MATEMATIKA

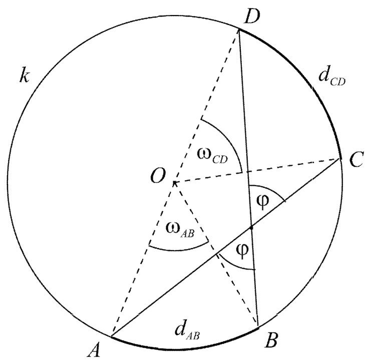
Věta o úhlu tětiv v úlohách

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V článku [2] jsme se seznámili s větou o úhlu tětiv, podle níž je *velikost úhlu tětiv, které se v dané kružnici protínají, rovna aritmetickému průměru úhlových velikostí příslušných oblouků tětivami ohraničených.*

Úhlová velikost oblouku je velikost jeho středového úhlu. Délku oblouku budeme standartně označovat písmenem d a jeho úhlovou velikost písmenem ω, přitom do indexu k písmenu přidáme označení oblouku. Například ω_{AB} je úhlová velikost oblouku AB, d_{CLD} délka oblouku CLD apod. Oblouk označujeme třemi písmeny, když není zcela jasné, který ze dvou možných oblouků na kružnici máme na mysli – prostřední písmeno v označení je zvolený vnitřní bod oblouku, krajní písmena značí krajní body oblouku.



Obr. 1

Při označení podle obr. 1 můžeme větu o úhlu tětiv vyjádřit vztahem

$$2\varphi = \omega_{AB} + \omega_{CD}. \tag{1}$$

Pro délky těchto oblouků zřejmě platí

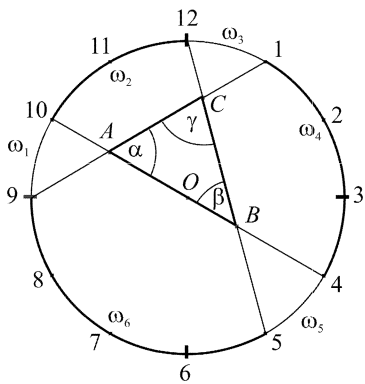
$$2r\varphi = d_{AB} + d_{CD}, \tag{2}$$

kde r je poloměr kružnice.

Využití těchto vztahů ukážeme v šesti řešených úlohách. Řešení osmi dalších úloh přenecháme čtenáři. V obrázcích k úlohám budeme umisťovat označení úhlových velikostí oblouků přímo k obloukům, podobně jako označení jejich délek. Tím se obrázky zjednoduší, protože do nich nemusíme zakreslovat spojnice středu kružnice s krajními body oblouků.

Úloha 1

Trojúhelník ABC je ohraničen třemi přímkami, které jsou určeny dvojicemi bodů (1, 9), (12, 5) a (4, 10) na ciferníku hodin (obr. 2). Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.



Obr. 2

Řešení

Ciferník rozděluje hraniční kružnici na 12 shodných oblouků s úhlovou velikostí 30^0. Dané přímky vytínají na hraniční kružnici ciferníku oblouky, jejichž úhlové velikosti označíme $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$ podle obr. 2. Užitím vztahu (1) dostáváme

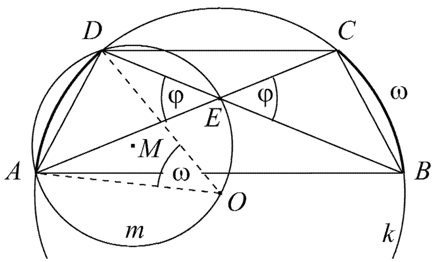
$$2\alpha = \omega_1 + \omega_4 = 30^0 + 90^0; 2\beta = \omega_2 + \omega_5 = 60^0 + 30^0;$$

$$2\gamma = \omega_3 + \omega_6 = 30^0 + 120^0.$$

Odpověď: $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$ a $\gamma = 75^0$.

Úloha 2

Úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se protínají v bodě E. Dokažte, že střed kružnice lichoběžníku opsané leží na kružnici opsané trojúhelníku DAE.



Obr. 3

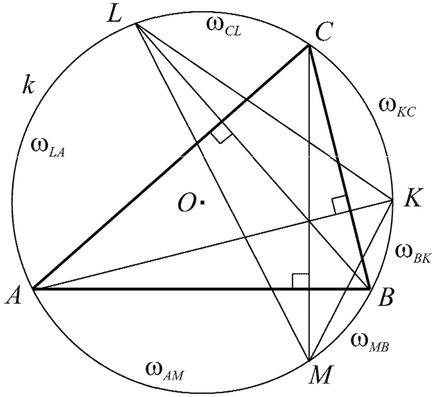
Řešení. Protože jsou ramena BC a AD lichoběžníku shodná, můžeme položit $\omega = \omega_{BC} = \omega_{AD}$ (obr. 3). Užitím věty o úhlu tětiv dostáváme

$$|\sphericalangle AED| = \frac{1}{2}(\omega_{BC} + \omega_{AD}) = \omega = |\sphericalangle AOD|.$$

Odtud a z vlastností obvodových úhlů plyne, že střed O kružnice opsané danému lichoběžníku leží na oblouku DEA kružnice opsané trojúhelníku DAE.

Úloha 3

V trojúhelníku ABC protínají výšky z vrcholů A, B a C kružnici trojúhelníku opsanou po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že přímky AK, BL a CM jsou osy úhlů trojúhelníku KLM.



Obr. 4

Řešení. Pro navzájem kolmé tětivy AB a MC (obr. 4) má vztah (1) tvar

$$\pi = \omega_{AM} + (\omega_{BK} + \omega_{KC}).$$

Podobně pro tětivy LB a AC dostaneme

$$\omega_{LA} + (\omega_{BK} + \omega_{KC}) = \pi.$$

Sečtením obou vztahů zjistíme, že $\omega_{LA} = \omega_{AM}$. Stejným úhlovým velikostem oblouků odpovídají shodné obvodové úhly LKA a AKM, proto je přímka AK osou úhlu MKL. Cyklickou záměnou zjistíme, že přímka BL je osou úhlu KLM a přímka CM je osou úhlu LMK.

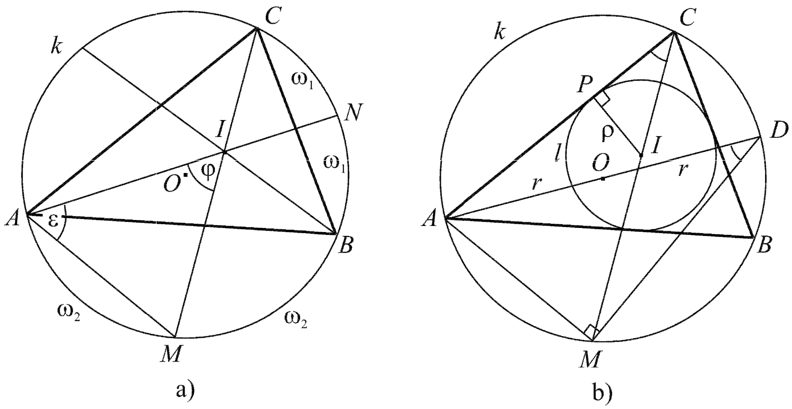
Úloha 4

V libovolném trojúhelníku ABC s vepsanou kružnicí $l(I;\rho)$ je bod $M \notin C$ průsečík osy úhlu ACB s kružnicí $k(O;r)$ opsanou trojúhelníku.

a) Dokažte, že jsou úsečky AM a MI shodné.

b) Dokažte že platí

$$|OI|^2 = r^2 - 2r\rho. \tag{2}$$



Obr. 5

Řešení.

a) Ve shodě s obrázkem 5a) označme N průsečík osy úhlu BAC s kružnicí k, $\varphi = |\sphericalangle AIM|$ a $\varepsilon = |\sphericalangle MAN|$. Dokážeme, že $\varepsilon = \varphi$.

Shodným obvodovým úhlům BAN a NAC přísluší shodné oblouky BN a NC. Proto můžeme označit $\omega_1 = \omega_{BN} = \omega_{NC}$. Podobně položíme $\omega_2 = \omega_{AM} = \omega_{MB}$. Užitím vztahu (1) pro tětivy AM, AN a pro tětivy AN, CM dostáváme

$$2\varepsilon = \omega_{MN} + \omega_{AA} = \omega_2 + \omega_1 = \omega_{AM} + \omega_{NC} = 2\varphi.$$

Odtud $\varphi = \varepsilon$ a též $|AM| = |IM|$, protože proti shodným úhlům trojúhelníku AMI leží shodné strany.

b) Označme P patu kolmice z bodu I na úsečku AC a D obraz bodu A v souměrnosti se středem O – obr. 5b). Obvodové úhly ACM a ADM jsou shodné, a tak jsou pravoúhlé trojúhelníky CIP a DAM podobné podle věty uu. Z podobnosti plyne vztah

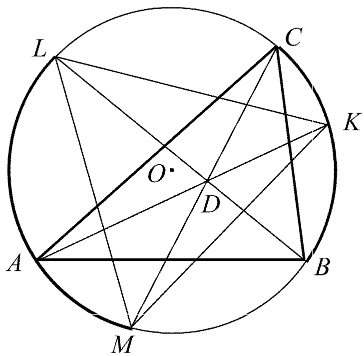
$$\frac{|CI|}{|DA|} = \frac{|IP|}{|AM|},$$

který po dosazení $|AD| = 2r$, $|IP| = \rho$ a $|AM| = |IM|$ upravíme na tvar $|CI| \cdot |IM| = 2r\rho$. Z věty o mocnosti bodu I ke kružnici k navíc dostáváme $|CI| \cdot |IM| = r^2 - |OI|^2$, z posledních dvou vztahů pak rovnost (2).

Poznámka. Vztah (2) pochází od Eulera. Plyne z něj, že v každém trojúhelníku platí $r \geq 2\rho$.

Úloha 5

V trojúhelníku ABC s vnitřními úhly menšími než 120^0 je dán bod D takový, že platí $|\sphericalangle BDC| = 60^0 + \alpha$, $|\sphericalangle CDA| = 60^0 + \beta$, a $|\sphericalangle ADB| = 60^0 + \gamma$. Přímky AD, BD a CD protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že trojúhelník KLM je rovnostranný.



Obr. 6

Řešení. Stačí dokázat, že úhly trojúhelníku KLM mají velikost 60^0.

Ve vztahu $2|\sphericalangle BDC| = \omega_{BC} + \omega_{LM}$, který je zápisem rovnosti (1) pro tětivy BL a CM (obr. 6), položíme $|\sphericalangle BDC| = 60^0 + \alpha$ a za úhlové velikosti oblouků dosadíme dvojnásobky velikostí příslušných obvodových úhlů. Obdržíme rovnici

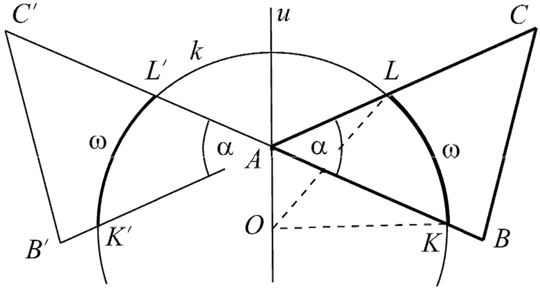
$$120^0 + 2\alpha = 2\alpha + 2|\sphericalangle MKL|,$$

z níž $|\sphericalangle MKL| = 60^0$. Analogicky zjistíme, že platí

$$|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle LMK| = 60^0.$$

Úloha 6

Kružnice k, jež má střed O na ose vnějšího úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A, protíná úsečky AB a AC po řadě v bodech K a L. Dokažte, že úhly BAC a KOL jsou shodné.



Obr. 7

Řešení. Označme u danou osu vnějšího úhlu a K', L' obrazy bodů K, L v osové souměrnosti podle u (obr. 7). Ze souměrnosti plyne, že se tětivy $K'L$ a KL' kružnice k protínají v bodě A a vytínají na kružnici shodné oblouky KL a $K'L'$. Můžeme tedy položit $\omega_{K'L'} = \omega_{KL} = \omega$ a pomocí vztahu (1) zjistíme

$$|\sphericalangle KOL| = \omega = \frac{1}{2}(\omega_{K'L'} + \omega_{KL}) = \alpha.$$

Další úlohy

7. Kružnice je rozdělena body A, B, C a D na oblouky, pro jejichž délky platí

$$d_{AB} : d_{BC} : d_{CD} : d_{DA} = 2 : 3 : 5 : 6.$$

Tětivy AC a BD se protínají v bodě M. Určete velikost úhlu AMB.

8. Úhlopříčky tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě E. Je možné, aby platilo $|\sphericalangle AED| = 70^0$, $\omega_{AB} = 170^0$ a $\omega_{CD} = 40^0$?

9. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Na kružnici mu opsané jsou body K, L, M a N středy těch oblouků AB, BC, CD a DA, jejichž vnitřky neobsahují vrchol čtyřúhelníku. Dokažte, že platí $KM \perp LN$.

10. V trojúhelníku ABC jsou body D, E a F po řadě středy těch oblouků BC, CA a AB kružnice opsané, jejichž vnitřky neobsahují třetí vrchol trojúhelníku. Dokažte, že platí $AD \perp EF$.

11. S využitím výsledku předchozí úlohy sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány průsečíky K, L a M kružnice trojúhelníku opsané s osami úhlů CAB, ABC a BCA.

12. Jestliže D a E jsou středy těch oblouků BC a AC kružnice opsané trojúhelníku ABC, které neobsahují všechny tři vrcholy trojúhelníku, a tětiva DE protíná strany AC a BC v bodech K, L, pak je trojúhelník CKL rovnoramenný. Dokažte.

13. Do kružnice je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokažte, že platí $AD \perp BF$ (stejně jako $BE \perp DF$ a $CF \perp BD$).

14. Bodem M, který leží uvnitř dané kružnice a není totožný s jejím středem, prochází n tětiv. Velikosti úhlů každých dvou sousedních tětiv jsou stejné a průsečíky všech tětiv s kružnicí leží ve vrcholech mnohoúhelníku $A_1A_2 \ldots A_{2n}$. Dokažte, že pro sudá n platí

$$d_{A_1A_2} + d_{A_3A_4} + \ldots + d_{A_{2n-1}A_{2n}} = d_{A_2A_3} + d_{A_4A_5} + \ldots + d_{A_{2n}A_1}.$$

Literatura

[1] *Havířová, B.*: Metody neanalytických výpočtů v eukleidovské geometrii (disertační práce), Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2011.

[2] *Leischner, P.*: Věta o úhlu tětiv kružnice. MFI, roč. 21. č. 2, s. 75–81.

[3] *Ponarin, Y. P.*: Elementarnaja geometria, Tom 1. Izdatelstvo MCNMO, Moskva 2004. Dostupné na: <http://www.math.ru/lib/book/pdf/geometry/Ponarin-I.pdf>

[4] *Šarygin, I. F.*: Zadači po geometrii – Planimetrija, Nauka, Moskva 1982. Dostupné na: <http://www.math.ru/lib/cat/geom>

[5] <http://www.problems.ru/>

Grantová podpora: Projekt FRVŠ–494/2012.

Co možná o součtu $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ nevíte

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Připomeňme si nejprve, že součet k-tých mocnin prvních n přirozených čísel, který budeme značit $S_k(n)$, nabývá pro $k = 0, 1, 2, 3$ následujících hodnot:

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n,\\
S_1(n) &= \frac{1}{2}n(n+1),\\
S_2(n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Pro každý z těchto součtů určíme nyní limitu podílu $\frac{1}{n^{k+1}}S_k(n)$ pro n jdoucí do nekonečna; protože půjde pouze o limity s rostoucím n a daným k, budeme – bez obav, že dojde k nedorozumění – označení $n \to \infty$ vynechávat. Snadným výpočtem zjistíme:

$$\lim \frac{1}{n^{0+1}}S_0(n) = 1 = \frac{1}{0+1},\ \lim \frac{1}{n^{1+1}}S_1(n) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1},$$

$$\lim \frac{1}{n^{2+1}}S_2(n) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1},\ \lim \frac{1}{n^{3+1}}S_3(n) = \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1},$$

Zobecněním těchto výsledků dostaneme větu, jejíž pravdivost v dalších řádcích dokážeme:

Věta

Pro všechna celá nezáporná čísla k platí:

$$\lim \frac{1}{n^{k+1}}S_k(n) = \lim \frac{1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k) = \frac{1}{k+1}.$$

K tomu, abychom ji dokázali, odvodíme nejprve rekurentní vzorec pro $S_k(n)$. Rozvinutím výrazu $(x+1)^{k+1}$ podle binomické věty dostáváme

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + (k+1)x^k + \frac{1}{1\cdot 2}(k+1)kx^{k-1} + \\ + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(k+1)k(k-1)x^{k-2} + \ldots + (k+1)x + 1;$$

do této rovnosti dosadíme za x postupně $1, 2, 3, \ldots, n$, získané rovnosti sečteme a dostaneme:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)S_k(n) + \frac{1}{1\cdot 2}(k+1)kS_{k-1}(n) + \\ + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(k+1)k(k-1)S_{k-2}(n) + \\ + \ldots + (k+1)S_1(n) + S_0(n).$$

Z tohoto vztahu získáme po úpravě požadovaný rekurentní vzorec pro $S_k(n)$:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}kS_{k-1}(n) - \frac{1}{6}k(k-1)S_{k-2}(n) - \\ - S_1(n) - \frac{1}{k+1}S_0(n).$$

Vydělíme-li tuto rovnost výrazem n^{k+1} a označíme-li $\frac{1}{n^{k+1}}S_k(n) = P_k(n)$, plyne odtud:

$$P_k(n) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{(k+1)n^k} - \frac{1}{2n}P_{k-1}(n)k - \\ - \frac{1}{6n^2}P_{k-2}(n)k(k-1) - \ldots - \frac{1}{n^{k-1}}P_1(n) - \frac{1}{(k+1)n^k}P_0(n).$$

Naším úkolem je dokázat, že pro celá nezáporná čísla k je $\lim P_k(n) = \frac{1}{k+1}$; tuto větu dokážeme matematickou indukcí.

První krok jsme provedli už v úvodu, kde jsme ukázali, že věta platí pro $k = 0, 1, 2, 3$. Ve druhém kroku předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla $i < k$ je $\lim P_i(n) = \frac{1}{i+1}$; je tedy např. $\lim P_{k-1}(n) = \frac{1}{k}$,

$\lim P_{k-2}(n) = \frac{1}{k-1}, \ldots, \lim P_1(n) = \frac{1}{2}, \lim P_0(n) = 1$. Na základě tohoto indukčního předpokladu dostaneme, že platí:

$$\lim P_k(n) = \lim \frac{1}{k+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} = \frac{1}{k+1},$$

neboť všechny zbývající členy uvedeného výrazu pro $P_k(n)$ mají limitu rovnou nule. Tím je daná věta dokázána.

I když tento výsledek není příliš důležitý, není podle mého názoru nezajímavý. Nadaní žáci s ním možná mohou být seznámeni v nepovinném semináři, kde například mohou z uvedeného vzorce pro $S_k(n)$ a z hodnot $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$ a $S_3(n)$ určit $S_4(n)$ a přesvědčit se tak o tom, že je

$$S_4(n) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

a tedy $\lim P_4(n) = \lim \frac{1}{n^5}S_4(n) = \frac{1}{5}$.

Pravidelnosti a symetrie pri konštrukciách magických štvorcov

INGRID SEMANIŠINOVÁ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

Nájsť prostredie, ktoré by žiakov motivovalo ku práci, a zároveň by v tomto prostredí prebiehal proces učenia sa, je jeden zo základných didaktických problémov. V tomto príspevku budeme prezentovať prostredie magických štvorcov a kociek, ktoré, ako ukazuje história aj súčasnosť, pôsobí motivačne. Navyše poskytuje pre žiakov viacero príležitostí k hľadaniu, skúmaniu a objavovaniu nových pravidelností a symetrií. Niektoré objavené pravidelnosti sa dajú využiť pri konštrukcii magických štvorcov a kociek, umožňujú lepšie porozumieť existujúcim algoritmom na konštrukciu magických štvorcov a poukazujú na možné zovšeobecnenia. To všetko môže žiakov motivovať k ďalšiemu skúmaniu a objavovaniu a podporovať tak ich tvorivosť.

Prezentované úlohy môžu byť námetom pre náplň krúžku z matematiky, ktorý je určený predovšetkým pre žiakov stredných škôl. Je vhodné, aby počas riešenia väčšiny úloh žiaci využívali tabuľkový kalkulátor, ktorý vizualizuje zadania aj riešenia niektorých úloh a umožňuje rýchlu kontrolu správnosti riešenia.

Definícia

Magický štvorec rádu n je štvorcová tabuľka $n \times n$ obsahujúca všetky čísla od 1 do n^2 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký. Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva *magické číslo*.

V literatúre aj na Internete môžeme nájsť rôzne algoritmy na konštrukciu magických štvorcov. Jeden z nich, ktorý funguje pre magické štvorce, ktorých rád je deliteľný číslom 4 je nasledovný:

1. krok: Tabuľku zodpovedajúceho rádu si rozdelíme dvoma na seba kolmými priamkami (*osami*) na štyri zhodné štvorcové tabuľky. V jednej z tabuliek vyfarbíme políčka striedavo dvomi farbami ako na šachovnici.

2. krok: Políčka vo zvyšných troch častiach tabuľky vyfarbíme tak, aby celé zafarbenie tabuľky bolo súmerné podľa už vyznačených osí tabuľky.

3. krok: Do celej tabuľky vpíšeme postupne zľava doprava a zhora dole za sebou idúce čísla.

4. krok: Vymeníme medzi sebou dvojice čísel, ktoré sa nachádzajú v políčkach jednej farby a sú súmerné podľa bodu v strede tabuľky (pozri obr. 1).

Úloha 1

Zostrojte na základe uvedeného postupu magický štvorec rádu 12. Aby ste nemuseli pracne overovať súčty v riadkoch, v stĺpcoch a na diagonálach použite tabuľkový kalkulátor.

Úloha 2

Prečítajte si postup na konštrukciu magických štvorcov rádu deliteľného 4 na stránke `http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html`. Porovnajte ho s vyššie popísaným postupom. (Postup na stránke je v anglickom jazyku, rád deliteľný číslom 4 je v preklade doubly even order.)

	64	2	62	4	5	59	7	57	260
	9	55	11	53	52	14	50	16	260
	48	18	46	20	21	43	23	41	260
	25	39	27	37	36	30	34	32	260
	33	31	35	29	28	38	26	40	260
	24	42	22	44	45	19	47	17	260
	49	15	51	13	12	54	10	56	260
	8	58	6	60	61	3	63	1	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260	260

Obr. 1 Konštrukcia magického štvorca rádu 8

V ďalšej časti príspevku budeme prezentovať úlohy, ktorých riešenie by malo viesť ku kalkulatívnemu porozumeniu vyššie uvedených algoritmov na konštrukciu magických štvorcov. Žiaci by teda mali porozumieť prečo algoritmus funguje, mali by vedieť odôvodniť jeho správnosť. Taktiež hľadajú odpoveď na otázku: „Dá sa uvedený postup použiť aj pre magické štvorce iných rádov?“

Úloha 3

Odvoďte vzťah pre určenie magického čísla magického štvorca rádu n.

Pri riešení úlohy žiaci aplikujú poznatky o súčte prvých n členov aritmetickej postupnosti. Riešenie môže vyzerať nasledovne: Ak spočítame všetky čísla zapísané do magického štvorca rádu n, tak dostaneme číslo $1 + 2 + \ldots + (n^2 - 1) + n^2 = \frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$. Keďže v každom riadku, resp. stĺpci má byť súčet čísel rovnaký a riadkov, resp. stĺpcov je n dostaneme výsledok $n(n^2 + 1)/2$, čo je magické číslo štvorca rádu n.

Úloha 4

Do tabuľky s rozmermi 4×4 napíšte vzostupne čísla od 1 do 16 tak, že začnete od ľavého horného rohu a postupne budete zľava doprava vypĺňať ostatné riadky. Aký je súčet čísel na diagonálach? Je tento súčet niečím významný? Ako je to u tabuliek vyšších rádov? Zovšeobecnite svoje pozorovanie pre tabuľku $n \times n$, sformulujte hypotézu a dokážte ju.

Očakávame, že žiaci sformulujú hypotézu: Súčet čísel na diagonálach tabuľky je magické číslo magického štvorca rádu n. Svoje pozorovanie môžu odôvodniť nasledovne:

Chceme dokázať, že ak čísla od 1 po n^2 zapíšeme do tabuľky vyššie uvedeným spôsobom, tak súčet čísel na oboch diagonálach bude $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Označme si políčko v i-tom riadku a v j-tom stĺpci tabuľky $m(i,j)$. Podľa zadania úlohy do políčka tabuľky $m(i,j)$ priradíme číslo $(i-1)n+j$.

Uvažujme súčet dvojice čísel na diagonále tabuľky, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa stredu tabuľky. Ide o súčet čísel $m(i,j)$ a $m(n-i+1, n-j+1)$.

$$m(i,j)+m(n-i+1,n-j+1) = (i-1)n+j+(n-i+1-1)n+n-j+1 = n^2+1$$

Pre n párne máme na diagonále $\frac{1}{2}n$ dvojíc čísel, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa stredu tabuľky, výsledný súčet čísel na diagonále je $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Pre n nepárne máme na diagonále $\frac{1}{2}(n-1)$ dvojíc čísel, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa stredu tabuľky a v strede tabuľky je číslo $\frac{1}{2}(n^2+1)$. Teda výsledný súčet čísel na diagonále je opäť $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Žiaci si môžu všimnúť, že z uvedeného dôkazu vyplýva, že aj súčet n-tice čísel, ktorá obsahuje dvojice čísel ležiacich v tabuľke v políčkach symetrických podľa stredu tabuľky sa rovná magickému číslu magického štvorca rádu n, kde n je párne číslo.

Úloha 5

Do tabuľky s rozmermi 8×8 napíšte vzostupne čísla od 1 do 64 tak, že začnete od ľavého horného rohu a postupne budete zľava doprava vypĺňať ostatné riadky.

a) Porovnajte súčet čísel v prvom a poslednom stĺpci. Ako sa zmení súčet čísel v stĺpcoch, ak vymeníte dvojicu čísel z jedného riadku? Koľko dvojíc čísel musíte medzi stĺpcami vymeniť, aby bol súčet čísel v stĺpcoch rovnaký?

b) Porovnajte súčet čísel v druhom a v predposlednom stĺpci (riadku) a opäť medzi nimi vymieňajte čísla, tak aby sa súčty vyrovnali.

c) Postup uvedený v a) a b) opakujte pre každú dvojicu stĺpcov (riadkov), ktoré sú súmerné podľa vertikálnej (horizontálnej) osi tabuľky.

d) Môžeme podobným spôsobom vyrovnávať súčty čísel v stĺpcoch (riadkoch) každej tabuľky $n \times n$? Koľko výmen musíme urobiť medzi dvojicou stĺpcov (riadkov), aby sme dostali rovnaký súčet?

Žiaci si zrejme uvedomia, že rozdiel medzi číslami v jednom riadku u stĺpcov súmerných podľa vertikálnej osi tabuľky je konštantný. Keďže v tabuľke je 8 riadkov, tak po 4 výmenách sa nám súčty čísel v stĺpcoch vyrovnajú (pozri obr. 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	36
9	10	11	12	13	14	15	16	100
17	18	19	20	21	22	23	24	164
25	26	27	28	29	30	31	32	228
33	34	35	36	37	38	39	40	292
41	42	43	44	45	46	47	48	356
49	50	51	52	53	54	55	56	420
57	58	59	60	61	62	63	64	484
232	240	248	256	264	272	280	288	

8	2	3	4	5	6	7	1	36
16	15	11	12	13	14	10	9	100
24	23	22	20	21	19	18	17	164
32	31	30	29	28	27	26	25	228
33	39	38	37	36	35	34	40	292
41	42	46	45	44	43	47	48	356
49	50	51	53	52	54	55	56	420
57	58	59	60	61	62	63	64	484
260	260	260	260	260	260	260	260	

Obr. 2 Vyrovnávanie súčtov stĺpcoch

Časť d) úlohy vyzýva k zovšeobecneniu pozorovaných vzťahov:

- Ak máme tabuľku rádu n, tak súčet čísel v 1. stĺpci, s_1 je o $n(n-1)$ menší ako súčet čísel v poslednom stĺpci, s_n. Ak vymeníme $\frac{1}{2}n$ zodpovedajúcich si čísel medzi stĺpcami, tak s_1 narastie o $\frac{1}{2}n(n-1)$ a s_n bude o $\frac{1}{2}n(n-1)$ menší. Takže súčty budú rovnaké. Z úvah takisto vyplýva, že tento postup môžeme použiť iba ak je n párne číslo.
- Všeobecne, ak si zoberieme i-ty stĺpec so súčtom s_i a stĺpec súmerný podľa vertikálnej osi tabuľky, t.j. $(n-i+1)$-ý stĺpec so súčtom s_{n-i+1}, tak rozdiel medzi súčtami je $n(n-2i+1)$. Výmenou zodpovedajúcich si čísel súčty vyrovnáme.

Úloha 6

Na obr. 3 je postup konštrukcie magického štvorca rádu 4. Popíšte slovne ako bol vytvorený. Všimnite si poslednú tabuľku a porovnajte ju

	4	2	3	1	10
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	16	14	15	13	58
34	34	32	36	34	34

Výmena v 1. a 4. stĺpci

	16	2	3	13	34
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	4	14	15	1	34
34	34	32	36	34	34

Výmena v 1. a 4. riadku

	4	2	3	1	10
	5	7	6	8	26
	9	11	10	12	42
	16	14	15	13	58
34	34	34	34	34	34

Výmena v 2. a 3. stĺpci

	16	2	3	13	34
	5	11	10	8	34
	9	7	6	12	34
	4	14	15	1	34
34	34	34	34	34	34

Výmena v 2. a 3. riadku

Obr. 3 Konštrukcia magického štvorca rádu 4

s pôvodnou tabuľkou. Ktoré čísla zmenili polohu? Popíšte ako zmenili polohu.

Žiaci by si mali uvedomiť, že výmena dvojice čísel na diagonále, nahradí dve výmeny – jednu výmenu v stĺpci a jednu v riadku.

Úloha 7

Vysvetlite postup konštrukcie magického štvorca rádu 6 na obr. 4. Svetlosivá farba znamená výmenu na diagonálach, sivá výmenu medzi stĺpcami a čierna v riadkoch.

Postup konštrukcie uvedený na obr. 4 aplikuje poznatky získané pri riešení predchádzajúcich úloh. Pri konštrukcii sú kombinované výmeny na diagonálach, v stĺpcoch a v riadkoch. Žiakov by sme mali vyzvať, aby si skúsili zostrojiť iný magický štvorec rádu 6 a experimentálne si overili, či

	1	2	3	4	5	6	21
	7	8	9	10	11	12	57
	13	14	15	16	17	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	26	27	28	29	30	165
	31	32	33	34	35	36	201
111	96	102	108	114	120	126	111

Pôvodná tabuľka

	36	32	3	4	5	31	111
	12	8	9	10	11	7	57
	13	14	15	16	17	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	26	27	28	29	30	165
	6	2	33	34	35	1	111
111	111	102	108	114	120	111	111

Vyrovnanie súčtov v 1. a 6. riadku
a v 1. a 6. stĺpci

	36	32	3	4	5	31	111
	12	29	27	10	26	7	111
	13	17	15	16	14	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	11	9	28	8	30	111
	6	2	33	34	35	1	111
111	111	111	108	114	111	111	111

Vyrovnanie súčtov v 2. a 5. riadku
a v 2. a 5. stĺpci

	36	32	3	4	5	31	111
	12	29	27	10	26	7	111
	19	17	22	21	14	18	111
	13	20	16	15	23	24	111
	25	11	9	28	8	30	111
	6	2	34	33	35	1	111
111	111	111	111	111	111	111	111

Vyrovnanie súčtov v 3. a 4. riadku
a v 3. a 4. stĺpci

Obr. 4 Konštrukcia magického štvorca rádu 6 – I

porozumeli postupu. Experimentovanie s číslami žiakom pomôže uvedomiť si v akom vzťahu sú jednotlivé čísla v tabuľke, napríklad:

- Môžu vymieňať len dvojice čísel, ktoré si v pôvodnej tabuľke zodpovedajú v osovej súmernosti podľa vertikálnej, resp. horizontálnej osi tabuľky, resp. v stredovej súmernosti podľa stredu tabuľky (táto výmena nahrádza jednu výmenu v riadku a jednu výmenu v stĺpci).
- Ak medzi sebou vymenia čísla v osovo súmerných políčkach (podľa vertikálnej alebo horizontálnej osi tabuľky) na rôznych diagonálach, vytvorená tabuľka nebude mať zhodné súčty na diagonálach, aj keď súčty v riadkoch a stĺpcoch budú rovnaké (pozri obr. 5 – tabuľka vľavo – výmena čísel 1 a 31 porušila zhodné súčty na diagonálach).

Na obr. 5 – tabuľka vpravo – je vytvorený magický štvorec rádu 6 výmenami iných dvojíc čísel ako na obr. 4.

	31	35	3	4	32	6	111
	30	8	27	10	11	25	111
	18	20	22	21	17	13	111
	19	14	16	15	23	24	111
	12	29	9	28	26	7	111
	1	5	34	33	2	36	111
84	111	111	111	111	111	111	138

	36	5	3	34	2	31	111
	25	29	10	9	26	12	111
	18	14	22	21	23	13	111
	19	20	16	15	17	24	111
	7	11	27	28	8	30	111
	6	32	33	4	35	1	111
111	111	111	111	111	111	111	111

Obr. 5 Konštrukcia magického štvorca rádu 6 – II

Úloha 8

Zostrojte spôsobom podobným ako v predchádzajúcej úlohe magický štvorec rádu 8 a 10. Pokúste sa zostrojiť viacero rôznych magických štvorcov jedného rádu.

Pri konštrukcii magického štvorca rádu 8 potrebujeme pre zodpovedajúcu si dvojicu riadkov a stĺpcov realizovať 2 krát 4 výmeny. Celkový počet výmen znížime na polovicu ak vymeníme čísla len po diagonále. Pri konštrukcii magického štvorca rádu 10 potrebujeme na základe výsledku

	100	92	3	97	5	6	94	8	9	91	505
	81	89	13	14	86	85	17	18	82	20	505
	80	72	78	24	25	26	27	73	29	71	505
	31	39	68	67	35	66	64	63	32	40	505
	41	59	48	44	56	55	57	43	52	50	505
	60	49	53	54	46	45	47	58	42	51	505
	61	62	38	37	65	36	34	33	69	70	505
	30	22	28	77	75	76	74	23	79	21	505
	11	19	83	84	16	15	87	88	12	90	505
	10	2	93	7	96	95	4	98	99	1	505
505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

Obr. 6 Magický štvorec rádu 10

úlohy 5 urobiť 5 výmen medzi zodpovedajúcimi si dvojicami riadkov a stĺpcov. Keďže výmen je nepárny počet, aspoň jedna výmena nebude po diagonále (potrebujeme totiž zachovať symetriu pre vymieňané dvojice po diagonále – pozri obr. 6).

V prípade, že sa medzi žiakmi objavia rôzne postupy konštrukcie môžeme so žiakmi diskutovať o tom, ktorý z postupov je efektívnejší na konštrukciu magického štvorca.

Úloha 9

Dokážte, že algoritmus, uvedený na začiatku príspevku, môžeme použiť pre konštrukciu magických štvorcov rádu n, kde n je číslo deliteľné číslom 4.

Uvedieme časť dôkazu správnosti algoritmu, konkrétne ukážeme, že po výmene bude súčet čísel v stĺpcoch rovný magickému číslu magického štvorca, t.j. číslu $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Označme si políčko v i-tom riadku a v j-tom stĺpci tabuľky ako $m(i,j)$. Do políčka $m(i,j)$, $1 \leq i,\, j \leq n$ vkladáme číslo $(i-1)n+j$.

Čísla, ktoré boli zapísané do zafarbených políčok nahradíme číslami, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa stredu tabuľky. Teda číslo v políčku $m(i,j)$ nahradíme číslom v políčku $m(n-i+1, n-j+1)$. V políčku $m(i,j)$ bude po výmene číslo $(n-i)n+n-j+1)$.

Uvažujme súčet čísel v stĺpcoch tabuľky. Sčítajme po dvojiciach tie čísla z j-teho stĺpca, ktoré sú v políčkach súmerných podľa horizontálnej osi tabuľky, t. j. v políčkach $m(i,j)$ a $m(i^*,j)$. Z konštrukcie vyplýva, že obidve čísla budú buď v tvare $(i-1)n+j$, resp. $(i^*-1)n+j$ alebo v tvare $(n-i)n+n-j+1$, resp. $(n-i^*)n+n-j+1$. Dvojíc prvého aj druhého typu bude $\frac{1}{4}n$. Navyše zo súmernosti podľa horizontálnej osi vyplýva, že platí $i+i^*=n+1$.
Ďalej platí

$$(i-1)n+j+(i^*-1)n+j = n(n-1)+2j,$$
$$[(n-i)n+n-j+1]+[(n-i^*)n+n-j+1] = n(n-1)+2(n-j+1).$$

Súčet čísel v j-tom stĺpci tabuľky je teda

$$\frac{n}{4}\left[n(n-1)+2j+n(n-1)+2(n-j+1)\right] = \frac{1}{2}n(n^2+1).$$

Podobne by sme ukázali, že súčet čísel i-tom riadku je rovný magickému číslu magického štvorca rádu n, kde n je číslo deliteľné štyrmi.

Na diagonálach sme zmenili len polohu čísel v rámci diagonály. Súčet čísel na diagonále teda je na základe výsledku 4. úlohy $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Tým sme ukázali, že vyššie popísaný algoritmus je správny.

Pred riešením ďalšej úlohy navrhujeme, aby učiteľ overil hlbšie porozumenie algoritmu napríklad nasledujúcimi otázkami:

- Musíme vymieňať čísla v zafarbených políčkach?
- Môžeme políčka tabuľky ofarbiť iným spôsobom?
- Dá sa podobný postup použiť na konštrukciu magických štvorcov nepárneho rádu?

Porovnajte opäť (ako v úlohe 2) algoritmy uvedené v úvode príspevku.

Úloha 10

Dokážte správnosť algoritmu na konštrukciu magických štvorcov rádu deliteľného 4 na stránke `http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html`.

Literatúra

[1] *Hejný, M. – Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování. Portál, Praha 2001.

[2] *Koman, M.*: Pravidelnosti aritmetiky a geometrie číselných dvojčat . Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky (ed. Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.), Praha 2004.

[3] *Semanišinová I. – Trenkler M.*: Discovering the Magic of Magic Squares. Mathematics Teacher 101 (2007), s. 32–39.

62. ročník matematické olympiády
Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

A–I–2

Dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}a^2$.

(*Tomáš Jurík*)

A–I–3

Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složeých jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \le p(n) \le 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

A–I–4

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(*Pavel Calábek*)

A–I–5

Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A–I–6

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

KATEGORIE B

B–I–1

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B–I–2

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Případné iracionální kořeny zapište v jednoduchém tvaru bez odmocnin iracionálních čísel.

(*Jaromír Šimša*)

B–I–3

Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici.

(*Jaroslav Švrček*)

B–I–4

Najděte nejmenší hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2.

(*Vojtech Bálint*)

B–I–5

V rovině je dána úsečka AB. Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osové souměrnosti podle přímky XB, resp. XA. Najděte všechny takové body X, které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

(*Pavel Calábek*)

B–I–6

Je dáno přirozené číslo $k < 12$. Ve vrcholech pravidelného 12úhelníku jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 12$ (jako na ciferníku hodin). V jednom kroku můžeme buď vyměnit některá dvě protilehlá čísla, nebo zvolit libovolných k sousedních vrcholů a v nich napsaná čísla zvětšit o 1. Jako $T(k)$ označme tvrzení, že po konečném počtu kroků lze dostat všech 12 čísel stejných. Dokažte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodněte o platnosti $T(3)$.

(*Ján Mazák*)

KATEGORIE C

C–I–1

Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (to jest žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Cestou rozumíme posloupnost políček, na která kobylka doskočí.)

(*Peter Novotný*)

C–I–2

Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$?

(*Ján Mazák*)

C–I–3

Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o. V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$.

(*Tomáš Jurík*)

C–I–4

Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku.

(*Jaromír Šimša*)

C–I–5

Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.

(*Jaroslav Švrček*)

C–I–6

Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM.

(*Pavel Leischner*)

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 30. 9. 2012 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.* Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 189

Nechť ABC je libovolný ostroúhlý trojúhelník. Označme D, E, F paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C. Dále nechť K, L, M jsou průsečíky kružnice opsané trojúhelníku ABC s přímkami AD, BE, CF (různými od A, B, C). Dokažte, že platí

$$\min\left\{\frac{|KD|}{|AD|}, \frac{|LE|}{|BE|}, \frac{|MF|}{|CF|}\right\} \leq \frac{1}{3}.$$

Jaroslav Švrček

Úloha 190

Petrova stavebnice obsahuje 6 shodných tyčinek 6 různých barev. Kolik navzájem různých modelů pravidelného čtyřstěnu z ní může Petr postavit? (Dva modely považujeme za shodné, jestliže je můžeme otočit tak, aby se barvy jejich odpovídajících hran shodovaly.)

Pavel Calábek

(*Pokračování ze s. 576*)

Od roku 1954 se po mnohaleté pedagogické praxi trvale věnoval otázkám metodiky vyučování matematiky – jako metodik v Ústavu pro další vzdělávání učitelů a později v Krajském pedagogickém ústavu v Praze. V roce 1976 odešel do důchodu, ve kterém se dožil 80 let (zemřel 4. srpna 1992).

Do historie české matematiky a pedagogiky se František Běloun zapsal především jako autor mnoha didaktických statí, učebnic, metodických průvodců, sbírek příkladů a tabulek. Jeho obsáhlá Sbírka úloh z matematiky pro základní školu, určená k opakování a procvičování veškerého učiva základní školy a vhodná pro přípravu k přijímacím zkouškám na střední školy, se v roce 2010 dočkala osmého vydání (254 stran), aktualizované Tabulky pro základní školu byly znovu vydány v roce 2006. Pracoval v redakčních radách časopisů Matematika ve škole, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie aj. V letech 1965–1969 byl hlavním sekretářem Jednoty československých matematiků a fyziků.

Bohumil Tesařík