hrách setý	14	pes	78
skokan zelený	24	holub	80
lilie zlatá	24	lípa	82
nezmar	32	kapr	104
kočka	38	rak	116
králík	44	žábronožka	168

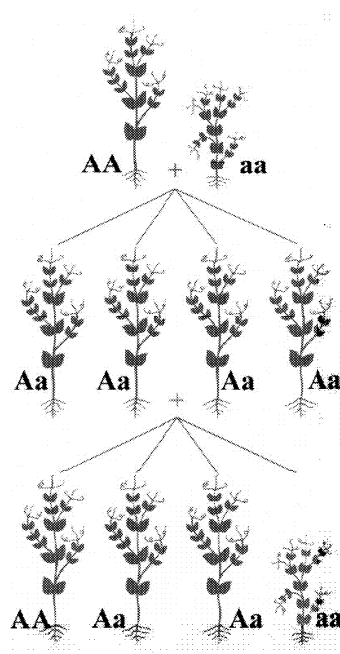
Tab. 1

genů existuje alespoň ve dvou rozdílných formách (viz [5, str. 33]), které označujeme jako *alely* (tj. alelomorfny geny). Například gen odpovídající krevním skupinám⁵ systému AB0 má tři základní alely I^A , I^B a i .

Dvojice odpovídajících si párových chromozómů nese vždy 2 alely určitého genu, z nichž jedna pochází od otce a druhá od matky. Tyto alely mohou být stejné (homozygot) nebo různé (heterozygot). Alelu **a** nazveme *recesivní*, jestliže se její charakteristický znak projevuje jen tehdy, když druhá alela na odpovídajícím chromozómu z dvojice je také **a**. V opačném případě nazveme alelu *dominantní*.⁶ Účinek recesivního genu u heterozygota se tedy neprojevuje (viz obr. 2). Objevuje se pouze u homozygota. Alely I^A , I^B krevního systému AB0 jsou dominantní, zatímco alela i je recesivní. Alely I^A a I^B se nazývají *kodominantní*, což znamená, že jsou navzájem rovnocenné a nezávislé.

⁵Na objevu krevních skupin se významně podílel český lékař Jan Janský (1873 – 1921).

⁶Např. hnědá barva odpovídá dominantní alele genu BEY2, ostatní barvy očí svědčí o přítomnosti obou recesivních alel tohoto genu.



Obr. 2. Schematické znázornění Mendelových pokusů s délkou hlavního stonku u hrachu. Dominantní alela **A** odpovídá dlouhému stonku a recesivní alela **a** krátkému stonku. Všichni potomci rodičů s alelami **AA** a **aa** mají pouze alely **Aa**. Naproti tomu v další generaci má čtvrtina potomků alely **AA**, polovina potomků **Aa** a zbývající čtvrtina **aa**.

3. Hardyův-Weinbergův zákon

Na počátku 20. století vznikaly práce, v nichž se stále více objevovala snaha popsat Mendelovy genetické zákonitosti matematicky. Roku 1908 formuloval slavný matematik *G. H. Hardy* (1877 – 1947) a nezávisle též *W. Weinberg* výsledek (viz [7] a [21]), který je dnes známý jako zákon Hardyův-Weinbergův o stálosti relativní četnosti alel. Abychom si tento zákon přiblížili, uvažujme pro jednoduchost gen, který má jen dvě alely **A**, resp. **a**. Každá pohlavní buňka obsahuje buď alelu **A**, anebo alelu **a**. Jejich výskyt ve vyšetřované populaci je určen relativními četnostmi (pravděpodobnostmi) $p = p[\mathbf{A}] > 0$, resp. $q = q[\mathbf{a}] > 0$, pro něž platí vztah

$$p[\mathbf{A}] + q[\mathbf{a}] = 1. \quad (2)$$

Symboly v hranatých závorkách budou nadále označovat, kterých alel se týká kvantitativní údaj před závorkou.

Nepohlavní buňky⁷ obsahují vždy jednu alelu od matky a jednu od otce. Nechť je vyšetřovaná populace dostatečně velká a nechť je *panmiktická*, což znamená, že je v ní zaručen naprosto náhodný výběr křížení partnerů. Dále předpokládejme, že v ní nedochází k žádným migracím ani mutacím, že průměrná plodnost všech jedinců je stejná atp. Potom pravděpodobnost vzniku jedince s dvojicí alel **AA** je zřejmě rovna součinu $p[\mathbf{A}] \cdot p[\mathbf{A}]$. Podobně zjistíme pravděpodobnosti vzniku jedinců s dvojicemi alel **Aa**, **aA**, resp. **aa**. Položme proto

$$\left. \begin{aligned} p^2[\mathbf{AA}] &= p[\mathbf{A}] \cdot p[\mathbf{A}], \\ pq[\mathbf{Aa}] &= qp[\mathbf{aA}] = p[\mathbf{A}] \cdot q[\mathbf{a}], \\ q^2[\mathbf{aa}] &= q[\mathbf{a}] \cdot q[\mathbf{a}]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Umocněním rovnice (2) na druhou a pomocí (3) dostaneme rovnici

$$p^2[\mathbf{AA}] + 2pq[\mathbf{Aa}] + q^2[\mathbf{aa}] = 1.$$

Užitím vztahů (3) lze pak určit relativní četnosti alel **A**, resp. **a** v další generaci. Ty jsou podle (2) dány vztahy (srov. obr. 3)

$$p^2 + 2pq/2 = p(p + q) = p, \quad \text{resp.} \quad q^2 + 2pq/2 = q(q + p) = q.$$

Odtud plyne, že relativní četnosti výskytu obou alel zůstávají stejné jako původní relativní četnosti a alely pohlavních buněk nových jedinců budou opět splňovat vztah (2). Této vlastnosti se říká *Hardyův-Weinbergův zákon*.

Grafické znázornění situace z obr. 3 si můžeme osvětlit na následujícím příkladu. Pro jednoduchost předpokládejme, že populace má právě 100 jedinců a nechť pro tuto skupinu platí následující rozdělení alel:

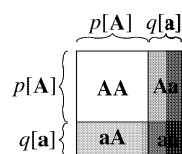
⁷Všechny nepohlavní buňky určitého jedince obsahují teoreticky naprosto totožnou genetickou informaci. Naproti tomu libovolné dvě pohlavní buňky téhož jedince obsahují obecně různou genetickou informaci, což je způsobeno tzv. překřížením chromozómů při vzniku pohlavních buněk. Je zajímavé, že překřížení nerespektuje hranice jednotlivých genů. Proto čím je gen kratší, tím má větší šanci přežít beze změny.

genotyp	AA	Aa	aa	součet
počet jedinců	40	50	10	100
počet alel A	80	50	0	130
počet alel a	0	50	20	70

Tab. 2

Protože daný gen má vždy dvě alely, má 100 jedinců celkem 200 alel. Z tohoto počtu, jak ukazuje tabulka 2, je celkový počet alel **A** roven $P(\mathbf{A}) = 130$ a celkový počet alel **a** je $Q(\mathbf{a}) = 70$. Pro relativní četnosti $p[\mathbf{A}]$ a $q[\mathbf{a}]$ dostáváme:

$$p[\mathbf{A}] = \frac{130}{200} = 0,65, \quad q[\mathbf{a}] = \frac{70}{200} = 0,35.$$



Obr. 3. Grafické znázornění Hardyova-Weinbergova zákona. Na horní (resp. levé) straně jednotkového čtverce je znázorněna relativní četnost alel pro $p[\mathbf{A}] = 0,65$ a $q[\mathbf{a}] = 0,35$ samčích (resp. samičích) pohlavních buněk. Různě obarvené části čtverce odpovídají relativní četnosti alel **A**, **a** v nepohlavních buňkách potomků.

Hardyův-Weinbergův zákon lze matematickou indukcí jednoduše rozšířit i na více alel (viz [20]). Závěrem tohoto odstavce si ukažme opět na příkladu, jak tento zákon použít na alely krevního systému AB0. Pro jednoduchost píšme A, B, 0 místo alel I^A , I^B , i a označme $p = p[\mathbf{A}]$, $q = q[\mathbf{B}]$ a $r = r[\mathbf{0}]$. Pak platí

$$p + q + r = 1, \quad p, q, r > 0. \quad (4)$$

Relativní četnosti jednotlivých genotypů systému AB0 udává následující tabulka:

genotyp	AA	A0	BB	B0	00	AB
krevní skupina	A		B		0	AB
relativní četnost	$p^2 + 2pr$		$q^2 + 2qr$		r^2	$2pq$

Tab. 3

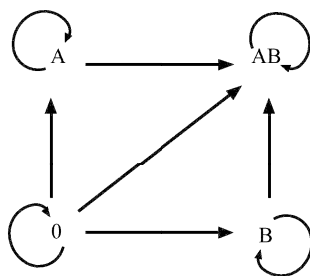
Ze vztahu (4) vidíme, že součet všech relativních četností z tabulky 3 je roven jedné:

$$p^2 + 2pr + q^2 + 2qr + r^2 + 2pq = (p + q + r)^2 = 1.$$

Krevní skupinu 0 má asi 45 % celosvětové populace a tato hodnota se v důsledku Hardyova-Weinbergova zákona v čase příliš nemění, i když skupina 0 odpovídá recesivní alele. Krevní skupinu A, resp. B má 42 %, resp. 9 % populace. Na základě těchto informací se pokuste vyřešit následující úlohu.

Úloha. Pro výše uvedená data určete podle tabulky 3 relativní četnosti p , q a r . Zkuste pro tuto situaci nakreslit obrázek podobný obr. 3.

Poznamenejme ještě, že jedinec s krevní skupinou AB je univerzální příjemce, zatímco jedinec se skupinou 0 je univerzální dárce, pokud ovšem oba mají stejný Rh faktor (viz orientovaný graf na obr. 4).



Obr. 4 Šipky označují, že transfuze krve mezi odpovídajícími krevními skupinami je možná.

4. Informace obsažená v DNA

V roce 1926 *T. H. Morgan* ukázal, že geny jsou uloženy v chromozómech za sebou [13]. O sedm let později za to dostal Nobelovu cenu. V roce 1944 *O. T. Avery*, *C. M. MacLeod* a *M. McCarty* zjistili, že nositelkou dědičné informace je kyselina DNA, která je uložena v chromozómech. Proto se výzkum soustředil na studium jejich struktury. V roce 1949 *Erwin Chargaff* zjistil, že počet bází adeninu, resp. cytosinu je vždy stejný jako počet bází thyminu, resp. guaninu bez ohledu na množství a původ DNA (viz [8, str. 120]). V roce 1952 *Rosalind Franklinová* pořídila první fotografie DNA pomocí elektronového mikroskopu. Na jejich základě pak *James D. Watson* (USA) a *Francis H. C. Crick* (VB) objasnili strukturu DNA (viz [17], [19] a obr. 1), za což jim byla udělena Nobelova cena v r. 1962.⁸ Při tomto fundamentálním objevu sehrála důležitou roli skutečnost, že Crick byl fyzikem (viz [18]). Již v roce 1950 si uvědomil, že pokud budeme stejné molekuly (např. molekuly tvořené cukrem deoxyribózou a kyselinou fosforečnou – srov. obr. 1) spojovat naprosto stejným způsobem, budou ležet na prostorové šroubovici (v mezních případech na kružnici či přímce). Watson si zase povšiml, že pár adenin-thymin je stejně „dlouhý“ jako pár cytosin-guanin (viz [18, str. 131]).

V roce 1956 *J. H. Tjio* a *A. Levan* prokázali, že člověk má v každé nepohlavní buňce 46 párových chromozómů, zatímco primáti jich mají 48 (polovina z nich pochází od matky a druhá polovina od otce).⁹ Tento náhlý skok v počtu chromozómů se odehrál v průběhu evoluce primátů. Dnes je známo, že druhý lidský chromozóm¹⁰ vznikl spojením dvou opičích chromozómů.

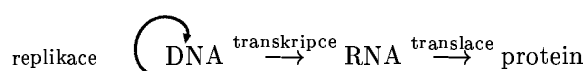
Z prací známého fyzika *G. Gamowa* vyplynulo (viz. např. [6]), že genetický kód by měl být tripletní, tj. za včlenění určité aminokyseliny do proteinového řetězce by měla odpovídat vždy pouze trojice nukleotidů. Velký převrat v matematické genetice nastal v roce 1966, kdy *M. W. Nirenberg* stanovil genetický kód sestavením tabulky tripletů nukleotidů pro všechny aminokyseliny (viz tabulka 2), za což dostal Nobelovu cenu v r. 1968. Tento kód je univerzální v tom smyslu, že platí (až na drobné nuance) v rámci celé organické říše na Zemi, tj. počínaje víry a konče člověkem.

⁸R. Franklinová se bohužel Nobelovy ceny nedočkala, neboť předčasně zemřela na rakovinu. Nicméně její spolupracovník *M. F. H. Wilkins* dostal Nobelovu cenu společně s Watsonem a Crickem.

⁹Lidská pohlavní buňka má jen 23 chromozómů.

¹⁰Chromozómy jsou očíslovány podle délky od nejdelšího k nejkratšímu.

V článku [10] popisujeme, jak se z aminokyselin syntetizují bílkoviny pomocí genetického kódu a operací replikace, transkripce a translace, což lze schematicky znázornit takto:



V osmdesátých letech se *James D. Watson* důrazně zasazoval o přečtení lidského genomu, tj. přečtení celé informace uložené v DNA člověka. Definitivní tabulku lidského genomu však předložil až v roce 2001 *John Craig Venter*. Podrobnosti o tomto významném objevu jsou shrnuty v knize [4]. Rozborem DNA pěti jedinců z různých kontinentů světa bylo zjištěno, že jejich genetická informace je z 99,8 % identická. Jinými slovy, ve třech miliardách párů vzájemně komplementárních bází lidského genomu je 6 milionů párů bází, v nichž se jednotliví lidé od sebe vzájemně liší (kromě jednovaječných sourozenců, kteří mají identické genomy).

		Druhý nukleotid					
		<i>U</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>G</i>		
První nukleotid	<i>U</i>	<i>UUU</i> fenylalanin	<i>UCU</i>	<i>UAU</i> tyrosin	<i>UGU</i> cystein	<i>U</i>	Třetí nukleotid
		<i>UUC</i>	<i>UCC</i> serin	<i>UAC</i>	<i>UGC</i>	<i>C</i>	
		<i>UUA</i> leucin	<i>UCA</i>	<i>UAA</i> ochre	<i>UGA</i> opal	<i>A</i>	
		<i>UUG</i>	<i>UCG</i>	<i>UAG</i> amber	<i>UGG</i> tryptofan	<i>G</i>	
	<i>C</i>	<i>CUU</i> leucin	<i>CCU</i>	<i>CAU</i> histidin	<i>CGU</i>	<i>U</i>	
		<i>CUC</i>	<i>CCC</i> prolin	<i>CAC</i>	<i>CGC</i> arginin	<i>C</i>	
		<i>CUA</i>	<i>CCA</i>	<i>CAA</i> glutamin	<i>CGA</i>	<i>A</i>	
		<i>CUG</i>	<i>CCG</i>	<i>CAG</i>	<i>CGG</i>	<i>G</i>	
	<i>A</i>	<i>AUU</i> isoleucin	<i>ACU</i>	<i>AAU</i> asparagin	<i>AGU</i> serin	<i>U</i>	
		<i>AUC</i>	<i>ACC</i> treonin	<i>AAC</i>	<i>AGC</i>	<i>C</i>	
		<i>AUA</i>	<i>ACA</i>	<i>AAA</i> lysin	<i>AGA</i> arginin	<i>A</i>	
		<i>AUG</i> metionin	<i>ACG</i>	<i>AAG</i>	<i>AGG</i>	<i>G</i>	
	<i>G</i>	<i>GUU</i> valin	<i>GCU</i>	<i>GAU</i> asparát	<i>GGU</i>	<i>U</i>	
		<i>GUC</i>	<i>GCC</i> alanin	<i>GAC</i>	<i>GGC</i> glycin	<i>C</i>	
		<i>GUA</i>	<i>GCA</i>	<i>GAA</i> glutamát	<i>GGA</i>	<i>A</i>	
		<i>GUG</i>	<i>GCG</i>	<i>GAG</i>	<i>GGG</i>	<i>G</i>	

Tab. 4 Genetický kód. Nukleotidy molekuly ribonukleové kyseliny RNA jsou označeny začátečními písmeny příslušných bází *U*, *C*, *A*, *G*. Symbol *U* označuje uracyl, který v RNA stojí na místě, kde v odpovídající molekule DNA stojí thymin. Každá trojice bází kóduje určitou aminokyselinu nebo označuje počátek či ukončení syntézy proteinu.

Informace z lidské DNA je tedy přečtena. Další práce lidstvo ale čeká. Především je třeba dekódovat, co tato informace znamená. Zatím je znám smysl jen několika málo částí lidské molekuly DNA. Stanovením pořadí

jednotlivých písmen genetické abecedy v DNA a jejich interpretací se zabývá poměrně nový vědní obor – genomika, jež je součástí bioinformatiky.

5. Závěr

Po přečtení tohoto článku si čtenář jistě položí otázku, kde se takové složité molekuly, jaké mají nukleové kyseliny, a informační procesy s nimi spojené ve vesmíru vzaly. Došlo k tomu pravděpodobně následujícím způsobem.

V pozorovatelné části vesmíru je více než 10^{11} galaxií, z nichž každá obsahuje alespoň 10^{11} hvězd. Kolem hvězd obíhají menší tělesa (planety a jejich měsíce, planetky, komety) a na některých z nich panují podmínky vhodné pro život. Primitivní život na Zemi se objevil přibližně před 3,5 miliardami let,¹¹ o čemž svědčí četné paleontologické nálezy. Příroda tedy měla od okamžiku velkého třesku¹² přibližně 10 miliard let ($\approx 4 \cdot 10^{17}$ s) času na experimentování spojené se vznikem života. Dále je třeba si uvědomit, že povrch naší Země má zhruba 500 000 000 000 000 m², což, jak jistě uznáte, je nesmírně obrovská (bio)chemická laboratoř. Rozborem spekter z mezihvězdného prostoru bylo zjištěno, že ve vesmíru (mimo naši Zemi) existují některé aminokyseliny (např. glycin). Navíc nedávné experimenty ukazují, že při dopadu komet mohou aminokyseliny polymerovat v krátké bílkovinné řetězce. Přitom stačilo, aby vznikla nějaká *samoreplikující se* molekula, která se mutacemi mohla dále „zdokonalovat“. Darwinova evoluční teorie o vzniku druhů přírodním výběrem v konkurenčním prostředí (viz [3]) pak vysvětluje, proč vůbec existuje vyspělý život na naší planetě. Zájemcům o genetiku doporučujeme zejména knížky [2], [4], [5], [8], [11], [16], [17], [18].

Literatura

- [1] *Bateson, W.*: Mendel's principles of heredity Cambridge Univ. Press 1909.
- [2] *Cavalli-Sforza, L. L. – Bodmer, V. F.*: The genetics of human populations W. H. Freeman and Comp., San Francisco 1971.
- [3] *Darwin, Ch.*: On the origin of species by means of natural selection London 1859.
- [4] *Davies, K.*: Rozluštěný genom Paseka, Praha 2001.
- [5] *Dawkins, R.*: Sobecký gen Mladá fronta, Praha 1998.

¹¹Zatím však stále není zcela vyloučena ani možnost, že život mohl být na naši planetu zanesen odjinud z vesmíru.

¹²Stáří vesmíru se podle současných měření odhaduje na $13,5 \cdot 10^9$ let.

- [6] *Gamow, G.*: Possible mathematical relation between deoxyribonucleic acid and protein structures *Nature* 173, 1954, s. 318.
- [7] *Hardy, G. H.*: Mendelian proportions in a mixed population, *Science* 28, N 706 (1908), s. 49 – 50.
- [8] *Jokusch, H.*: Kód života, Orbis, Praha 1977.
- [9] *Johannsen, W.*: Die Elemente der exakten Erblchkeitslehre mit Grundzügen der Variationstatistik, Fischer, Jena 1909.
- [10] *Katrnoska, F. – Křížek, M.*: Genetický kód a teorie monoidů aneb 50 let od objevu struktury DNA, *Pokroky mat. fyz. astronom.* 48, 2003, s. 207 – 222.
- [11] *Lewis, K. R. – John, B.*: The matter of Mendelian heredity, Churchill, London 1964.
- [12] *Mendel, J. G.*: Versuche über Pflanzen-Hybriden, *Verh. naturforsch. Verein in Brünn*, N 4, 1866, s. 3 – 47.
- [13] *Morgan, T. H.*: The theory of the gene, Yale Univ. Press, New Haven, 1926.
- [14] *Nečas, O. – Šmarda, J. – Soška, J.*: Obecná biologie, Avicenum zem. nakl., Praha 1975.
- [15] *Orel, V.*: Gregor Mendel the first geneticist, Oxford Univ. Press 1996.
- [16] *Orel, V.*: Gregor Mendel a počátky genetiky, Academia, Praha 2003.
- [17] *J. D. Watson*: Molekulární biologie genů, Academia, Praha 1982.
- [18] *Watson, J. D.* Tajemství DNA, Academia, Praha 1995.
- [19] *Watson, J. D. – Crick, F. H. C.*: A structure for deoxyribose nucleic acid, *Nature* 171, 1953, s. 737 – 738.
- [20] *Weber, W. E.*: Mathematische Grundlagen der Genetik, VEB G. Fischer Verlag, Jena 1967.
- [21] *Weinberg, W.*: Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen, *Jahresber. Ver. vaterl. Naturk. in Württenbg.* 64, 1908, s. 368 – 372.

Praktická extrémální úloha o výrobě stanu

ŠEFKET ARSLANAGIĆ*)

Prirodno–matematički fakultet, Univerzita Sarajevo, BOSNA a HERCEGOVINA

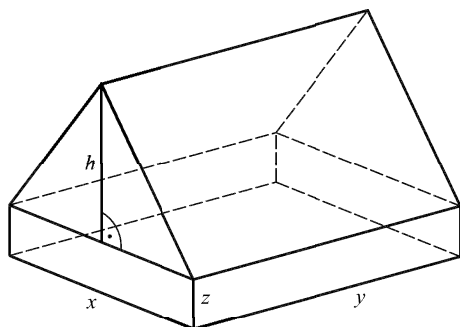
V tomto příspěvku uvedeme jedno řešení praktické úlohy o výrobě stanu užitím diferenciálního počtu. S prezentovanou metodou se mohou žáci středních škol setkat v samotném závěru bloku základního kurzu matematiky, popř. v učebnici [1].

*) Psáno pro MFI. Z německého originálu přeložil *Filip Švrček*.

Formulace problému

Jistá továrna má ve svém výrobním programu výrobu stanů téhož typu, viz obr. 1. Přitom bylo dohodnuto, že stan má mít následující parametry.

- a) Podstava stanů (z pogumované plachtoviny), má mít obsah je 4 m^2 .
- b) Výška stanů nemá být větší než $1,5 \text{ m}$.
- c) Celkový vnitřní prostor stanů musí být minimálně 4 m^3 .



Obr. 1

V této souvislosti si můžeme položit tuto zajímavou otázku: Jak vyrobit stan splňující výše uvedené parametry tak, aby jeho výroba byla co možná nejlevnější, tj. aby se na jeho výrobu celkově spotřebovalo co nejméně materiálu.

Někoho možná napadne, že stan, který by vyhovoval podmínkám úlohy, má rozměry $h = 0,5 \text{ m}$, $z = 1 \text{ m}$, $x = 2 \text{ m}$, $y = 2 \text{ m}$ (viz obr. 1). Snadno však lze spočítat, kolik materiálu na výrobu takového stanu spotřebujeme. Označíme-li P_1 obsah použité celoviny, pak platí formule

$$P_1 = xy + 2(xz + yz) + 2 \frac{xh}{2} + 2y \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}.$$

Použitím výše uvedených konkrétních hodnot tak dostaneme

$$P_1 \approx 17,47 \text{ m}^2.$$

Požadavky a) – c) pro výrobu jsou sice u takového stanu splněny, avšak zůstává nezodpovězena otázka, zda nelze vyrobit jiný stan, který by rovněž

vyhovoval našim požadavkům, a jehož výroba by byla levnější. Ukážeme, že takový stan skutečně existuje.

Řešení: Přeformulujme nejprve naše požadavky pro výrobu stanu do matematické podoby, tj. provedme matematizaci této situace. Současně tak (pro minimální, resp. maximální požadované hodnoty) musí platit

$$xy = 4; \quad z + h = 1,5; \quad xyz + \frac{xh}{2} \cdot y = 4.$$

Ze poslední podmínky plyne $xy(2z + h) = 8$. Využitím první podmínky tak dostáváme $2z + h = 2$, tedy $z = 0,5$ a $h = 1$.

Pro celkové množství materiálu, který na výrobu jednoho stanu spotřebujeme, pak platí

$$P = 4 + 2 \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right) + x + 2 \frac{4}{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}},$$

tj.

$$P = 4 + 2x + \frac{4}{x} + \frac{8}{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}.$$

Naším úkolem je nyní stanovit minimum funkce $P(x)$, která je definovaná pro libovolné kladné reálné x , kde

$$P(x) = 4 + 2x + \frac{4}{x} + \frac{8}{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}. \quad (1)$$

Pro 1. derivaci $P'(x)$ funkce $P(x)$ pak platí

$$P'(x) = 2 - \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + \frac{8}{x} \cdot \frac{x}{4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}},$$

tj.

$$P'(x) = 2 - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^2} \sqrt{4 + x^2} + \frac{4}{\sqrt{4 + x^2}}$$

a po úpravě

$$P'(x) = \frac{2x^2 \sqrt{4 + x^2} - 4 \sqrt{4 + x^2} - 4(4 + x^2) + 4x^2}{x^2 \sqrt{4 + x^2}}.$$

Užitím nutné podmínky pro nalezení lokálního extrému (zde lokálního minima) funkce $P(x)$ dospějeme k řešení rovnice $P'(x) = 0$ v oboru kladných reálných čísel. Dostaneme tak

$$2(x^2 - 2)\sqrt{4 + x^2} = 16,$$

tj.

$$4(x^2 - 2)^2(4 + x^2) = 256.$$

Po úpravě tak obdržíme algebraickou rovnici 6. stupně

$$x^6 - 12x^2 - 48 = 0.$$

K tomu, abychom určili její kladné reálné kořeny, je nutno vyšetřit průběh funkce

$$f(x) = x^6 - 12x^2 - 48.$$

pro kladná reálná x . Platí

$$f'(x) = 6x^5 - 24x = 6x(x^2 - 2)(x^2 + 2),$$

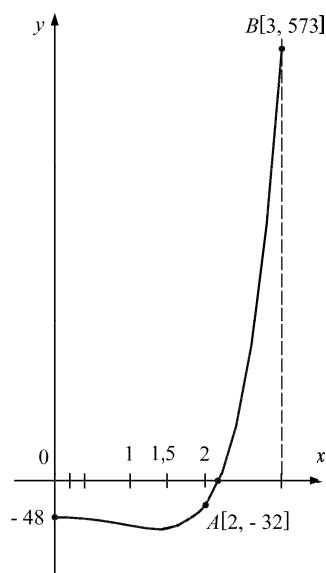
a tedy

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{pro } x \in (0; \sqrt{2}), \\ = 0 & \text{pro } x = \sqrt{2}, \\ > 0 & \text{pro } x \in (\sqrt{2}; +\infty). \end{cases}$$

Odtud plyne, že na intervalu $(0; \sqrt{2})$ je funkce $f(x)$ klesající, a na intervalu $(\sqrt{2}; +\infty)$ je naopak rostoucí. Pro $x = \sqrt{2}$ nabývá tedy $f(x)$ své nejmenší hodnoty, tzn. $\min\{f(x)\} = f(\sqrt{2}) = -64$. Dále také platí, že $f(2) = -32 < 0$ a $f(3) = 573 > 0$. Navíc, funkce $f(x)$ je sudá a její průběh pro nezáporné hodnoty x je znázorněn na obr. 2.

Je zřejmé, že funkce $f(x)$ má pro kladné hodnoty proměnné x právě jeden nulový bod, který leží uvnitř intervalu $(2; 3)$. Dále určíme jeho hodnotu x_0 . Danou úlohu je však nutno řešit užitím přibližných metod. Při užití metody sečen (metoda *regula falsi*) je nutno vyjádřit rovnici sečny AB grafu funkce (obr. 2). Platí

$$y - 573 = \frac{573 + 32}{3 - 2} (x - 3).$$



Obr. 2

Položíme-li $y = 0$ v posledním vztahu, obdržíme hodnotu první aproximace x_1 hledaného nulového bodu uvažovaného polynomu. Platí

$$x_1 \approx 2,05.$$

Celý postup nyní zopakujeme; místo bodu A uvažujeme však bod $A_1[x_1; f(x_1)]$ atd. Po několika krocích tak dostaneme aproximaci bodu x_0 s požadovanou přesností. V našem případě se spokojíme s přesností na dvě desetinná místa, tj.

$$x_0 = 2,17.$$

Protože ale platí $x_0 y_0 = 4$, máme

$$y_0 = 1,84,$$

a z (1) pak plyne

$$P_{\min} = P(x_0) = 15,62 \text{ m}^2.$$

Porovnáme-li P_1 a $P_{\min}$, zjistíme, že při výrobě jednoho stanu jsme tak ušetřili $1,85 \text{ m}^2$. Vidíme tedy, že první volba nebyla zdaleka tak ideální,

jak by se na první pohled mohlo zdát. Na závěr si zkuste představit, kolik materiálu tak ušetříme například při výrobě 1 000 stanů!

L i t e r a t u r a

- [1] *Hrubý, D. – Kubát, J.:* Matematika pro gymnázia (diferenciální a integrální počet), Prometheus, Praha 1997.

54. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

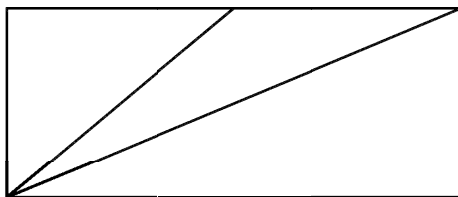
Kladné desetinné číslo nazveme *vyvážené*, jestliže je součet číslic ležících před desetinnou čárkou roven součtu číslic za desetinnou čárkou. Např. číslo 25,133 je vyvážené. Napiš

- nejmenší,
- největší vyvážené číslo, jehož žádné dvě číslice nejsou stejné.

(S. Bednářová)

Z6–I–2

Obdélník jsme rozdělili na tři trojúhelníky jako na obrázku. Odměřili jsme všechny vnitřní úhly v těchto trojúhelnících a získali následující hodnoty: 20° , 30° , 30° , 40° , 50° , 60° , 90° , 90° a 130° . Dopiš je na správná místa v obrázku. (Pozor, obrázek může být nepřesný, nevyplatí se měřit.)



(S. Bednářová)

Z6–I–3

V zemi „Číselkovo“ žijí jen přirozená čísla. Muži a chlapci jsou sudá čísla, ženy a dívky jsou lichá čísla. Manželé mají ihned po svatbě děti, a to všechna čísla, která dělí jejich součin beze zbytku. Kterého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrat slečna Sedmička, jestliže chce mít

- a) co nejvíce dětí,
- b) stejný počet dcer jako synů?

(*M. Dillingerová*)

Z6–I–4

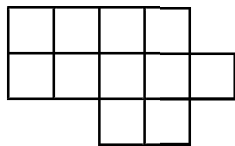
Na kartičce mám napsané sudé čtyřmístné číslo. Rozstřihnu ji tak, že získám dvě dvojmístná čísla, jejichž součin je 2 562. Které čtyřmístné číslo jsem měla napsané na kartičce?

(*M. Raabová*)

Z6–I–5

Na obrázku je mnohoúhelník složený z jedenácti stejných čtverečků.

- a) Zjistí jeho obvod, jestliže víte, že jeden malý čtvereček má obvod 2 cm.
- b) Které dva čtverečky mnohoúhelníku je nutno přemístit, aby vznikl nový mnohoúhelník s co největším obvodem?



(*S. Bednářová*)

Z6–I–6

V Petříkově, Boříkově a Tomíkově žije celkem 6 000 obyvatel. V každé z těchto tří vesnic připadá v průměru na 20 obyvatel 1 pes a na 30 obyvatel 1 kočka. V Petříkově a Boříkově žije celkem 234 psů, v Boříkově a Tomíkově žije celkem 92 koček. Kolik obyvatel mají jednotlivé vesnice?

(*Š. Ptáčková*)

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Vendelín zavřel do bedny všechna dvojmístná čísla, která při dělení pěti dávají zbytek 3, avšak na jedno z nich zapomněl. Když čísla v bedně správně sečetl, dostal součet 911. Na které číslo zapomněl?

(L. Hozová)

Z5–I–2

Andulka a Maruška měly sraz přesně v 17:30 před kinem. Andulka si myslela, že jí jdou hodinky o 4 minuty napřed, ale ve skutečnosti se jí zpožďovaly o 8 minut. Maruška si myslela, že se jí hodinky o 8 minut zpožďují, ale šly jí o 4 minuty napřed. Kdy která z dívek přišla na sraz, jestliže si obě myslely, že přišly přesně v 17:30?

(Š. Ptáčková)

Z5–I–3

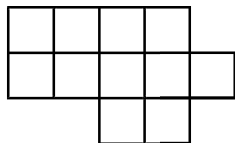
Tři bratři princové šli na mnohohlavého draka. První princ mu levou rukou usekl polovinu hlav a pravou rukou ještě další dvě. Totéž udělali se zbylými hlavami druhý a třetí princ. Potom drak padl. Na kolikahlavého draka se princové vydali?

(Š. Ptáčková)

Z5–I–4

Na obrázku je mnohoúhelník složený z jedenácti stejných čtverečků.

- Zjistí jeho obvod, jestliže víš, že jeden malý čtvereček má obvod 2 cm.
- Které dva čtverečky mnohoúhelníku je nutno ubrat, aby vznikl nový mnohoúhelník s co největším obvodem?



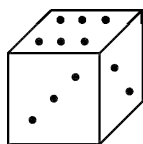
Namaluj aspoň jedno řešení.

(S. Bednářová)

Z5–I–5

Hrací kostka má puntíky rozmístěny tak, že jejich součet na protilehlých stěnách je vždy 7. Kostka na obr. 1 stojí na stěně s jedním puntíkem, takže na podložce zanechá otisk 1. Když převalíme kostku doprava na stěnu se dvěma puntíky, zanechá na podložce otisk 2. Když pak převalíme kostku směrem k sobě, zanechá otisk 3. Při tomto valení dostaneme stopu na obr. 2. Součet čísel této stopy je 6. Jestliže výchozí postavení kostky je na obr. 1,

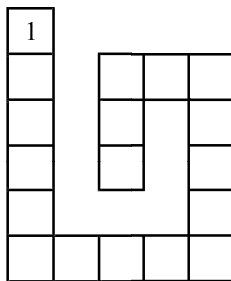
- jaký bude součet na stopě na obr. 3?
- Jak bude vypadat stopa, na níž je součet 22?



Obr. 1



Obr. 2

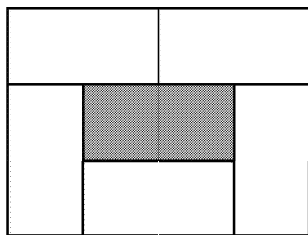


Obr. 3

(L. Hozová)

Z5–I–6

Ivanka si staví z kostek komíny. Všechny kostky jsou stejné a mají rozměry 1 cm, 1 cm a 2 cm. Teď postavila jednopatrový dutý komín z pěti kostek na ploše 12 cm^2 (viz obr.). Rozhodla se ale, že postaví dutý komín na ploše 36 cm^2 z 260 takových kostek. Jaký nejvyšší komín mohla postavit, jestliže jí žádná kostka nezbyla a komín byl nahoře rovný?



(Š. Ptáčková)

Zajímavé matematické úlohy

Naše pravidelná rubrika zahajuje již 12. ročník své existence. Byla založena v roce 1993 z podnětu tehdejšího redaktora pro matematiku *Stanislava Židka* a po dobu prvních jedenácti let její existence se o ni nepřetržitě staral současný redaktor pro matematiku *Jaroslav Švrček*. Od nového ročníku však dochází ke změně, když garanci za chod této rubriky přebírá *Pavel Calábek*. Současně upozorňujeme naše čtenáře, že všechny další náležitosti, týkající se uvedené rubriky, zůstávají v platnosti.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2004 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 111

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C . Určete, jaké jsou velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a B , prochází-li osa vnitřního úhlu při vrcholu B středem těžnice z vrcholu C .

Jaroslav Švrček

Úloha 112

Na stole leží jeden list papíru, na němž je napsáno číslo 2. V každém kroku vezmeme libovolný jeden *díl* papíru (za *díl* považujeme i původní list), který leží na stole. Je-li na něm napsáno číslo k , vymažeme je a tento *díl* rozstříháme na k menších *dílů*. Na každý z nich pak napíšeme číslo $k + 1$ a položíme jej zpět na stůl.

Zjistěte, pro která přirozená čísla n nelze tímto způsobem získat na stole n *dílů* papíru.

Pavel Calábek