

Na závěr 21. ročníku MFI

Končí 21. ročník časopisu Matematika – fyzika – informatika a současně končí i jeho tradiční podoba tištěného periodika. Od 22. ročníku bude časopis vycházet jako periodikum internetové, dostupné na dvou adresách uvedených na obálce časopisu. Mění se také termín a periodicitu jednotlivých čísel MFI. Časopis už nebude podřízen organizaci školního roku a 1. číslo následujícího ročníku vyjde v lednu 2013.

Časopis Matematika-fyzika-informatika vznikl jako pokračovatel řady didaktických časopisů, jako byla Matematika ve škole, Přírodní vědy ve škole, Fyzika ve škole. Přímou vazbu má na poslední z těchto časopisů, kterým byla Matematika a fyzika ve škole, jejíž vydávání skončilo 4. číslem 21. ročníku v roce 1990. Časopis MFI tak vlastně ze všech těchto časopisů vycházel v tradiční papírové podobě nejdéle.

Rozhodujícím momentem znovuoobnovení tolik potřebného didaktického časopisu v roce 1991 byla vstřícnost tehdejší redakce matematiky a fyziky SPN, ze které se v roce 1993 konstituovalo dnešní úspěšné nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. Situace se do jisté míry opakuje i nyní, kdy se vedení nakladatelství rozhodlo podpořit finančně vznik internetového časopisu a tak časopis bude bezplatně dostupný všem zájemcům.

Redakce časopisu děkuje všem autorům, kteří se na tvorbě časopisu svými příspěvky podíleli, a věří, že se budeme i nadále s jejich články setkávat v dalších ročnících MFI. Zvláštní dík patří *doc. RNDr. Stanislavu Trávníčkovi, CSc.*, který po celou dobu existence časopisu aktivně vykonával funkci redaktora pro informatiku, a nyní požádal o uvolnění z této funkce (viz příspěvek na s. 630). Naše poděkování patří i všem dalším spolupracovníkům redakce, kteří zejména zajišťovali technické zpracování tiskové předlohy časopisu a jeho distribuci. Velmi si vážíme početné obce našich čtenářů ze všech typů škol, pro něž bude elektronický časopis možná dostupnější než v tradiční podobě. Na internetové stránky je přenesen archiv časopisu, kde jsou od 15. ročníku uloženy ve formátu pdf všechny příspěvky hlavních rubrik a redakce hodlá archiv dále rozšiřovat.

Přejeme všem čtenářům, autorům a spolupracovníkům pěkné prázdniny a těšíme se na setkání na webových stránkách 22. ročníku MFI.

Redakce

Interpolační polynomy v úlohách

PETR KASAL

Škoda Auto Vysoká škola, Mladá Boleslav

V současné době výuka matematiky na SŠ obvykle téměř vůbec nezasahuje do problematiky numerických metod řešení úloh. Zajímavé přitom je, že už v roce 1966 u nás vyšla učebnice pro SVVŠ (I. a II. ročník) [4], která se problematikou numerických výpočtů docela podrobně zabývá. Jak je tomu dnes, kdy kvalita a rozšíření počítačové techniky od té doby výrazně pokročila?

V nižších ročnících na střední škole se žáci postupně seznamují v různých kapitolách s několika způsoby, jak nalézt předpis funkce, která prochází dvěma body (přímka) nebo třemi body (například parabola). V obou případech se jedná o situaci, kdy hledaná rovnice má tvar polynomu (prvního resp. druhého stupně). Jak ovšem postupovat v případě, že počet předepsaných bodů, kterými funkce prochází, je větší než tři? Tato problematika (tzv. interpolace) nachází poměrně široké uplatnění v různých oborech (například počítačová grafika nebo statistika). V článku nastíníme některé možnosti, jak lze pojem interpolace přiblížit studentům vyšších ročníků na střední škole (například v rámci speciálního semináře) a dále zobecníme některé poznatky, s nimiž se při výuce již setkali.

Interpolace je nejen účinným nástrojem numerické analýzy, ale lze ji efektivně využít také při řešení obtížnějších úloh – například v některých matematických soutěžích.

Chceme-li najít funkci, která je určena svými funkčními hodnotami v $n + 1$ různých bodech $x_0, x_1, \dots, x_n$ (v *uzlech*) svého definičního oboru, hovoříme o tzv. interpolaci této funkce. Ta může být různého typu: polynom, racionální funkce, trigonometrická funkce, exponenciální funkce atd. Nejčastější a nejjednodušší je najít předpis polynomicke funkce. V takovém případě hovoříme o *polynomicke interpolaci* neboli *interpolaci polynomem*.

Lze dokázat, že pro každou skupinu takto zadaných $n + 1$ bodů (s různými x -ovými souřadnicemi) existuje právě jeden polynom uvažovaného tvaru stupně nejvýše n . Jedním ze způsobů jeho vyjádření je tzv. *Lagrangeův tvar interpolačního polynomu*.

Věta (Lagrangeova)

Je dáno $n + 1$ bodů $A_i[x_i, y_i] \in \mathbb{R}^2$, kde $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ a pro všechna $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ platí $x_i \neq x_j$. Potom existuje právě jeden polynom $f(x)$ ¹ stupně nejvýše n , pro který platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \\ &+ y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots \\ &\dots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}, \end{aligned} \quad (1)$$

který prochází všemi danými body $A_i[x_i, y_i]$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že polynom $f(x)$ prochází každým z bodů $A_i[x_i, y_i]$, kde $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Uvažujme výraz

$$\begin{aligned} &\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dosadíme-li do (2) za $x = x_i$, je evidentní, že bude nabývat hodnoty 1, pro ostatní $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ bude nulový. Proto interpolační polynom (1) nabývá v každém uzlovém bodě x_i hodnoty y_i .

Nyní dokážeme, že je tento polynom určen jednoznačně. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují dva různé takové polynomy

¹tzv. Lagrangeův interpolační polynom

$f(x) \neq g(x)$ stupně nejvýše n . Potom existuje polynom $p(x) = f(x) - g(x)$, který je nenulový, nejvýše n -tého stupně. Protože pro všechny uzly x_i platí $f(x_i) = g(x_i) = y_i$, tak polynom $p(x)$ má v každém uzlu x_i nulovou hodnotu, tedy má $n + 1$ různých nulových bodů. To je ovšem spor s důsledky základní věty algebry (polynom n -tého stupně s reálnými koeficienty má nejvýše n nulových bodů). Tím je důkaz proveden.

V další části ukážeme některé jednodušší aplikace uvedeného výsledku.

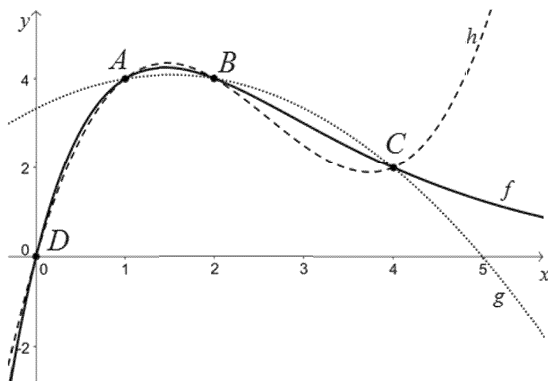
Příklad 1

Užitím formule (1) určete rovnici přímky p , která prochází body $A[-2; 7]$ a $B[1; 1]$.

Řešení. Hledejme rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru $p : y = kx + q$. Pravá strana rovnice je polynom prvního stupně, který lze psát ve tvaru (1):

$$p : y = 7 \cdot \frac{x - 1}{-2 - 1} + 1 \cdot \frac{x - (-2)}{1 - (-2)} = -\frac{7}{3}x + \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = -2x + 3.$$

Tato úloha byla jen ilustrační, samozřejmě víme, že ji můžeme vyřešit jednodušším způsobem. Obdobně lze postupovat při hledání polynomů, které procházejí třemi, čtyřmi nebo i více body, jak uvidíme v další úloze. Zároveň můžeme (na obr. 1) sledovat, jak grafy polynomů z následující úlohy odpovídají funkci $f : y = 8x/2^x$, jejíž graf prochází stejnými uzlovými body.



Obr. 1

Příklad 2

Určete Lagrangeovy interpolační polynomy druhého (resp. třetího stupně), které procházejí těmito body:

a) $A[1; 4]$, $B[2; 4]$, $C[4; 2]$,

b) $A[1; 4]$, $B[2; 4]$, $C[4; 2]$, $D[0; 0]$.

Řešení.

Užitím vztahu (1) dostaneme postupně v jednotlivých případech:

a)

$$\begin{aligned} g(x) &= 4 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \\ &= -\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

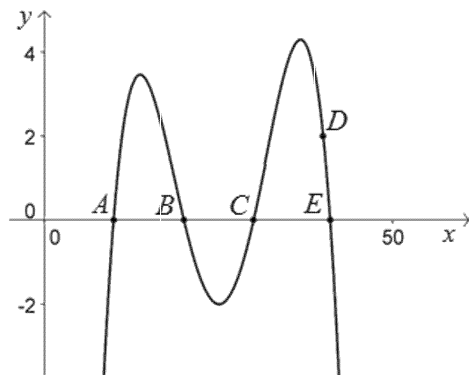
b)

$$\begin{aligned} h(x) &= 4 \cdot \frac{(x-2)(x-4)(x-0)}{(1-2)(1-4)(1-0)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-4)(x-0)}{(2-1)(2-4)(2-0)} + \\ &+ 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-0)}{(4-1)(4-2)(4-0)} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = \frac{5}{12}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{41}{6}x. \end{aligned}$$

Příklad 3

Najděte Lagrangeův interpolační polynom, který prochází body $A[10; 0]$, $B[20; 0]$, $C[30; 0]$, $D[40; 2]$, $E[41; 0]$.

Na této úloze chceme názorně ukázat (obr. 2), že interpolační polynom může za určitých okolností vykazovat zejména v okolí krajních uzlů „nepatříčné kmitání“. Úloha je již poměrně pracná a zdlouhavá a bylo by dobré uvažovat o vhodném využití počítačové podpory při jejím zpracování. Například je možné použít webové aplikace MAW – Matematické výpočty online nebo Wolfram alpha. Hledat interpolační polynomy umí i program Geogebra. Nabízí se i možnost potrápit žáky zpracováním tohoto problému v programu Excel nebo použít některý specializovaný statistický software (např. Statgraphics).



Obr. 2

Řešení. Dosazením do formule (1) a postupnými úpravami dostaneme

$$f(x) = \dots = -\frac{1}{3000}x^4 + \frac{101}{3000}x^3 - \frac{89}{75}x^2 + \frac{511}{30} - 82.$$

Na závěr vyřešíme následující (obtížnější) úlohu .

Příklad 4

Jsou dány body $A[1; 1]$, $B[2; 2]$, $C[3; 4]$, $D[4; 8]$, $E[5; a]$. Určete, jakých hodnot může nabývat reálné číslo a tak, aby těmito body procházel polynom nejvýše 4. stupně, který má pro $x \rightarrow +\infty$ limitu $+\infty$.

Řešení. Stačí si uvědomit, že o limitě polynomicke funkce rozhoduje výhradně člen s nejvyšším exponentem. Požadujeme-li, aby limita byla $+\infty$, musí být tento člen kladný. Je tedy potřeba hledat takové a , aby polynom byl buď 4. stupně s kladným koeficientem u x^4 nebo 3. stupně (pokud je ovšem jeho koeficient u x^3 kladný). Snadno se lze přesvědčit, že nižšího stupně být nemůže.

Předpokládejme, že polynom je 4. stupně, a pokusme se obecně vyjádřit koeficient s nejvyšším exponentem. Využijeme toho, že polynom je s ekvidistantními uzly $x_k = k$. Polynom (1) tedy lze upravit na tvar

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-j}{i-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^n y_i \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-i+1) \cdot (x-i-1) \cdot \dots \cdot (x-n)}{i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(n-i))}.$$

Koeficient s nejvyšším exponentem má proto hodnotu

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n y_i \frac{1}{i!(n-i)!(-1)^{n-i}} &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n y_i \frac{n!}{i!(n-i)!(-1)^n(-1)^i} = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot y_i \cdot \binom{n}{i}. \end{aligned}$$

Tento koeficient má být kladný (popř. nezáporný) a v našem případě je $n = 4$. Proto

$$= \frac{(-1)^4}{4!} \sum_{i=0}^4 (-1)^i \cdot y_i \cdot \binom{4}{i} \geq 0,$$

a tedy

$$\binom{4}{0} \cdot 2^0 - \binom{4}{1} \cdot 2^1 + \binom{4}{2} \cdot 2^2 - \binom{4}{3} \cdot 2^3 + \binom{4}{4} \cdot a \geq 0.$$

Dále s využitím binomické věty získáme

$$(2-1)^4 - 2^4 + a \geq 0,$$

$$a \geq 15.$$

Zbývá ověřit, že pro $a = 15$ má polynom 3. stupně kladný koeficient u x^3 .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^3 y_i \prod_{j=0, j \neq i}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \end{aligned}$$

$$+4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 8 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x.$$

Závěr. Zadání úlohy vyhovují všechna reálná čísla $a \geq 15$.

Literatura

- [1] *Andreescu, T. – Dospinescu, G.*: Problems From the Book, XYZ Press 2010.
- [2] *Felcman J.*: Numerická matematika, KNM PRESS, Praha 2007.
- [3] *Příkrýl, P.*: Numerické metody matematické analýzy. SNTL, Praha 1988.
- [4] *Vlach, M. – Kyncl, Z.*: Numerické výpočty pro I. a II. roč. SVVŠ. SPN, Praha 1988.
- [5] *Fiedler, M. – Vrba, A.*: Základní numerické metody pro III. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku. SPN, Praha 1988.

Pomocník pro učitele geometrie – automatické vyhodnocování konstrukčních úloh

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Možnosti navrženého systému

Nedílnou součástí výuky planimetrie je řešení konstrukčních úloh. Ty jsou pro mnohé žáky velkým problémem nejen proto, že jsou spojené s rýsováním, ale zejména proto, že úspěšnost vyžaduje jistou zkušenost, získanou až vyřešením většího počtu úloh. Je známo, že největší efekt přinášejí úlohy, které žáci vyřeší sami, s tím jsou ale spojeny obtíže na straně žáků i na straně učitele.

Pro učitele je zadávání a zejména kontrola správnosti odevzdaných řešení obtížná a časově náročná. Pro žáky je zase důležité, aby se o případné

chybě ve svém řešení dozvěděli co nejdříve a hlavně aby dostali příležitost chybný krok nalézt a opravit. A pokud opravené řešení stále nebude správné, aby dostali další příležitost. Tento požadavek je ovšem při stávající podobě domácích úkolů na papíře, které žák dnes vyřeší, zítra odevzdá a třetí den se dozví hodnocení, těžko splnitelný.

Vedení snahou odstranit uvedené problémy jsme vytvořili systém (nazvaný GeoTest, viz [4]), který umožňuje žákům po provedeném rozboru zadané konstrukční úlohy realizovat vlastní konstrukci online a okamžitě získat informaci o správnosti provedeného řešení. To jim umožní, aby své řešení bezprostředně přehodnotili a případně ihned (nebo i kdykoliv později) opravili. Úlohy mohou žáci řešit či opravovat opakovaně.

Systém má oddělené prostředí pro žáky a pro učitele. Poté, co se žák přihlásí, vidí na displeji seznam zadaných úloh, které pak samostatně řeší v prostředí GeoGebra appletu a ihned po odevzdání řešení dostává jeho hodnocení, tak, jak je vidět na obr. 1.

Pro učitele je připraveno prostředí, ve kterém zadávají úlohy a sledují postup řešení svých žáků. Učitel zařadí zvolené úlohy do *skupin*, které pak tvoří vždy jeden úkol (celek). Pro vyřešení úloh *skupiny*, která zpravidla obsahuje několik úloh, stanoví učitel časový limit.

The screenshot displays the GeoTest web application interface, which is divided into two main sections: a problem-solving area on the left and an evaluation area on the right.

Problem-Solving Area (Left):

- Úloha 16: Trojúhelník AB, tc, a**
- Skupina: 42: G**
- Odevzdat ostatním řešení** (20x)
- Text of the problem:** "Sestrojte chybějící vrcholy všech trojúhelníků se stranou AB, těžištěm na stranu c—AB délkou tc a délkou strany a. Pokud je takových trojúhelníků více, označte sestrojené vrcholy postupně C1, C2, ... Sestrojte všechna řešení, v obou polovinách."

Pokud se Vám opakovaně nedaří vyřešit úlohu správně, podívejte se, zda neděláte některou z častých chyb:
- Tools:** A set of geometric construction tools (compass, ruler, etc.) is visible.
- Diagram:** A geometric diagram showing a circle and points A, B, C1, C2, and a line segment AB. A point tc is marked on the line segment AB.
- Wanted objects (Výsledky):**
 - A = (4.32, 1.54)
 - B = (1.56, 2.17)
 - a = 4
 - tc = 3.2
 - Znalejší rovnice:
 - C1 = (4.22, 3.09)
 - C2 = (4.1, 2.87)
 - C3 = (0.92, 4.83)
 - c = (x - 0.62) * (y - 1.83)
 - d = (x - 1.56) * (y - 2.17)

Evaluation Area (Right):

- GeoTest** logo
- Vyhodnocení úlohy**
- Skupina: 42: G**
- Úloha: 16: Trojúhelník AB, tc, a**
- Chybně** (Incorrect)
- Výborně** (Excellent)
- Text of the evaluation:** "Návod: GeoGebra - Konstrukce a ověření. Návod: Časté chyby a jak je řešit. Úlohy správně. (C) Šarka & Tom, 2011"

Obr. 1 Prostředí pro řešení úloh a vyhodnocení řešení

Zadávané úlohy jsou většinou polohové. Systém GeoTest vyhodnotí jako správný každý regulérní, obecně platný postup řešení úlohy. Při řešení úloh v tomto systému neprocvičujeme u žáků grafické dovednosti, ale výhradně logickou správnost a přesnost navrženého algoritmu řešení.

Připravené úlohy

Učitelé mohou úlohy vybírat z úloh připravených (a otestovaných) autory systému (nemohou však sestavovat další vlastní úlohy). Výběr úloh ukazuje obr. 2. Aktuálně systém GeoTest obsahuje 200 úloh. Připravené úlohy můžeme podle obtížnosti rozdělit do několika kategorií.

První kategorií jsou *cvičné úlohy*, zaměřené na ověření schopností žáků konstruovat v systému GeoGebra. Nejde tedy o klasické konstrukční úlohy, kde je třeba provést rozbor a navrhnout logicky správný postup konstrukce.

Zadané úlohy			
Vyřadit	V	1 Střed dvou bodů (na vyzkoušení)	C_0 Prohlédnout
Sestrojte bod V jako střed úsečky AB .			
Vyřadit	V	103 Střed vepsané kružnice ()	PL_Z1_TB_S Prohlédnout
Sestrojte střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC .			
Vyřadit	V	1004 Kružnice (S, r) (úvodní úloška na ovládání)	C_0 Prohlédnout
Sestrojte kružnici k se středem S a poloměrem r .			
Vyřadit	V	1003 Kolmice (úvodní úloška na ovládání)	C_0 Prohlédnout
Bodem P vezměte přímku k kolmou k přílince m .			
Vyřadit	V	1006 Osa úsečky (úvodní úloška na ovládání)	C_0 Prohlédnout
Sestrojte osu o úsečky AB .			
Vyřadit	V	1007 Osa úhlu (úvodní úloška na ovládání)	C_0 Prohlédnout
Sestrojte osu o úhlu BAC .			
Vyřadit	V	90 Opsaná kružnice (základní úloha o kružnici)	PL_Z_TB_S Prohlédnout
Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku ABC . Pojmenujte ji c .			
Nezadané úlohy			
Jméno: Atributy: Filt			
Přidat	1z	Střed dvou bodů (na vyzkoušení)	C_0 0x Prohlédnout
Sestrojte bod V jako střed úsečky AB .			
Přidat	3	Třetiny ()	PL_S1_Z2_K 11x Prohlédnout
K bodům A a B sestrojte body C a D , které dělí úsečku AB na třetiny. Bod C bude blíže k bodu A , než bod D .			
Přidat	5	Přejmenování bodu (úvodní úloška na ovládání)	C_B 13x Prohlédnout
Změňte jméno bodu A tak, aby se jmenoval N .			
Přidat	6	Čtverec ()	C_PL_Z1_S1 18x Prohlédnout
K bodům A a B sestrojte body C a D , které budou tvořit vrcholy čtverce $ACBD$.			
Přidat	6z (Z)	Čtverec ()	C_PL_Z1_S1 0x Prohlédnout
K bodům A a B sestrojte body C a D , které budou tvořit vrcholy čtverce $ACBD$.			
Přidat	9	Kružnice(Střed, Bod) (úvodní úloška na ovládání)	C_B 23x Prohlédnout
Sestrojte kružnici c se středem v bodě A procházející bodem B .			
Přidat	11z (Z)	Vrchol rovnoběžníku ()	PL_Z_PR1 0x Prohlédnout
Sestrojte chybějící vrchol D rovnoběžníku $ABCD$.			
Přidat	13	Vrcholy kosočtverce ()	PL_Z1_S1 15x Prohlédnout
Sestrojte chybějící vrcholy B, D kosočtverce $ABCD$. Úsečka a udává délku strany.			

Obr. 2 Prostředí, v němž učitel vybírá úlohy

Cílem těchto úloh je seznámit žáky s principy řešení úloh v systému a s konstrukčními nástroji, které jsou v GeoGebře k dispozici. Předpokládá se, že žáci budou úlohy řešit právě přímým využitím nabízených nástrojů, nikoliv striktně „pravítkem a kružítkem“. Při zvoleném postupu je podstatné, aby žáci zjistili, že úlohy je třeba řešit obecně tak, aby řešení zůstalo správné i při změně polohy či výchozí hodnoty zadaných prvků. Zadanými prvky je možno v appletu pohybovat, a tím částečně kontrolovat správnost použitého postupu. Z didaktického pohledu je důležité, aby řešitel přesně dodržel zadání a podmínky úlohy, včetně správného pojmenování výstupních prvků konstrukce. Žák musí pečlivě přečíst zadání a správně mu porozumět. Žádná chyba není „nepodstatná“, při nedodržení podmínek systém ohlásí chybu. Tu je možno ihned opravit. Pokud opravdu jde o chybu z nepozornosti, opraví ji žáci obvykle snadno. Opravit ji však musí, jinak systém nepovažuje úlohu za vyřešenou².

Druhou kategorií jsou typické *konstrukční úlohy*, které mají rozdílnou obtížnost. Počínaje úlohami, které procvičují učivo ZŠ – které by měly být (ale mnohdy nejsou) samozřejmým základem pro středoškoláky – přes *základní úlohy o mnohoúhelnících a kružnicích* až po úlohy obtížnější, které vyžadují důsledný rozbor a precizní logickou úvahu. U každé úlohy navíc učitel vidí kromě slovního zadání i doplňující údaje: jednak atributy, které určují typ, cílovou skupinu a obtížnost úlohy (podrobněji viz <http://drupal.geometry.cz/geotest-ulohy>), jednak číselný údaj, který udává, kolikrát tuto úlohu již učitelé použili – tj. zařadili do nějakého úkolu.

V úlohách se požaduje sestavit vyjmenované prvky (například chybějící vrchol trojúhelníku, kružnici, přímku), přičemž v zadání je vždy uvedeno, zda se požaduje konstrukce všech řešení či libovolného z možných řešení. Zadané prvky je možno dynamicky přemísťovat, pokud se tím nezmění počet řešení dané úlohy. Řešení úlohy přitom musí zůstat správné, musí tedy být dostatečně obecné. Právě v tom může spočívat úskalí některých úloh a je velmi užitečné, aby si učitel zadané úlohy nejprve sám vyzkoušel (to systém umožňuje) a přesvědčil se o tom, že vybraná úloha je pro zamýšlený úkol vhodná.

Třetí kategorii tvoří některé základní, rutinní úlohy z *deskriptivní geometrie* či *kinematiky*. Takové úlohy jsme zatím vytvořili jen jako ukázkové.

²Na možné problémy při řešení úloh upozorňují dva návodné texty, na něž vede ze stránek systému přímý odkaz. První z nich stručně vysvětluje základní principy konstruování v GeoGebře, druhý vysvětluje nejčastější chyby, kterých se řešitelé úloh dopouštějí.

V budoucnu uvažujeme o jejich dalším rozšíření, bude-li o ně mezi učiteli zájem.

Příklad využití systému v hodinách planimetrie

V následujícím textu uvádíme (na ukázkou) možné vzorové využití systému ve výuce planimetrie. Odpovídá kurzu planimetrie v prvním ročníku střední školy. Úvodní části navrženého postupu je možno využít při práci se žáky základní školy. Z poměrně široké nabídky nabízených úloh je pochopitelně možné vytvořit – podle záměru učitele – jiné postupy a sady úloh.

Procvičení práce s GeoGebrou

Podle zkušeností vlastních i zkušeností kolegů, kteří systém GeoTest využili, navrhujeme nejprve zadat skupinu úloh zaměřených na ovládání systému GeoGebra. Pokud žáci dosud program GeoGebra³ neznají, je (v rámci výuky) vhodné nejprve prostředí programu prozkoumat a společně provést několik jednoduchých konstrukcí. Poté je již možné představit žákům systém GeoTest, nechat je přihlásit se do systému a ještě ve vyučovací hodině vyřešit několik jednodušších úloh. Obvykle přitom narazíme na nejčastější chyby a problémy, které můžeme ihned vysvětlit. Není nutné, aby žáci měli program GeoGebra na svých počítačích nainstalován. Pracují pouze v jeho specifickém prostředí – v GeoGebra Appletu.

Ukázka využití ve výuce

1. navrhovaná sada úloh: 1, 4, 7, 9, 1002, 1004.

Jedná se o sadu cvičných úloh, konkrétně: konstrukci středu úsečky, sestrojení přímky určené dvěma body, průsečíků, kružnice dané středem a bodem, vedení rovnoběžky bodem a zejména sestrojení kružnice s daným středem a poloměrem určeným hodnotou proměnné – správné interaktivní řešení vyžaduje zadání nikoliv okamžité hodnoty parametru, ale proměnné (výrazu).

Poté je vhodné zadat žákům navazující sadu úloh určenou pro samostatnou domácí práci. Kromě procvičení práce s GeoGebrou a zautomatizování postupů při přihlašování do systému a odesílání úloh k vyhodnocení

³Pro práci s GeoGebrou lze najít velké množství inspirativních didaktických materiálů ve zdrojích [1] a [2], jako učebnice pak může posloužit [3].

ověříme, zda nemají žáci nějaké technické problémy se zobrazením java-appletů či s povolováním zobrazování stránek prohlížečem.

2. navrhovaná sada úloh: 8, 14, 1003, 1005, 1006, 1007, 1010.

V této sadě řešíme úlohy na konstrukci rovnostranného trojúhelníku, rovnoběžky v dané vzdálenosti, kolmice z bodu, kružnice nad průměrem, osy úsečky a úhlu, těžko dostupných průsečíků.

Navrhovaný čas na řešení: několik dnů, nejdéle do plánovaného začátku využití systému k řešení konstrukčních úloh.

Používáme-li systém pouze k ověření schopností žáků pracovat s GeoGebrou a nemíníme bezprostředně pokračovat řešením konstrukčních úloh, vytvoříme sadu úloh ze zbývajících úloh s atributem *C* (cvičné úlohy). Na řešení ponecháme žákům dostatek času (jeden až dva týdny). Umožníme jim tím, aby mohli úlohy vyřešit opravdu všichni a aby se mohli k neúspěšně řešeným úlohám vracet i v několika dnech a skutečně pak (třeba i po poradě se spolužáky) všechny úlohy úspěšně vyřešit.

Opakování základních konstrukcí (na ZŠ základní konstrukční úlohy)

Opakujeme-li v úvodu planimetrie známé konstrukce ze základní školy, můžeme další sadu úloh zadat bez dalšího komentáře. Výsledky žáků (jejich úspěšnost při řešení úloh) nám pomohou jako orientační ukazatel jejich výchozích schopností a umožní lépe odhalit nedostatky a problémy ve znalostech, které by již měly být základem, na němž potřebujeme při konstrukčních úlohách dále stavět.

3. navrhovaná sada úloh: 10, 100, 101, 102, 103, 121, 122, 1017

V této sadě řešíme konstrukci trojúhelníku podle vět sss, sus a usu, konstrukce těžiště, ortocentra, středu opsané a vepsané kružnice.

Navrhovaný čas na řešení: do následující hodiny matematiky s tím, že po vyhodnocení problémů budou žáci v řešení pokračovat (systém dovoluje řešit i úlohy skupin, kterým již vypršel termín odevzdání).

Při využití na základní škole zadáme uvedené úlohy po částech, vždy až po jejich procvičení rýsováním do sešitu.

Konstrukce trojúhelníků

Máme-li při hodině přístup do počítačové laboratoře, pak pro objasnění podstaty řešení konstrukční úlohy doporučujeme připravit do vyučovací hodiny sadu několika úloh, které v hodině vyřešíme (provedeme jejich rozbor a diskusi) a necháme žáky samostatně sestrojit a odeslat (nechat vyhodnotit) jejich řešení. Můžeme tak bezprostředně komentovat případné neúspěchy a nedorozumění.

4. navrhovaná sada úloh: 120, 123, 141, 181

Jde o klasické konstrukce – rovnostranný trojúhelník, věta usu, vlastnosti těžiště, výšky trojúhelníku.

Po další vyučovací hodině věnované konstrukcím trojúhelníků můžeme žákům zadat samostatnou domácí práci. Tou může být například následující sada úloh.

5. navrhovaná sada úloh (základní úlohy): 12, 15, 16, 17, 126, 128, 140, 1042 (snazší konstrukce trojúhelníku z daných délek stran, výšek, ...).

6. navrhovaná sada úloh (obtížnější úlohy): 18, 124, 125, 142, 180, 182 (konstrukce trojúhelníku z délek těžnic, ortocentra, ...).

Navrhovaný čas na řešení: pokud nerozdělíme úlohy do dvou sad – úlohy, které mají vyřešit dříve a úlohy obtížnější, na které jim dáme víc času – pak žákům ponecháme na řešení úloh dostatek času (přibližně dva týdny), aby měli čas vracet se k neúspěšně řešeným úlohám opakovaně. Rozdělíme-li úlohy navrhovaným způsobem do dvou sad, je vhodné na první sadu ponechat týden času.

Vyhodnocení dosažené úrovně – test (při hodině v počítačové učebně).

Do testu zařadíme některé z úloh, které byly zahrnuty ve skupinách úloh pro domácí práci. Učitel má při prohlížení přehledů odevzdaných řešení přehled o časech, kdy žáci řešení úloh odevzdávali a tak je možné, aby si vytvořil přibližnou představu o časové náročnosti řešení zadávaných úloh. Dále navrhujeme zařadit ty úlohy, kde je vlastní postup konstrukce spíše kratší (vyžaduje méně konstrukčních kroků).

7. navrhovaná sada úloh: 12, 15, 16, 121.

Navrhovaný čas na řešení: 25 minut.

Čas na řešení: 2011-10-18 08:00:00 - 2012-01-15 22:00:00

Nejnovější výsledky

[illegible]

Stav řešení

Bez terminu

kdo \ ūloha

[illegible]

Obr. 3 Prostředí, v němž učitel sleduje výsledky žáků

Výše uvedená ukázka je pouze jednou z mnoha a zdaleka nezahrnuje celé téma středoškolské planimetrie. Dále můžeme pokračovat ve využití systému při *konstrukci trojúhelníků s využitím podobných a shodných zobrazení či konstrukci kružnic*.

Poznámka. Kolegové, kteří se systémem pracují, volí různé způsoby využití. Většinou převažuje využití pro samostatnou domácí práci. Všichni zpravidla nejprve předvedli a využili systém při vyučovací hodině. Někteří využili systém pro následné řešení úloh zadaných pro domácí práci v hodině, někteří zadali obtížnější z připravených úloh pro samostatnou práci s „prémiovým“ bodovým ohodnocením v semináři z matematiky.

Přehled dosavadního využití systému GeoTest

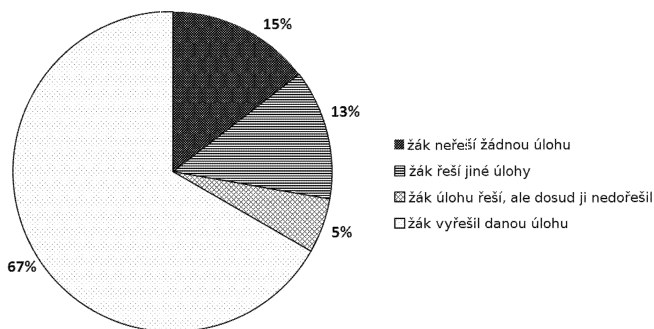
V jedenácti třídách na pěti školách, kde zatím (do 12. 12. 2011) GeoTest využili, zadali učitelé svým žákům 43 úkolů s různým počtem úloh. Některé

ze skupin úloh představovaly domácí úkol, jiné písemku, jiné bonusové úlohy pro zájemce. Některým skupinám ještě neuplynul termín, kdy bylo třeba úlohy vyřešit. Pokusíme-li se přesto nahlédnout, jak úspěšně žáci dané úlohy řeší, dostáváme tyto údaje:

Žáci, kteří zadané úlohy skutečně řešili (tj. odeslali alespoň jeden pokus o řešení), začali řešit 84 % z úloh, které jim byly zadány. Ze započatých úloh dovedli až ke správnému řešení 93 %, což představuje 78 % ze *všech* zadaných úloh. Započítáme-li do celkového počtu i žáky, kteří (z nejruznějších příčin) neřešili ani jedinou úlohu (a započítáme-li jim zadané úlohy jako nevyřešené), je průměrné procento zcela správně vyřešených úloh ve třídě 67 %. Ve zmíněných třídách bylo celkem 341 žáků a ti odevzdali 6 693 správných řešení, to je v průměru 19 *zcela správně vyřešených úloh* na každého žáka (včetně neřešících), přičemž řešení ve třech třídách ještě nebylo ukončeno. Ve všech údajích je každá úloha započtena pro každého žáka právě jednou, tj. nepočítáme počet pokusů potřebných k jejímu vyřešení.

Jiné znázornění vidíme na grafu 1, který ukazuje přehled odevzdaných řešení z pohledu průměrné úspěšnosti řešení zadané úlohy žákem (odchylka jednoho procenta je způsobena zaokrouhlením).

I když hlavní zásluhu na tom má aktivita těchto učitelů i schopnosti jejich žáků, jedná se o čísla při „papírovém“ řešení, odevzdávání a opravování jen těžko představitelná.



Graf 1: Úspěšnost řešení zadané úlohy žákem (průměrné hodnoty)

Závěr – proč systém používat

Systém představuje prostředek, pomocí něhož může učitel snadno zadávat i vyhodnocovat úlohy a v němž mohou žáci nezvyklou formou hledat jejich správné řešení.

S potěšením zjišťujeme, že mnozí žáci v případě chybného řešení vytrvají a snaží se řešit úlohu opakovaně, do té doby, dokud ji nevyřeší. Přitom (na rozdíl od úloh rýsovaných na papíře) správné řešení není možné uhádnout (ani „uhádat“).

Součástí řešení je nutnost volit správně nástroje potřebné ke konstrukci. Tato schopnost více souvisí s logikou postupu řešení (tedy se schopností nalézt správný algoritmus), než se schopností ovládat prostředí programu.

GeoTest samozřejmě nemůže být jediným nástrojem či prostředím použitým při řešení konstrukčních úloh, je ale pomocníkem, který umožní významně zvýšit počet řešených konstrukčních úloh, u nichž žák získá zpětnou vazbu, při současné výrazné úspoře času a úsilí učitele.

Zdroje

Podrobný popis systému GeoTest lze najít na adrese <http://drupal.geometry.cz/geotest>. Jsou zde také komentáře k úlohám a další materiály a aktuální informace. Do systému se (zkušebně) přihlásíte na adrese <http://geotest.geometry.cz>. O učitelský účet si nám napište na adresu geotest@geometry.cz.

Systém je k použití volně a bezplatně, stejně jako GeoGebra, kterou využívá.

Literatura

- [1] *i2g Intergeo*: Společná interaktivní geometrie pro Evropu [online]. Integreo Project, 2007-2010 [cit. 2011-12-30]. <<http://i2geo.net/>>
- [2] *GeoGebra*: [cit. 2011-12-30]. <<http://www.geogebra.org/>>
- [3] *Gergelitsová, Š.*: Počítač ve výuce nejen geometrie – průvodce Geogebrou. Praha: Generation Europe, 2011.
- [4] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Úlohy z planimetrie ... teacher-friendly! In Miroslav Lávička, Martin Němec: Sborník příspěvků 31. Konference o geometrii a grafice, Malá Morávka 5.–8. září 2011: VŠB – TU Ostrava 2011. s. 95–102.

Łukasiewiczova logika a logické paradoxy

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem logiky je odhalovat a formulovat zákony, kterými se řídí naše správné uvažování, a pomocí nichž lze z daných faktů odvodit správný důsledek. Na první pohled se zdá, že taková logika může být pouze jedna, neboť je-li popsán úsudek, kterým získáme z daných předpokladů platný závěr, nelze jinými pravidly odvodit jiný závěr, který by s původním nebyl ve shodě. Ovšem naše každodenní uvažování je poměrně složité a v různých situacích je zapotřebí uplatnit různá pravidla a různé způsoby myšlení.

V době antické sestavil Aristoteles souhrn pravidel, která nazval logikou. V průběhu doby byla tato pravidla upravována, doplňována a formalizována, nicméně Aristotelova logika je stále (ve své formalizované podobě) základem správného uvažování v deduktivních vědách, zejména v matematice.

Ovšem už v letech 1910–1913 vydávají B. Russel a A. N. Whitehead třísvazkovou monografii „Principia Mathematica“, kde přicházejí s kritikou klasické logiky. Objevují totiž první paradoxy teorie množin, čímž otřáslí dogmatickou vírou v nezměnitelnost logických principů. Důsledkem byl vznik celé řady alternativních logických systémů. Principy Aristotelovy logiky nebyly v nových logických systémech zavrženy, ale soubor nových logických principů byl rozšířen a doplněn tak, aby bylo možné popsat a formalizovat situace, které Aristotelovou logikou zohlednit nelze.

Nové logické systémy vznikaly zejména v letech 1920–1930. Vynecháme zde logiku intuicionistickou a ze vzniklých vícehodnotových logik se budeme věnovat pouze logice Łukasiewiczově.

Historicky první je trojhodnotová logika. Jan Łukasiewicz svou motivaci pro trojhodnotovou logiku zdůvodňoval jednak problémem modalit, jednak rozporem mezi determinismem a indeterminismem. Zajímalo ho, jakým způsobem zabudovat do logiky modální částice „je možné, že“, „je

³Podpořeno projektem Algebraické metody v kvantové logice, CZ.1.07/2.3.00/20.0051.

nutné, že“, „není možné, že“, „není nutné, že“. Łukasiewicz se původně pokoušel rozšířit systém klasické dvouhodnotové výrokové logiky o tyto části pomocí smysluplných zákonů. Došel však k závěru, že to není možné.

Označme Mp výrok „je možné, že p “. Pak předchozí modální částice, aplikované na výrok p , lze symbolicky vyjádřit jako $\neg(Mp)$, $M(\neg p)$, $\neg(M(\neg p))$. Tyto čtyři druhy výroků odpovídají čtyřem modům středověké modální logiky, vycházející z Aristotela: *possibile*, *impossibile*, *contingens* a *necessarium*. Pro ně pak formuluje logické zákony

$$\begin{aligned} p &\Rightarrow Mp, \\ \neg(M(\neg p)) &\Rightarrow \neg\neg p, \end{aligned}$$

a tudíž pokud výroková logika obsahuje zákon dvojí negace, pak

$$\neg(M(\neg p)) \Rightarrow p.$$

Intuitivně by ovšem modalita měla obsahovat i tezi

$$\text{„jestliže } \neg p, \text{ pak není možné, že } p\text{“}$$

a tezi

$$\text{„pro některé výroky } p \text{ platí, že je možné, že } p \text{ i } \neg p\text{“}.$$

Z první teze ovšem formalizací obdržíme $Mp \Rightarrow p$, z druhé pak „existuje p tak, že Mp a $M(\neg p)$ “.

V Aristotelově logice tyto formulace nejsou přijatelné. Ovšem zřekneme-li se jich, pak modalita nevyjadřuje, co se intuitivně očekávalo. Łukasiewicz ze to přivedlo k názoru, že vina je na straně klasické logiky. Proto přichází s myšlenkou logiky se třemi hodnotami.

Již ve starověku byl princip dvouhodnotovosti zpochybňován v souvislosti s výroky, hovořícími o budoucích událostech. Łukasiewicz vychází z příkladu výroků o budoucnosti. Uvažuje výrok „1. srpna příštího roku bude pršet“. Ptejme se, zda je tento výrok pravdivý či nikoliv. Dnes není pravdivý ani nepravdivý. Z toho Łukasiewicz usuzuje, že v našem běžném jazyce existují výroky, které nejsou pravdivé ani nepravdivé, a jimž tedy musíme přiřadit nějakou třetí hodnotu. Označuje ji $\frac{1}{2}$, jako prostřední hodnotu mezi „pravdou“, což je 1, a „nepravdou“, což je 0. V této nové logice jsou pak výrokové spojky disjunkce $\vee$, konjunkce $\wedge$, negace $\neg$, implikace $\Rightarrow$ dány tabulkami

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\Rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

p	1	$\frac{1}{2}$	0
$\neg p$	0	$\frac{1}{2}$	1

Všimněme si, že dvouhodnotová Aristotelova logika zde není popřena. Pokud budeme uvažovat pouze pravdivostní hodnoty 0 a 1, pak nám tyto tabulky dávají správnou interpretaci logických spojek v klasické logice. Nová logika je tedy rozšířením logiky klasické o novou pravdivostní hodnotu $\frac{1}{2}$. Platnými formulemi, tj. zákony této trojhodnotové logiky, jsou všechny ty formule, které pro všechny hodnoty svých argumentů nabývají hodnoty 1. Např. zde platí formule $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$, které odpovídá odvozovacímu pravidlu *modus ponens*

$$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q),$$

platí zákony *dvojí negace*

$$p \Rightarrow \neg\neg p, \quad \neg\neg p \Rightarrow p,$$

ale neplatí klasické *zákony nepřímého důkazu*

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p,$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p),$$

neboť např. poslední formule pro $p = \frac{1}{2} = q$ nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$.

Nelze zde ale např. definovat disjunkci pomocí negace a implikace, tj. $\neg p \Rightarrow q$, jako v klasické logice. Pak by totiž platil *zákon vyloučeného třetího*, tj. $p \vee \neg p$, který v Łukasiewiczově logice neplatí. Neplatí rovněž *zákon sporu*, tj. $\neg(p \wedge \neg p)$, neboť pro $p = \frac{1}{2}$ dává hodnotu $\frac{1}{2}$. Podle Łukasiewice je neplatnost zákona vyloučeného třetího a zákona sporu charakteristická pro trojhodnotovou logiku, a právě ona má být vyjádřením neplatnosti zásady dvouhodnotovosti. Naopak, v této logice je snadné vyjádřit modalitu *M*, a to následující tabulkou:

p	Mp
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Nutnost N , tj. $Np = \neg(M(\neg p))$, je pak vyjádřena tabulkou:

p	Np
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

Takto definovaná modalita je ve shodě s předchozími tezemi, zřejmě platí

$$p \Rightarrow Mp, Np \Rightarrow p, Np \Rightarrow Mp.$$

Co se týká výše uvedené první teze, nelze ji formalizovat formulí $\neg p \Rightarrow \neg Mp$, která neplatí, ale v oslabené formě platí

$$\neg p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg(Mp)).$$

Druhá teze je pak formalizována formulí

$$Mp \wedge M(\neg p),$$

která je platná, neboť i pro $p = \frac{1}{2}$ nabývá hodnoty 1. Je tedy odůvodněné tvrdit, že

$$\text{„existuje } p \text{ takové, že } Mp \text{ a } M(\neg p)\text{“}.$$

V následujícím textu se budeme zabývat otázkou, zda jsou logické paradoxy logické. Zdánlivý protimluv vychází z jednoduché úvahy. Paradox není náhodným seskupením výroků, které si vzájemně odporují, ale je výsledkem dosti sofistikované úvahy. Jestliže tedy logika slouží jako systém pravidel, kterým se řídí naše usuzování, musí se i formulace paradoxu nějakou logikou řídit.

Nejprve si vysvětlíme, co jsou logické paradoxy. Nejstarším paradoxem je asi Epimenidův paradox (Epimenidés z Knósu, asi 600 let př. n. l.). Epimenidés byl Kréťan a údajně pronesl výrok: „Všichni Kréťané jsou lháři“. Tím vznikl logický spor. Je-li tento výrok pravdivý, pak jelikož ho pronesl lhář, musí být nepravdivý. Je-li nepravdivý, pak, ze stejného důvodu, musí být pravdivý. V modernější verzi se nazývá *paradox lháře*.

Tento paradox poukazuje na jistý problematický rys obecného jazyka, totiž na odkazování sama na sebe, resp. na svou vlastní pravdivost (samovztážnost, anglicky self-reference). Paradox lze vyjádřit pomocí dvou výroků p , q takto:

výrok p : „výrok q je pravdivý“,
 výrok q : „výrok p je nepravdivý“.

Ve 20. stol. byly odhaleny další dva logické paradoxy, které jsou poněkud závažnější. Je to jednak *Russelův paradox*, jednak *paradox holiče*.

Russelův paradox vychází z intuitivně správné úvahy, že množiny mohou jako prvky obsahovat jiné množiny. Můžeme se tedy ptát, zda existuje „množina všech množin, které neobsahují samy sebe jako prvky“. Je tato množina prvkem sama sebe? Jestliže je, pak není, a jestliže není, pak je. Důvodem tohoto paradoxu je opět tzv. self-reference. Aplikuje se zde odkaz „být svým prvkem“. Formální popis je:

$$\begin{aligned} A \in A &\Rightarrow \neg(A \in A), \\ \neg(A \in A) &\Rightarrow A \in A. \end{aligned}$$

Druhý paradox, tzv. paradox holiče, je výrok: „Holič ve městě M holí právě všechny muže z M , kteří neholí sami sebe.“ Otázka tedy zní: holí tento holič sám sebe? Opět, pokud se holí, pak se neholí, pokud se neholí, tak se holí. Označme H množinu všech mužů z města M , kteří se sami neholí. Nechť h označuje holiče. Pak paradox lze formalizovat takto:

$$\begin{aligned} h \in H &\Rightarrow h \notin H, \\ h \notin H &\Rightarrow h \in H. \end{aligned}$$

Souvislost paradoxu holiče s Russelovým paradoxem je formálně evidentní. Oba se zabývají objekty, které se v moderní logice nazývají *abnormální objekty*. Jsou to objekty typu $\{A \wedge \neg A; A \in P\}$, kde P je jistá množina formulí daného jazyka.

Odlíšnost paradoxu holiče od Russelova paradoxu tkví v tom, že intuitivně předpokládá existenci holiče h . Je-li U množina všech mužů ve městě M , pak dle paradoxu platí

$$h \in H \cap (U \setminus H).$$

Pokud popřeme, že takový prvek h existuje, paradox přestane existovat. U Russelova paradoxu je ovšem existence množiny všech množin zcela zásadní a byla zdrojem axiomatizace teorie množin na počátku 20. století.

Výše uvedené paradoxy jsou ovšem založené na úsudku, že výrok „oba výroky p a $\neg p$ jsou pravdivé“ je formální kontradikcí. Tak tomu v klasické dvouhodnotové logice skutečně je. Podívejme se ale na tyto paradoxy tříhodnotovou logikou Łukasiewiczovou.

Jak jsme viděli, výrok $p \wedge \neg p$ není nutně kontradikcí, pro p , jehož hodnotou je $\frac{1}{2}$, nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$. Uvažujeme-li tedy, že abnormální objekty mají hodnotu $\frac{1}{2}$, má paradox opět pravdivostní hodnotu $\frac{1}{2}$. Je tedy do jisté míry (rovné $\frac{1}{2}$) pravdivý. Ovšem do jisté míry (rovné $\frac{1}{2}$) je také nepravdivý. V každém případě ovšem neodporuje zákonům této logiky.

Pokud přistoupíme na oslabenou verzi, tj. místo výroku p budeme uvažovat jeho modalitu Mp , tj. „je možné, že p “, pak, jak bylo ukázáno výše,

$$Mp \wedge M(\neg p)$$

je v Łukasiewiczově tříhodnotové logice dokonce tautologií, tj. vždy platným výrokem.

Lze tedy přistoupit na Łukasiewiczovu myšlenku, že „závadou“ není náš obecný jazyk, umožňující formulaci paradoxů a abnormálních objektů, ale princip dvouhodnotovosti. Pokud tento princip popřeme, lze formalizovat širší rámec logických úvah, dokonce lze přisoudit logickou správnost i logickým paradoxům.

Ve světle těchto faktů se zdá velmi překvapující, že Łukasiewiczova logika, která byla z původně tříhodnotové rozšířena na vícehodnotovou a později na nekonečněhodnotovou, posloužila jako formální kalkul pro formalizaci kvantové mechaniky. Opět se prokázalo, že co bylo logicky paradoxní v kvantové mechanice (ve srovnání s klasickou mechanikou), bylo ve skutečnosti ovlivněno pouze dvouhodnotovostí klasického kalkulu. Je s podivem, jak úžasná byla pronikavost Łukasiewiczových myšlenek a jaká byla jeho předvídavost.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 185 a 186, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 185

Dokažte, že

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}}$$

je přirozené číslo.

Stanislav Trávníček

Řešení. Označme

$$u = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}} \quad \text{a} \quad x = u + v.$$

Potom $u^3 + v^3 = 4$ a

$$uv = \sqrt[3]{\left(2 + \frac{10}{\sqrt{27}}\right) \left(2 - \frac{10}{\sqrt{27}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Odtud $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 4 + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x = 4 + 2x$. Číslo x je tedy reálným kořenem rovnice $x^3 - 2x - 4 = 0$. Ale $x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$, přitom rovnice $x^2 + 2x + 2 = 0$ nemá reálné kořeny, jak snadno ověříme například pomocí jejího diskriminantu. Proto rovnice $x^3 - 2x - 4 = 0$ má jediný reálný kořen 2, a tedy $x = 2$, což je přirozené číslo, jak jsme měli dokázat.

Jiné řešení (podle *Jozefa Mészárose* a *Vladimíra Pavla*). Snadno vidíme, že

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 2 + \frac{10}{\sqrt{27}} \quad \text{a} \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 2 - \frac{10}{\sqrt{27}}.$$

Odtud dostaneme

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2,$$

což je přirozené číslo.

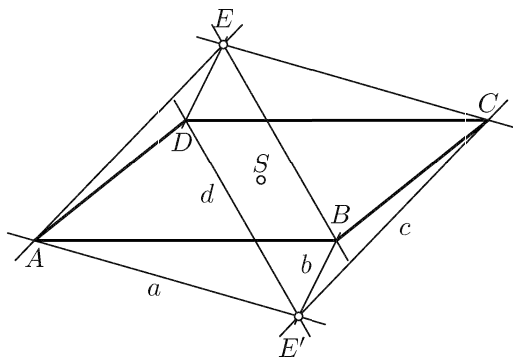
Správná řešení zaslali *Zdeněk Bufka* z České Lípy, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Úloha 186

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod E , který neleží na jeho hranici. V bodech A, B, C, D jsou v daném pořadí sestrojeny rovnoběžky a, b, c, d s přímkami EC, ED, EA a EB . Dokažte, že přímky a, b, c, d procházejí jedním bodem.

Pavel Leischner

Řešení. Označme E' obraz bodu E v souměrnosti podle středu S rovnoběžníku $ABCD$. Přímka $E'A$ je obrazem přímky EC v této středové souměrnosti, je s ní rovnoběžná, proto $a = E'A$. Podobně ukážeme, že $b = E'B$, $c = E'C$ a $d = E'D$. Přímky a, b, c, d tedy procházejí bodem E' , jak jsme měli dokázat.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Pavel Calábek