

O lineárních rekurentních vztazích

PAVEL PRAŽÁK

Fakulta informatiky a managementu UHK, Hradec Králové

1. Úvod

Studenti středních škol se při výuce matematiky seznamují s pojmem posloupnost. Jeden z jejich prvních poznatků je, že posloupnost lze zadat buď předpisem pro n -tý člen nebo rekurentně, viz např. [6]. Při rekurentním zadání posloupnosti je dán konečný počet několika počátečních členů posloupnosti (často pouze první člen posloupnosti) a pak je dán předpis, jak pomocí těchto známých členů určit člen následující. Při dalším použití předpisu lze pomocí nově vypočteného členu stanovit další následující člen, atd. Název pro tento postupný výpočet členů posloupnosti pochází z latinského slova *recurrere*, jehož význam je *vracet se*. Významnými příklady rekurentního zadání posloupností jsou definice aritmetické a geometrické posloupnosti, případně posloupnost Fibonacciho. Jiným aplikacím rekurentně zadaných posloupností již ve výuce na středních školách pozornost věnována není. V některých případech je možné zadat posloupnost oběma způsoby – také tato skutečnost je studentům středních škol demonstrována na příkladech aritmetické a geometrické posloupnosti. Ve sbírce [7] je uvedeno několik úloh, které požadují, aby se na základě znalosti rekurentního zadání posloupnosti, případně znalosti konečného počtu počátečních členů posloupnosti, odhadl předpis pro n -tý člen dané posloupnosti. Důkaz správnosti tohoto odhadu lze pak následně provést pomocí matematické indukce. Takto lze např. postupovat při řešení úlohy uvedené v této sbírce na s. 66, kde je třeba nalézt předpis pro n -tý člen posloupnosti zadané pomocí prvního členu $a_1 = 1$ a rekurentního předpisu $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Pomocí matematické indukce lze ukázat, že $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Protože se

více v dostupných středoškolských učebnicích o možném vztahu vzorce pro n -tý člen posloupnosti a jeho rekurentním zadáním nepíše, rádi bychom se v tomto článku věnovali určité třídě úloh, pro kterou lze z rekurentního zadání posloupnosti stanovit předpis pro n -tý člen této posloupnosti.

2. Lineární rekurentní rovnice prvního řádu

Označme a_n , resp. b_n , předpisy pro n -té členy předem daných posloupností, kde $n \in \mathbb{N}$. Dále předpokládejme, že je dána hodnota $p \in \mathbb{R}$. Rekurentním předpisem

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n, \quad y_1 = p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

je zadána posloupnost $(y_n)_{n=1}^\infty$. Na vztah (1) se lze dívat i jinak. Jedná se o rovnici s neznámou reálnou posloupností $(y_n)_{n=1}^\infty$, která se nazývá *lineární rekurentní rovnice prvního řádu*. Prvek p nazýváme *počáteční hodnota* rekurentní rovnice. *Řešením* této rovnice je jakákoliv posloupnost s počátečním členem y_1 , pro kterou platí (1). Tato posloupnost je díky zadané počáteční podmínce a vlastnostem operací součinu a součtu určena jednoznačně. Hledejme řešení rovnice (1). Protože je člen y_1 dán, lze použít rekurentní předpis a určit člen y_2 , pro který platí

$$y_2 = a_1 y_1 + b_1.$$

Známe-li člen y_2 , lze opět pomocí rekurentního vztahu určit člen y_3 , pro který získáme

$$y_3 = a_2 y_2 + b_2 = a_2 a_1 y_1 + a_2 b_1 + b_2.$$

Protože je člen y_3 známý, lze určit člen y_4 , pro který je

$$y_4 = a_3 y_3 + b_3 = a_3 a_2 a_1 y_1 + a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 + b_3.$$

Na základě uvedených vztahů lze pro n -tý člen posloupnosti navrhnout obecný vztah

$$\begin{aligned} y_n &= (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1) y_1 + (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2) b_1 \\ &\quad + (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3) b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Pomocné symboly

Vztah (2) není příliš přehledný, ale zápis lze zkrátit pomocí symbolu pro součin několika členů, resp. symbolu pro součet několika členů. Je-li

$n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reálná čísla, můžeme pro zkrácení součinu, resp. součtu, těchto čísel použít symboly *produkt*, resp. *suma*, ve tvaru

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = \prod_{i=1}^n \alpha_i, \text{ resp. } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (3)$$

Je užitečné rozmyslet si, že je např.

$$\prod_{i=1}^n 2 = 2^n, \quad \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Na několika místech tohoto článku tyto jednoduché vztahy použijeme. Kromě uvedených vztahů (3) je vhodné přijmout také vztahy pro prázdný součin nebo součet. Pro prázdný součin se klade hodnota jedna a pro prázdný součet hodnota nula, např.

$$\prod_{i=n+1}^n \alpha_i = 1, \text{ resp. } \sum_{i=n+1}^n \alpha_i = 0. \quad (4)$$

4. Řešení lineární rekurentní rovnice prvního řádu

Pomocí symbolů pro součin a součet lze (2) zkrátit a psát

$$y_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot y_1 + \prod_{i=2}^{n-1} a_i \cdot b_1 + \prod_{i=3}^{n-1} a_i \cdot b_2 + \dots + \prod_{i=n-1}^{n-1} a_i \cdot b_{n-2} + b_{n-1}. \quad (5)$$

Všechny členy uvedeného vztahu, kromě prvního, obsahují nějaký člen posloupnosti $(b_n)_{n=1}^\infty$ a kromě posledního členu také symbol pro součin. Abychom i v posledním členu mohli použít symbol pro součin a tak sjednotili zápis, použijme konvenci pro součin uvedenou v (4). Nyní napišme vztah (5) jednotněji ve tvaru

$$y_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot y_1 + \prod_{i=2}^{n-1} a_i \cdot b_1 + \prod_{i=3}^{n-1} a_i \cdot b_2 + \dots + \prod_{i=n-1}^{n-1} a_i \cdot b_{n-2} + \prod_{i=n}^{n-1} a_i \cdot b_{n-1}. \quad (6)$$

Použijeme-li dále symbol (3) pro součet několika členů lze (6) dále zkrátit a (2), tj. řešení lineární rekurentní rovnice, zapsat v konečném tvaru

$$y_n = \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot y_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n-1} a_i \right] \cdot b_j. \quad (7)$$

Aby byl tento vztah použitelný i pro $n = 1$, je třeba použít konvenci pro prázdný součet uvedenou v (4). V případě, že jsou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konstantní, lze předchozí vztah (7) ještě dále zjednodušit. Tímto problémem se zabývá článek [8]. Vztah (2), který jsme upravili do tvaru (7), jsme odhadli. Jeho důkaz lze provést matematickou indukcí. Podívejme se nyní, jak lze nalezený vztah použít pro řešení konkrétních úloh.

Příklad 4.1

Je-li y_1 dáno, ukážeme řešení lineární rekurentní rovnice

$$y_{n+1} = (n+1)y_n.$$

V této rovnici pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = n+1$ a $b_n = 0$. Použijeme-li vztah (7), je

$$y_n = \left[\prod_{i=1}^{n-1} (i+1) \right] \cdot y_1 + 0 = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot y_1 = n! \cdot y_1.$$

Příklad 4.2

Je-li $y_1 = 1$, nalezneme řešení lineární rekurentní rovnice

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n.$$

V této rovnici pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = n/(n+1)$ a $b_n = n$. Protože

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n}, \quad \prod_{i=j+1}^{n-1} \frac{i}{i+1} = \frac{j+1}{n},$$

získáme pomocí vztahu (7) postupně následující řešení zadaného problému

$$\begin{aligned} y_n &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \right] \cdot 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \right] \cdot j \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{j+1}{n} \right] \cdot j = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j^2 + j). \end{aligned}$$

Připomeňme nyní známé vztahy

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6}n(2n-1)(n-1), \quad \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{2}n(n-1),$$

viz např. [6], které lze dosadit do předchozího výsledku pro předpis n -tého členu posloupnosti. Po úpravě nakonec získáme

$$y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3}(n^2 - 1).$$

5. Použití

Některé aplikace rekurentních posloupností v geometrii nebo kombinatorice lze nalézt v [1], [2], [3], [4] nebo v [10]. Aplikace z finanční matematiky nebo ekonomie takto zadaných posloupností lze nalézt v [5], [8] nebo v [9]. V následujících úlohách ukážeme použití odvozeného vztahu (7).

Příklad 5.1

Skupina $2n$ hráčů, kde $n \in \mathbb{N}$, se účastní tenisového turnaje. Určíme počet p_n všech jejich možných rozdělení do dvojic v prvním kole turnaje. Viz též úloha v [4] na s. 88.

Ukažme nejdříve ilustraci. Pro skupinu čtyř osob, kterou označíme jako množinu $\{a, b, c, d\}$, získáme následující tři skupiny párů vybraných z původní skupiny čtyř osob, konkrétně se jedná o skupiny

$$\{ab, cd\}, \{ac, bd\}, \{ad, bc\}.$$

Hledejme nyní obecný vztah pro p_n . Je zřejmé, že k jednomu hráči lze vybrat soupeře $2n - 1$ způsoby. Zbylých $2(n - 1)$ hráčů lze pak rozdělit p_{n-1} způsoby, proto podle kombinatorického pravidla součtu platí

$p_n = (2n - 1)p_{n-1}$. Budeme-li v tomto rekurentním vztahu psát $n + 1$ místo n , získáme vztah

$$p_{n+1} = (2n + 1)p_n,$$

který platí pro $n \in \mathbb{N}$ a lépe odpovídá základnímu tvaru lineární rekurentní rovnice (1). Uvědomíme-li si, že $p_1 = 1$, můžeme použít vztah (7) a pro p_n postupně získáme

$$p_n = \left[\prod_{i=1}^{n-1} (2i + 1) \right] p_1 = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Příklad 5.2

Je dobře známo, že pro součet n počátečních členů geometrické posloupnosti (s prvním členem i kvocientem rovným 2) platí

$$2 + 4 + \dots + 2^n = \sum_{k=1}^n 2^k = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2 \cdot (2^n - 1), \quad (8)$$

viz např. [6]. Již méně je znám vztah pro součet

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + \dots + n \cdot 2^n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k, \quad (9)$$

který zde odvodíme.

Součet uvedený v (9) označme s_n a hledejme vzorec pro n -tý člen posloupnosti $(s_n)_{n=1}^\infty$. Nabízí se pracovat s lineární rekurentní rovnicí

$$s_{n+1} - s_n = (n + 1) \cdot 2^{n+1}.$$

Tato rovnice však není vhodná pro použití odvozeného vztahu (7), neboť se v průběhu výpočtu dostaneme opět k hledanému součtu (9). Existuje však i jiná možnost, jak sestavit rovnici pro s_n . Všimněme si nejdříve, že $s_1 = 2$. Dále lze postupně s využitím (8) psát

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + \sum_{k=1}^n (k + 1) \cdot 2^{k+1} = \\ &= 2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k + \sum_{k=1}^n 2^k \right) = 2 + 2(s_n + 2(2^n - 1)) = \\ &= 2s_n + 2^{n+2} - 2. \end{aligned}$$

Získali jsme tak lineární rekurentní rovnici, pro jejíž řešení můžeme použít (7). V průběhu výpočtu budeme potřebovat vztah pro následující součet členů geometrické posloupnosti s kvocientem $1/2$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}.$$

Nyní již můžeme podle (7) psát

$$\begin{aligned} s_n &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} 2 \right] \cdot 2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n-1} 2 \right] \cdot (2^{j+2} - 2) = \\ &= 2^n + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-j-1} (2^{j+2} - 2) = 2^n + \sum_{j=1}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-j}) = \\ &= 2^n + (n-1)2^{n+1} - 2^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} = 2^n(2n-1) - 2^n \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \\ &= 2^n(2n-1) - 2(2^{n-1} - 1) = 2^n(2n-1-1) + 2 = 2^{n+1}(n-1) + 2. \end{aligned}$$

Výpočet tedy můžeme ukončit a napsat závěr, že

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Podobným způsobem, který jsme uvedli v této úloze, lze postupovat i v jiných úlohách týkajících se součtu členů. Jiný způsob nalezení tohoto vztahu je uveden v [3].

6. Závěr

V článku byl ukázán způsob, jak nalézt předpis pro n -tý člen jisté třídy rekurentně zadaných posloupností. Podrobněji jsme daný problém nazývali řešením lineární rekurentní rovnice prvního řádu. Užitečnost nalezeného předpisu (7) byla ukázána při řešení několika úloh. Další úlohy vhodné pro použití tohoto vztahu lze nalézt v uvedené literatuře.

Literatura

- [1] *Calábek P. – Švrček J.*: Rekurentní posloupnosti v geometrii, MFI, r. 12 (2002/03), č. 10, s. 377–584.
- [2] *Calda E.*: Řešení kombinatorických úloh nalezením rekurentního vzorce, MFI, r. 12 (2002/03), č. 6, s. 321–326.
- [3] *Calda E.*: Sbírka řešených úloh, Středoškolská matematika pod mikroskopem, Prometheus, Praha 2006.
- [4] *Engel A.*: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New-York 1998.
- [5] *Hoy M. a kol.*: Mathematics for Economics, Addison-Wesley Publishers, 1996.
- [6] *Odvárko O.*: Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady, Prometheus, Praha 1995.
- [7] *Petáková J.*: Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, Praha 1998.
- [8] *Pražák P.*: Lineární funkce a rekurentně zadané posloupnosti, Rozhledy matematicko-fyzikální, r. 84 (2009), č. 1, s. 6–12.
- [9] *Pražák P. – Pražáková B.*: Excel a rekurentně zadané posloupnosti, MFI, r. 18 (2008/09), č. 1, s. 42–51.
- [10] *Vilenkin N.J.*: Kombinatorika, SNTL, Praha 1977.

Několik poznámek k článku František Kuřina: Rozumět nebo umět

OLDŘICH ODVÁRKO

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V čísle 4 tohoto ročníku byl zde publikován článek Františka Kuřiny s názvem Rozumět nebo umět. Autor článku analyzuje některé vybrané pasáže z učebnic matematiky pro gymnázia a poukazuje zvláště na to, že důkazy vět jsou příliš složité, neboť málo využívají neverbálních prostředků. Zároveň navrhuje, jak by bylo možné příslušná odvození nahradit v jednodušší a názornější podobě. Značná část článku je věnována třem učebnicím, které jsem autorsky zpracoval. Proto považuji za svou povinnost alespoň na některé úvahy reagovat.

Goniometrické funkce

V gymnaziální matematice jsou goniometrické funkce definovány pomocí jednotkové kružnice s užitím orientovaných úhlů. Definičním oborem funkce sinus i funkce kosinus je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

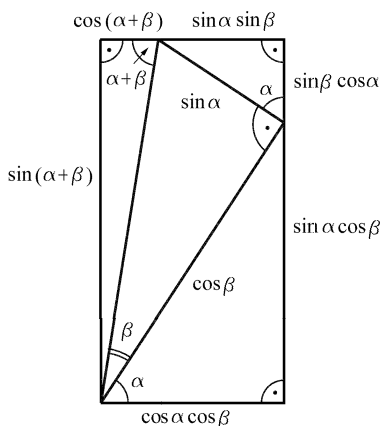
František Kuřina předkládá čtenáři přepis odvození součtových vzorců z učebnice [11], komentuje je a uvádí svůj návrh na změnu:

„Odvození podle učebnice [11] stěží student porozumí, neboť myšlenkových operací je v něm celá řada a odvození je velmi dlouhé. Odvození na obr. 4 je velmi jednoduché a opírá se pouze o „podstatné“ vlastnosti funkcí sinus a kosinus.“

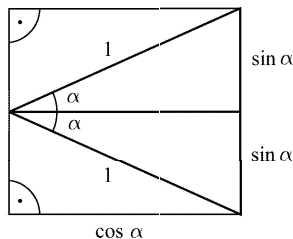
Pokud si v obrázku 4 opravíte $\sin \alpha$ na $\sin \beta$ a k jedné úsečce připsáte číslici 1, dají se dva ze součtových vzorců z obrázku skutečně poměrně jednoduše „vyčíst“. Nelze se ale ubránit některým otázkám, na které by bylo potřeba odpovědět:

Z obrázku 4 jsou „viditelné“ vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a pro $\cos(\alpha + \beta)$. Jak ale z tohoto obrázku zjistíme vzorce pro $\sin(\alpha - \beta)$ a pro $\cos(\alpha - \beta)$? Nebo to bude řešeno na nějakém dalším obrázku?

Obrázek 4 postihuje situaci pro úhly α, β (které nejsou orientované), pro něž $\alpha + \beta \in (0; \frac{1}{2}\pi)$. Součtové vzorce ale platí pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bude nějak odvozování v tomto směru pokračovat?



Obr. 4



Obr. 5

Pokud se chcete sami podívat na odvození součtových vzorců podle učebnice [11], vezměte do ruky učebnici [11], nečtěte přepis v článku. Tento přepis obsahuje 10 nedopatření, z toho 5 věcných chyb. Ještě závažnější je ovšem to, že v přepisu chybí podstatná část důkazu z učebnice [11], v níž se ukazuje rozšíření platnosti vzorce $\cos(x - y)$ z případu $x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle$ na případ $x, y \in \mathbb{R}$.

V další části se F. Kuřina věnuje vzorci pro $\sin 2\alpha$:

„Na základě vzorce $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ pro obsah trojúhelníku se můžeme podle obr. 5 přesvědčit o platnosti vzorce $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.“

Takto se o platnosti příslušného vzorce samozřejmě nepřesvědčíme, neboť ten platí pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a zde se sledovaná situace zužuje opět jen na $\alpha \in (0; \frac{1}{2}\pi)$. Přejít od vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ ke vzorci pro $\sin 2\alpha$ je podle mého názoru pro středoškolského studenta triviální záležitostí. Obrázek je nadbytečný a „zavádějící“.

Pro oba uvedené případy je typické, že autor ignoruje rozšíření goniometrických funkcí sinus a kosinus s definičním oborem $(0; \frac{1}{2}\pi)$ k funkcím s definičním oborem $\mathbb{R}$. Zůstává u definic pomocí pravoúhlého trojúhelníku a z toho se potom všechny následné úvahy odvíjejí.

V části o goniometrických funkcích předkládá F. Kuřina také odvození kosinové věty, které je odlišné od způsobu v učebnici [11], a uvádí: „Srovnání s učebnicí [11] je opět poučné.“ Pokud máte zájem, proveďte si srovnání sami. Upozorňuji pouze na to, že důkaz pro případ tupoúhlého trojúhelníku si budete muset doplnit – v článku je odvození jen pro pravoúhlý a ostroúhlý trojúhelník.

Posloupnosti a řady

Autor zde v první části uvádí dva obrázky, které mají sloužit jako ilustrace ke vzorcům pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (pro $a_1 > 0$ a $d > 0$), resp. geometrické posloupnosti (pro $a_1 > 0$ a $0 < q < 1$). Proti takovýmto ilustracím nelze nic namítat, jen je třeba zvážit jejich funkčnost.

Dále F. Kuřina porovnává odvození věty o součtu nekonečné geometrické řady v učebnici [13] s postupem, který navrhuje on:

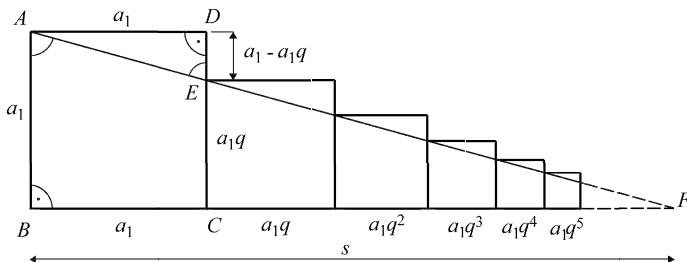
„Součet

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

nekonečné geometrické řady s prvním členem a_1 a kvocientem $0 < q < 1$, je možné názorně odvodit podle obr. 10, který je inspirován publikací [12], s. 120. Trojúhelník ABF je podobný trojúhelníku EDA , a platí tedy

$$\frac{s}{a_1} = \frac{1}{1 - q}.$$

Odvození podané v učebnici [13], které připomínáme obr. 11¹, je jistě na hlubší teoretické úrovni, obrázek 10 je však podle mého názoru přesvědčivější.“



Obr. 10

Na to, zda odvození podle obrázku 10, v němž do popředí vystupuje podobnost trojúhelníků, postihuje podstatu věci, tj. příslušný limitní proces, mohou být různé názory. Závažnější je však fakt, že na tomto obrázku je zachycen jen případ $a_1 > 0$, $0 < q < 1$. Přirozeně se nabízí otázky: Jak se dokáže pomocí tohoto či jiného obrázku, že věta platí i tehdy, když je $a_1 < 0$ nebo $-1 < q < 0$? Nebo se „dokazování“ tímto obrázkem skončí?

Důkaz v učebnici [13] je veden klasicky a sám o sobě je jednoduchý, pokud samozřejmě student pochopil řádně pojem limity a porozuměl větám o limitech. Důkazu mohou předcházet úvahy v intuitivní rovině (včetně ilustrací na konkrétních příkladech) vážící se k tomu, co lze říci o limitě posloupnosti $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ pro a jaké odtud plynou závěry o existenci součtu a o tom, čemu se tento součet rovná. Vlastní důkaz je pak určitým formálním završením všech těchto úvah. Chtěl bych v této souvislosti zdůraznit, že bychom u středoškolských studentů neměli v žádném případě opomíjet rozvíjení a systematické pěstování abstraktního myšlení.

¹Obr. 11 je text důkazu.

Vidění souvislostí

V této části článku se F. Kuřina zabývá jedním řešeným příkladem z učebnice [14]:

„Na obr. 12² z učebnice [14] vidíme, že autoři řeší úlohu podrobným „množinově – logickým“ rozbořením, ačkoliv je zřejmé, že graf relace

$$|x| + |y| = 2$$

je souměrný podle souřadnicových os a stačí tedy přenést část grafu funkce $y = 2 - x$ souměrnostmi z prvního do zbývajících kvadrantů.“

S tímto názorem lze souhlasit. Je ovšem zajímavé, že tady F. Kuřina vybočil z řady současně používaných učebnic pro gymnázia a vklínil sem už „historickou“ učebnici z roku 1978, která byla již v roce 1985 nahrazena učebnicí O. Odvárko a kol.: Matematika pro II. ročník gymnázia.

Učebnice [14] byla napsána v období tzv. množinové matematiky, kdy koncepce středoškolské matematiky byla v některých směrech podstatně odlišná od koncepce současné. Zde uváděný příklad měl za cíl ukázat žákům, jak se v daném konkrétním případě zapisují množiny, jak se využívají operace s množinami, a především předvést rozklad množiny na třídy.

Dovolím si na okraj ještě uvést, že v učebnici [14] byly pro potřeby studia průběhu funkcí uvedeny osová souměrnost a středová souměrnost v pravoúhlé soustavě souřadnic³ a obě tato zobrazení byla hojně užívána při studiu vlastností funkcí (sudá a lichá funkce) a při sledování grafů funkcí s absolutními hodnotami, kvadratických funkcí, nepřímé úměrnosti a mocninných funkcí. Na souvislosti mezi funkcemi a geometrickými zobrazeními se tedy nezapomnělo.

Závěry

Vážím si práce kolegy Kuřiny v didaktice matematiky, se zájmem čtu jeho stati i knižní publikace. V tomto článku však František Kuřina podle mého názoru zcela neoprávněně a nesprávně povýšil obrázky z roviny motivační a ilustrační do úrovně odvození. Navíc mám z článku poněkud nepříjemný pocit, že „viděl jen to, co chtěl, a co nechtěl vidět, to neviděl“.

²Obr. 12 je přepis řešeného příkladu.

³Shodná zobrazení byla začleněna až do následujícího sešitu (M. Hejný a kol.: Matematika pro gymnázia. Sešit 4. SPN Praha 1978).

- [11] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia. Goniometrie. Prometheus, Praha 1994.
- [12] *Nelsen, R. B.*: Proofs without Words. MAA, Washington 1993.
- [13] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady. Prometheus, Praha 1995.
- [14] *Odvárko, O. – Fořt, J. – Novák, B.*: Matematika pro gymnázia. Sešit 3. SPN, Praha 1978.

Jak vypočítat číslo π

IVAN CHAJDA¹

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Číslo π , zvané též Ludolfovo, je bezesporu nejdůležitější matematickou konstantou, která má však použití i mimo matematiku, zejména ve fyzice a v technické praxi. Vyjadřuje poměr mezi obvodem kruhu (tj. délkou kružnice) a jejím průměrem.

Stanovením velikosti čísla π se zabývali matematici již v době antické. Aproximovali délku kružnice zdola pomocí obvodu vepsaného n -úhelníka a shora pomocí obvodu opsaného n -úhelníka. Limitou pro $n \rightarrow \infty$ byla pak délka kružnice. Touto metodou se dařilo vypočítat číslo π na několik desetinných míst, což pro praktické účely bezesporu stačilo.

Situace se začala měnit, když se podařilo dokázat, že číslo π není racionální. Velký zlom nastal koncem 19. století, když v roce 1882 *Lindemann* dokázal, že číslo π není dokonce algebraické (nad racionálními čísly), tj. není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. Jedná se o velmi obtížný důkaz, využívající metod tzv. algebraické teorie čísel. Odtud je ihned patrné, že jeho číselný rozvoj je nekonečný a není periodický. Proto se začala řada matematiků zajímat otázkami typu:

- Existuje nějaká zákonitost ve výskytu číslic v číselném rozvoji čísla π ?
- Vyskytuje se např. posloupnost číslic 0123456789 v tomto rozvoji?

¹ Podpořeno projektem „Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice“, CZ.1.07/2.4.00/17.0100.

- Opakuje se některá číslice bezprostředně po sobě alespoň třikrát?

Lze formulovat množství otázek tohoto typu, ale neexistuje obecná teorie, umožňující nalézat na ně odpovědi.

Jediná metoda, jak alespoň některé z těchto otázek zodpovědět, je prohledat číselný rozvoj čísla π . K tomu je ovšem zapotřebí tento rozvoj znát v dostatečné délce. V době superpočítačů je takový výpočet možný, pokud použijeme vhodnou metodu. Jednou z metod je následující výpočet:

Položíme $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$, $y_0 = \sqrt{2} - 1$ a iterujeme

$$y_{k+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_k^4}},$$

$$a_{k+1} = a_k (1 + y_{k+1})^4 - 2^{2k+3} y_{k+1} (1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2).$$

Pak a_k konverguje velmi rychle k číslu $\frac{1}{\pi}$. Každá iterace zčtyřnásobuje počet platných čífer.

V roce 1983 byla tato metoda použita na 16KB počítači pro 21 iterací. V roce 1986 byla použita na počítači Cray-2 v NASA pro výpočet 29,4 milionu platných číslic. Výpočet trval 40 hodin.

V lednu 2009 bylo touto metodou vypočteno 1,649 miliard číslic na počítači ApproXtreme X3. Výpočet trval 73,5 hodiny. V dubnu 2009 touto metodou vypočítal *Takahashi* 2,576 miliard číslic. V prosinci 2009 dosáhl *Bellard* 2,7 miliard číslic, výpočet trval 131 dnů. V srpnu 2010 pak *Kondo* a *Yee* vypočítali 5 miliard číslic.

Odpovědi na některé otázky se našly. Např. v roce 1997 zjistil *Kanada*, že na 17 387 594 880té pozici číselného rozvoje čísla π se nalézá posloupnost číslic 0123456789. *Penrose* se v roce 1989 domníval, že nikdy nebude možné zjistit, zda v tomto číselném rozvoji existuje např. posloupnost deseti po sobě následujících číslic 7, avšak *Kanada* tuto posloupnost v desetinném rozvoji čísla π objevil v roce 1997. Našel ji až na 22 869 046 269té pozici.

A jaký je rekord v počtu nalezených platných číslic rozvoje čísla π ? Situace se asi mění rychle, ale v roce 2010 to bylo už 5 miliard platných číslic.

Existují ovšem i jiné výpočty čísla π , založené na součtu některých číselných řad. Již v roce 1910 objevil *Ramanujan* následující:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^n \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

Každý člen této řady přidává dokonce 8 platných číslic. Ještě složitější řadu objevili bratři *David* a *Gregory Chudnowsky*:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (6k)! (13591409 + 545140134k)}{(3k)! (k!)^6 640320^{3k + \frac{3}{2}}}.$$

Každý člen této řady přidává do číselného rozvoje dokonce 14 platných číslic.

Existuje celá řada dalších metod, umožňujících výpočet číselného rozvoje čísla π . Všechny mají společné tyto vlastnosti:

- jsou velmi komplikované, jejich odvození byla samostatná vědecká práce;
- úžasně rychle konvergují, každý krok iterace přináší několik dalších platných číslic;
- lze je provádět pouze použitím počítače, pro „ruční“ výpočet by byly zcela nepoužitelné.

Jinými slovy, umožňují nám nebývalý výpočet miliard platných číslic a s vývojem kapacity počítačů lze očekávat nové rekordy v počtu platných číslic každým okamžikem. Je však neobyčejně obtížné verifikovat správnost výpočtu. Provádí se namátkovou kontrolou posloupností číslic zkoumaného číselného rozvoje, prováděnou různými metodami, což spotřebuje více času, než samotný výpočet.

Jakkoliv jsou tyto metody efektivní ve spojení se současnými superpočítači, chybí jim názornost a zjevná elegance metody antické. Otázkou zůstává jejich užitečnost: k čemu potřebujeme znát rozvoj čísla π na tolik platných číslic a proč bychom měli odpovídat na výše uvedené otázky? Zajímavostí může být, že jak se v matematice často ukazuje, pokud je nějaký problém dostatečně obtížný, pak zpravidla uplatnění najde. Tak výše uvedený výpočet rozvoje čísla π v roce 1986 na počítači Cray-2, v té době nejvýkonnějším počítači na světě, obsahoval „drobnou“ chybu ve velmi vzdálené části téměř třiceti milionového rozvoje, jak se zjistilo dalším výpočtem v letech následujících. Pečlivou analýzou této chyby byly nalezeny chyby jak v software, tak v hardware superpočítače Cray-2, které by asi jinak zůstaly utajeny a mohly by způsobit miliardové škody při znehodnocení sond a satelitů vysílaných NASA. Takže opět se ukazuje užitečnost matematiky i tam, kde by ji někdo těžko hledal.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 183 a 184, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 183

V ostroúhlém trojúhelníku ABC s neshodnými vnitřními úhly o velikostech α , β při vrcholech A a B označme P patu výšky z vrcholu C a R patu výšky z vrcholu A . Dále označme Q ($Q \neq P$) bod přímky AB , pro který platí $|AP| \cdot |BQ| = |AQ| \cdot |BP|$. Dokažte, že kružnice sestrojená nad průměrem PQ prochází bodem R , právě když $\alpha = 45^\circ$.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Body P a R leží podle Thaletovy věty na kružnici s průměrem AC , čtyřúhelník $APRC$ je tedy tětíkový, tudíž $|\sphericalangle PRB| = \alpha$ (obr. 1).

Ze zadání plyne

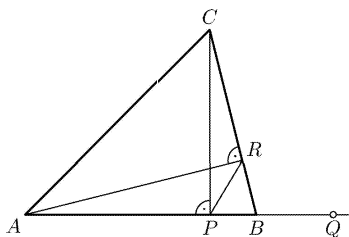
$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AQ|}{|BQ|}.$$

Jestliže kružnice sestrojená nad průměrem PQ prochází bodem R , potom bod Q je bodem polopřímky PB , tedy $|AQ| > |BQ|$. Odtud $|AP| > |BP|$, a proto $\alpha < \beta$. Naopak, jestliže $\beta < \alpha = 45^\circ$, potom je trojúhelník tupohlý. Stačí tedy uvažovat případ $\alpha < \beta$.

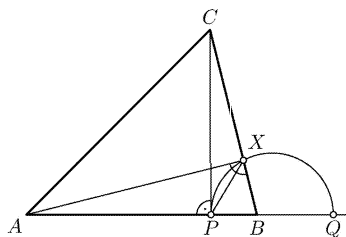
Kružnice sestrojená nad průměrem PQ je proto Apolloniiovou kružnicí vzhledem k bodům P a Q . Pro její průsečík X se stranou BC pak platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AX|}{|BX|}.$$

To znamená, že bod P dělí úsečku AB v poměru $|AX|:|BX|$. Podle věty o ose vnitřního úhlu je uvedené tvrzení ekvivalentní s tvrzením, že XP je osou úhlu AXB . Úhly AXP a PXB mají tudíž stejnou velikost (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Pokud $X = R$, je trojúhelník AXB pravoúhlý, a tedy $\alpha = |\sphericalangle PRB| = |\sphericalangle PXB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AXB| = 45^\circ$. Naopak, je-li $\alpha = 45^\circ$, platí $|\sphericalangle PRB| = 45^\circ$. Bod P pak leží na ose úhlu ARB , přičemž platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AR|}{|BR|}.$$

To ale znamená, že bod R leží na Apolloniově kružnici nad průměrem PQ . Tím je důkaz ukončen.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, *Parléřova*, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Nádražní*, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jana Novotná* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Polcer* z G v Brně, *Křenová*, *Martin Raszyk* z G v Karviné a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Úloha 184

Nechť p je prvočíslo a $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $P(n)$ není dělitelné p pro žádné celé číslo n . Ukažte, že existuje polynom $Q(x)$ s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $P(n)Q(n) - 1$ je dělitelné číslem p pro každé celé číslo n .

Ján Mazák

Řešení. Ukážeme, že polynom $Q(x) = P^{p-2}(x)$ má požadované vlastnosti. Jelikož $P(x)$ má celočíselné koeficienty, potom $Q(x)$ má celočíselné koeficienty. Dále pro žádné celé číslo n není číslo $P(n)$ dělitelné p , proto podle malé Fermatovy věty prvočíslo p dělí číslo $P^{p-1}(n) - 1 = P(n)Q(n) - 1$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Řešitelé, kteří poslali neúplné řešení, dokazovali, že za podmínek úlohy číslo p dělí (pro všechna celá čísla n) číslo $P(n) - P(0)$, případně ekvivalentní tvrzení. To však neplatí. Stačí uvážit $p = 3$ a $P(x) = x^2 + 1$.

Správná řešení zaslali: *David Bainer*, *Dominik Tělučil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, *tř. Kpt. Jaroše*, *Zuzana Boršiová* z G v Teplicích, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, *Komenského*, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* z G v Plzni, *Mikulášské nám.*, *Michal Kopf* z SG v Opavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Nádražní*, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Lenka Stará* z G v Č. Budějovicích, *Jírovcova*, *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Pavel Calábek

XVI. seminář o filosofických otázkách matematiky a fyziky

Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF a Gymnázium Velké Meziříčí pořádají ve dnech 20. – 23. srpna 2012, Gymnázium Velké Meziříčí již tradiční seminář o filosofických otázkách matematiky a fyziky.

Obsahem semináře budou nejen filosofická témata související s našimi obory, ale obecně populární přednášky s matematickou a fyzikální tematikou a zamyšlení nad výukou nejen matematiky a fyziky. Z tradičních přednášejících můžeme uvést např. tyto kolegy: *J. Podolského*, *J. Langeru*, *J. Šimši*, *D. Hrubého*. Objeví se však i nová jména (např. *J. Chýla*, *I. Jex*, *S. Štech*, *S. Průša*).

Seminář se bude konat v aule Gymnázia Velké Meziříčí. Ubytování je zajištěno v Domově mládeže Střední školy řemesel a služeb Velké Meziříčí. Předběžné finanční náklady: vložné 400 Kč, ubytování 200 Kč za noc.

Pro účastníky bude vydána předseminární brožura (v elektronické i v papírové formě) s podrobným programem. Přihlášku a aktuální informace je možno získat na seminární adrese:

<http://www.gvm.cz/cs/seminare>,

mail: trojaneke@gvm.cz,

RNDr. Aleš Trojáněk, PhD., Gymnázium Velké Meziříčí, Sokolovská 27/235,
594 01 Velké Meziříčí
