

Pompeiuova věta

JAROSLAV ŠVRČEK – PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Problematika příspěvku, který obsahuje mj. kompletní důkaz tzv. *Pompeiuovy věty*, je určena především všem zájemcům o elementární planimetrii a dále těm učitelům matematiky, kteří se podílejí na práci s matematickými talenty.

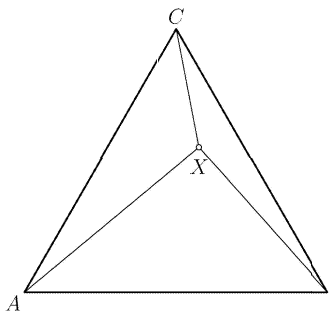
Věta 1 (Dimitrie Pompeiu¹)

Nechť X je libovolný bod roviny rovnostranného trojúhelníku ABC , který neleží na kružnici jemu opsané. Pak z úseček AX , BX a CX lze sestrojit trojúhelník.

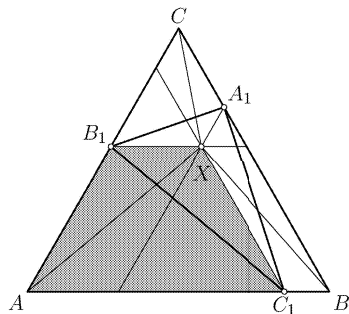
Vzhledem k tomu, že je známo několik snadných důkazů uvedené planimetrické věty pro libovolný bod X rovnostranného trojúhelníku ABC , který je různý od jeho vrcholů, uvedeme v tomto příspěvku nejprve tři z nich. Tyto důkazy lze přitom vhodně uplatnit přímo v práci s matematickými talenty na středních školách. První dva z nich jsou převzaty z [4], třetí z [2].

Je-li X vnitřním bodem libovolné strany uvažovaného trojúhelníku, je důkaz triviální. Uvažujme nyní libovolný vnitřní bod X rovnostranného trojúhelníku ABC .

¹Rumunský matematik (1873–1954), který svými výsledky přispěl k rozvoji v oblasti teorie funkcí komplexní proměnné.



Obr. 1



Obr. 2

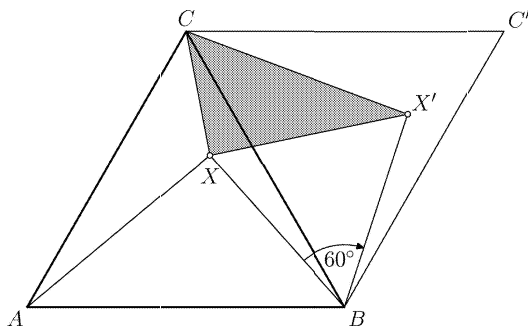
První důkaz je založen na využití *metody extrémálního prvku*. Jedna z úseček AX , BX , CX je nejdelší (jedna z nejdelších). Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že je to úsečka AX . Označíme-li a délku strany rovnostranného trojúhelníku, snadno vidíme, že $|AX| < a$. Pro délky stran trojúhelníku BCX platí trojúhelníková nerovnost (obr. 1)

$$|BX| + |CX| > a > |AX|, \quad \text{tj.} \quad |BX| + |CX| > |AX|,$$

která dokazuje existenci trojúhelníku o stranách AX , BX , CX .

Jiný důkaz. Uvažujme libovolný vnitřní bod X rovnostranného trojúhelníku ABC , kterým vedme rovnoběžky s stranami uvažovaného rovnostranného trojúhelníku ABC . Jejich průsečíky se stranami BC, CA, AB označme po řadě A_1, B_1, C_1 (obr. 2). Snadno se nyní vidí, že AC_1XB_1 je rovnoramenný lichoběžník se základnami AC_1 a XB_1 . Jeho úhlopříčky jsou proto shodné, tj. platí $|AX| = |B_1C_1|$. Analogicky lze postupovat také v případě rovnoramenných lichoběžníků BA_1XC_1 a CB_1XA_1 , kde $|BX| = |C_1A_1|$ a $|CX| = |A_1B_1|$. Vzhledem k existenci trojúhelníku $A_1B_1C_1$ se stranami shodnými s úsečkami AX, BX, CX je tvrzení úlohy dokázáno.

Poslední důkaz. V rovině trojúhelníku ABC uvažujme otočení $R(B, -60^\circ)$, kde $X \mapsto X'$, $A \mapsto C$ a $C \mapsto C'$ (obr. 3).



Obr. 3

Vzhledem k tomu, že

$$|AX| = |CX'| \quad \text{a} \quad |XX'| = |BX|,$$

má trojúhelník CXX' délky stran shodné s délkami úseček AX , BX , CX . Tím je existence trojúhelníku s danými délkami stran prokázána.

Tento důkaz lze uplatnit také pro libovolný bod X , který leží vně rovnostranného trojúhelníku ABC . Snadno lze navíc ukázat, že pokud bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , pak X spolu se svým obrazem X' a některým z vrcholů trojúhelníku ABC (v případě otočení jako na obr. 3 – s vrcholem C) leží na téže přímce, což potvrzuje neexistenci trojúhelníku s danými délkami stran.

K důkazu Pompeiuovy věty v obecném případě vede mj. použití známé *Ptolemaiovy nerovnosti*, viz např. [1], [3] nebo [4]. Připomeňme její znění.

Věta 2 (Ptolemaiova nerovnost)

V libovolném čtyřúhelníku $KLMN$ platí nerovnost

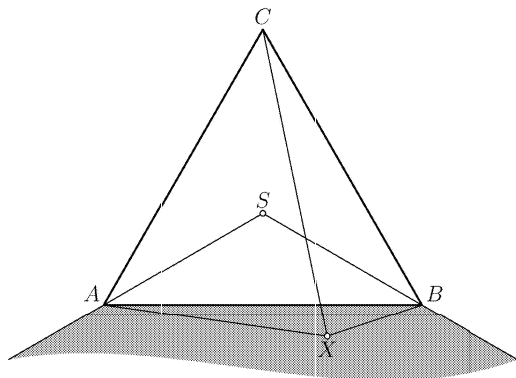
$$|KL| \cdot |MN| + |LM| \cdot |NK| \geq |KM| \cdot |LN|,$$

přičemž rovnost nastává, právě když čtyřúhelník $KLMN$ je tětíkový.

Aplikace této nerovnosti pro libovolný čtyřúhelník (nikoliv nutně konvexní), jehož vrcholy jsou body A, B, C, X , kde ABC je uvažovaný rovnostranný trojúhelník, vede bezprostředně k důkazu Pompeiuovy věty pro

libovolný bod X roviny trojúhelníku ABC . Při využití Ptolemaiovy nerovnosti je však nutno nejprve zajistit, aby jedna z úseček KM , LN v Ptolemaiově nerovnosti byla nejdelší (jedna z nejdelších) z úseček AX , BX , CX . Pokud například X je libovolným bodem úhlu ASB , kde S je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC , a současně leží vně trojúhelníku ABC (obr. 4), je CX nejdelší (jedna z nejdelších) z uvažovaných tří úseček. Podle Ptolemaiovy nerovnosti pak platí

$$|AX| \cdot |BC| + |BX| \cdot |CA| \geq |CX| \cdot |AB|, \quad \text{tj.} \quad |AX| + |BX| \geq |CX|.$$

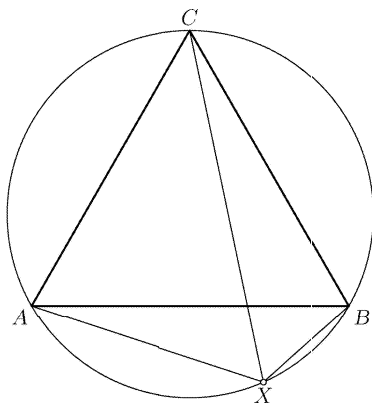


Obr. 4

Podle dodatku věty 2 však Ptolemaiova nerovnost přechází v rovnost, právě když bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC , tj. v případě, kdy body A , B , C a X jsou vrcholy tetivového čtyřúhelníku (obr. 5). Pokud však bod X *neleží* na kružnici opsané trojúhelníku ABC , platí ostrá nerovnost, tedy

$$|AX| + |BX| > |CX|,$$

která zajišťuje existenci trojúhelníku o stranách AX , BX , CX (s nejdelší stranou CX).



Obr. 5

Podobně lze postupovat také v případě, kdy bod X leží v úhlu BSC , resp. v úhlu CSA , vně trojúhelníku ABC . Pak nejdelší (jednou z nejdelších) z uvažované trojice úseček je AX , resp. BX .

K důkazu Pompeiuovy věty lze také přímo využít Ptolemaiovu nerovnost pro trojici čtyřúhelníků $AXBC$, $ABXC$, $ABCX$, kde X je libovolný bod roviny rovnostranného trojúhelníku ABC , který neleží na kružnici jemu opsané.

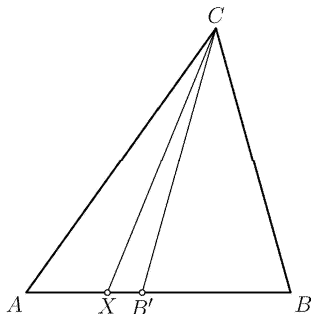
Poznámka. Pokud trojúhelník ABC není rovnostranný, pak v jeho rovině existuje v doplňku ke kružnici jemu opsané vždy takový bod X , že z úseček AX , BX , CX trojúhelník sestavit nelze.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že strana AB je nejkratší stranou, popř. jednou ze dvou nejkratších stran trojúhelníku ABC a současně AC je nejdelší stranou (jednou ze dvou nejdelších stran) trojúhelníku ABC . S ohledem na uvedený předpoklad je třeba rozlišit následující tři případy:

- a) $|AB| < |BC| = |CA|$,
- b) $|AB| = |BC| < |CA|$,
- c) $|AB| < |BC| < |CA|$.

V každém z uvedených tří případů lze hledaný bod X najít vždy uvnitř strany AB . Jednotlivé případy je však třeba posoudit odděleně. Jejich

detailní provedení ponecháváme zájemcům o tuto problematiku. Pokud např. v případě c) pro ostroúhlý trojúhelník ABC uvažujeme libovolný vnitřní bod X úsečky AB' , kde $|BC| = |B'C|$ (obr. 6), evidentně platí $|AB| = |AX| + |BX| < |CX|$, což ale znamená, že neexistuje trojúhelník o stranách AX , BX , CX . Podobně lze postupovat také v pravoúhlé a tupouhlé trojúhelníky ABC v případě c).



Obr. 6

Detailní zdůvodnění tvrzení, které je uvedeno v poznámce za větou 2 pro případy a) a b), ponecháváme zájemcům o tuto problematiku.

Literatura

- [1] Havířová, B.: Co možná nevíte o čtyřúhelníku. ROZHLEDY M–F, roč. 85(2010), č. 1, s. 1–12.
- [2] Krámlí, J.: On Dimitrie Pompeiu's Theorem. Octagon, Vol. 2 (1994), No. 1, s. 27–30.
- [3] Leischner, P.: Ptolemaiova nerovnost. Matematika–fyzika–informatika, roč. 15 (2005/06), č. 7, s. 385–392.
- [4] Ponarin, J. P.: Elementarnaja geometrija 1 (rusky). Izdatel'stvo MCNMO, Moskva 2004.
- [5] Švrček, J.: Rovnostranný trojúhelník v práci s matematickými talenty. Sborník příspěvků z konference „Dva dny s didaktikou matematiky“, PedF UK Praha, 2010, s. 70–76.

Grantová podpora:

- Projekt OPVK – CZ.1.07/2.3.00/0017 – MATES – Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky.
- Projekt OPVK – CZ.1.07/1.2.12/01.0027 – PMT – Zkvalitnění přípravy matematických talentů ZŠ a SŠ Olomouckého kraje.

Úlohy MO pro patnáctileté v Polsku

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Zatímco u nás Matematická olympiáda (MO), nejstarší předmětová soutěž na základních a středních školách, zaznamenává ve školním roce 2011/2012 již svůj 61. ročník, v sousedním Polsku má současný ročník stejnojmenné soutěže (s polským názvem *Olimpiada Matematyczna* a zkratkou OM) dokonce pořadové číslo 63. Charakter této soutěže je nejen v těchto dvou, ale i v řadě dalších zemích dobře znám: zápolí se v řešení nestandardních úloh v omezeném čase formou zápisů úplných postupů, úvah a výpočtů. Mezi oběma olympiádami v České republice a Polsku je však zásadní rozdíl: u nás jsou soutěžící rozděleni do řady věkových kategorií (tři pro středoškoláky a pět pro žáky základních škol nebo nižších gymnázií), aby v soutěžních kolech mohli řešit úlohy „přiměřené svému věku“. Polská OM je však soutěž jednotná, v níž „v jediné kategorii“, tj. bez rozdílu věku mezi sebou soutěží žáci všech ročníků středních škol (v Polsku tříletých), až jsou na to dobře připraveni. Úlohy z posledních let a podrobnosti o organizaci polské OM lze nalézt na stránkách www.om.edu.pl.

Mladší Poláci, kteří pro soutěžení v OM ještě nejsou vyzrálí, mají samozřejmě možnosti poměřit své matematické schopnosti v jiných soutěžích, obdobných třeba naší Pythagoriádě. Tak se ve školním roce 2005/2006 v Polsku rozběhla nová soutěž, tentokrát společná pro všechny žáky, kteří dosud nenastoupili ke studiu na střední škole. Třetí slovo z jejího polského názvu *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, ve zkratce OMG, zasluhuje, aby bylo českému čtenáři vysvětleno. K tomu poněkud šířeji poznamenejme, že polský systém jednotného základního (9letého) vzdělávání byl prolomen teprve v roce 1999, kdy byly po celém Polsku otevřeny výběrové tříleté školy s názvem *gimnazjum*, které odpovídají našim nižším gymnáziím. Přívlastek „nižší“ v Polsku ovšem nemá smysl, neboť tamní dávno existující tříleté střední školy (odpovídající českým čtyřletým gymnáziím) nesou název *liceum*. Tím je pravý význam polského termínu *gimnazjalista* objasněn. Pro zajímavost dodejme, že polské střední školství se v oficiálních dokumentech nazývá jako *ponadgimnazjalne* (čili „nadgymnaziální“).

Zmíněnou (poměrně novou) polskou soutěž OMG můžeme přirovnat ke kategoriím Z9 nebo C naší MO. Významný rozdíl ovšem spočívá v tom, že OMG nekončí jako naše kategorie Z9 a C krajským kolem, nýbrž vrcholí třídním ústředním kolem, konaným prozatím vždy ve Varšavě, a to za účasti cca 150 soutěžících z celého Polska. Takovou významnou akci pro patnáctileté talentované žáky můžeme našim sousedům určitě závidět; její společenskou prestiž dokresluje i skutečnost, že na závěrečném slavnostním vyhlášení vítězů (laureátů) OMG byl zatím pokaždé osobně přítomen i polský ministr školství. Podrobnosti o organizaci OMG i její úlohy najdete na stránkách www.omg.edu.pl.

Podívejme se nyní na úlohy, které byly v dosavadních sedmi ročnících polské OMG jejím účastníkům zadávány. Je jistě zajímavé posoudit náplň úloh, které je možné řešit s minimem matematických znalostí (daným osnovami základních škol), jež však musí být zároveň natolik obtížné, aby i v elitním výběru 150 nejlepších patnáctiletých žáků 40milionového národa mohly soutěžící výkonnostně rozlišit. (Jak je tomu při matematických olympiádách obvyklé, žáci jsou hodnoceni výlučně podle bodových zisků za podaná řešení, nepřihlíží se tedy například k tomu, jak žáci brzy řešení před koncem stanoveného časového limitu odevzdají.) Vybrané úlohy jsou tematicky rozdělené na algebraické (A), geometrické (G), číselně-teoretické (Č) a kombinatorické (K).

Zadání úloh

A1 Pro libovolná kladná čísla a, b, c zdůvodni nerovnost

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

A2 Platí-li pro kladná reálná čísla a a b

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3},$$

nemohou být obě čísla a, b racionální. Vysvětli.

A3 V oboru lichých přirozených čísel řeš rovnici

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

- G1** Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má oba vnitřní úhly při vrcholech B a D pravé. Vysvětli, proč obvod trojúhelníku ACE není menší než dvojnásobek délky úhlopříčky BD .
- G2** Uvnitř trojúhelníku ABC je zvolen bod P . Body D, E, F jsou obrazy bodu P v souměrnostech po řadě podle přímk BC, CA, AB . Za předpokladu, že trojúhelník DEF je rovnostranný, vysvětli, proč se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě.
- G3** Uvnitř strany AB rovnoběžníku $ABCD$ je zvolen bod E , uvnitř strany AD je vybrán bod F . Přímka EF protne přímky BC a CD po řadě v bodech P a Q . Zdůvodni, proč trojúhelníky CEF a APQ mají stejné obsahy.
- Č1** Existují přirozená čísla a, b, c, d taková, že z nich sestavený součin

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$$

je číslo, jehož zápis v desítkové soustavě končí dvojčíslím 10?

- Č2** Najdi všechny trojice prvočísel p, q, r tak, aby platily obě rovnosti $q = p^2 + 6$ a $r = q^2 + 6$.
- Č3** Vysvětli, proč rovnici $a^3 + 3b^6 = c^2$ vyhovuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel a, b, c .
- K1** Urči, kolik je všech patnáctimístných přirozených čísel N s vlastností: každé tři vedle sebe stojící číslice čísla N jsou navzájem různé a přitom jedna z nich je nula.
- K2** Každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev – buď červenou, nebo modrou. Zdůvodni, proč některý pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník v této rovině má všechny tři vrcholy stejné barvy.
- K3** Skupina 21 reálných čísel má tuto vlastnost: součet každých jedenácti čísel je větší než součet zbylých deseti. Vysvětli, proč všech 21 čísel je kladných.

Odpovědi a návody k řešení úloh

- A1** Vynásobením obou stran dané nerovnosti kladným číslem $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ a provedením ekvivalentních úprav dostaneme evidentní nerovnost $0 < 1$.
- A2** Danou rovnost upravte na $|a - b| = 2\sqrt{3}$.
- A3** Po odstranění zlomků dostaneme $(a - b)(a + b - c) = 0$, přitom druhý činitel je liché číslo, takže vyhovují právě trojice $(a, b, c) = (a, a, c)$ s libovolnými lichými a, c .

- G1** Je-li K střed AB a L střed CE , platí $o_{ACE} = 2o_{KLC}$. Protože $|CK| = |BK|$ a $|CL| = |DL|$, je obvod $\triangle KLC$ roven délce lomené čáry $BKLD$, která však není menší než vzdálenost $|BD|$ jejích krajních bodů B a D .
- G2** Od bodů E a F má stejné vzdálenosti nejen bod D , ale i bod A (neboť $|AE| = |AP| = |AF|$). Přímka AD je proto osou úsečky EF . Podobně BE je osa FD a CF je osa DE , takže přímky AD , BE a CF se protínají v bodě, který je středem kružnice opsané trojúhelníku DEF .
- G3** Označte v, w po řadě vzdálenosti bodů A, C od přímky PQ . Z dvojice trojúhelníků podobných podle věty uu odvoďte úměry $v : w = |AF| : |CP| = |EF| : |PQ|$. Odtud již plyne potřebná rovnost $|PQ| \cdot v = |EF| \cdot w$.
- Č1** Ne. Součin $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ má být dělitelný dvěma, nikoliv však čtyřmi, takže právě jeden ze čtyř činitelů musí být sudý a ostatní tři jsou lichá čísla. Pak by ovšem *součet* všech čtyř činitelů byl lichý, je to však sudé číslo $2(a+b+c+d)$.
- Č2** Jediné řešení je $(p, q, r) = (5, 31, 967)$. Zřejmě nemůže být ani $p = 2$, ani $p = 3$. Je-li $p \geq 7$, končí p jednou z číslic 1, 3, 7 nebo 9, v každém z těchto čtyř případů je ovšem jedno z čísel $q = p^2 + 6$ či $r = q^2 + 6$ dělitelné pěti.
- Č3** Z jednoho uhodnutého řešení $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ vytvoříme nekonečně mnoho dalších $(a, b, c) = (n^2, n, 2n^3)$, kde n je libovolné přirozené číslo.
- K1** Hledaný počet je $18 \cdot 8^9$. Vyhovující čísla N jsou dvojího druhu, a to buď $.0..0..0..0..0..0.$, nebo $..0..0..0..0..0..0$, kde tečky označují místa nenulových číslic. Vybírejme je po řadě zleva doprava a počítejme možnosti podle kombinatorického pravidla součinu.
- K2** Vyberme dva body A, C různé barvy a uvažme čtverec $ABCD$ se středem S . Mají-li body B a D stejnou barvu, vyhovuje buď $\triangle ABD$, nebo $\triangle BCD$. V opačném případě vyhovuje $\triangle XYS$, kde XY je vhodná strana čtverce $ABCD$.
- K3** Označme x libovolné číslo skupiny, A součet deseti dalších čísel a B součet zbylých deseti čísel. Sečtením nerovností $x+A > B$ a $x+B > A$ již dostaneme kýžený závěr $x > 0$.

Znalost problematiky penzijního připojištění – nezbytná součást finanční gramotnosti (I. část)

VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ

Pedagogická fakulta JČU, České Budějovice

Úvod

V článcích [2] a [3] jsme se zabývali problematikou finančních produktů, které slouží k získání potřebných finančních prostředků (konkrétně spotřebitelskými a hypotečními úvěry). Téma finančních produktů je také zahrnuto do standardů finanční gramotnosti, které byly vymezeny v dokumentu [4]. Tyto standardy byly již plně implementovány do rámcových vzdělávacích programů pro gymnázia a střední školy prostřednictvím vzdělávacích oblastí *Člověk a svět práce* a *Matematika a její aplikace*. Oblast *Člověk a svět práce* definuje znalosti a dovednosti týkající se nakládání s finančními prostředky, tržní ekonomiky, národního hospodářství a úlohy státu v ekonomice, které studenti gymnázií a středních odborných škol mají získat. Oblast *Matematika a její aplikace* pak uvádí potřebný matematický aparát, který studentům umožní pochopení zákonitosti fungování finančních vztahů a analýzu nabízených produktů.

V tomto článku se seznámíme s dalším finančním produktem, a to penzijním připojištěním se státním příspěvkem. Dále uvedeme základní matematický aparát, který je potřebný pro řešení úloh zabývajících se tématikou penzijního připojištění. Čtenář by mohl vznést otázku, zda má smysl se v době přípravy důchodové reformy tímto produktem zabývat. Na tuto otázku můžeme dát kladnou odpověď, neboť penzijní připojištění se státním příspěvkem bude tvořit tzv. třetí pilíř důchodové reformy. Připomeňme, že prvním pilířem je stávající povinný průběžný státní systém, do kterého je odváděn příspěvek na důchodové pojištění v zákonem stanovené výši. Druhým pilířem bude dobrovolné spoření u soukromých penzijních společnostech, do kterých budou moci lidé převádět ze státního průběžného systému 3 % z odvedeného sociálního pojištění a další 2 % ze svého měřovacího základu mzdy.

Základní charakteristika penzijního připojištění

V této části článku uvedeme přehled základních vlastností penzijního připojištění se státním příspěvkem. Studenti gymnázií jsou s ním seznámeni ve vzdělávací oblasti *Člověk a svět práce*.

Vzhledem k připravované důchodové reformě, jejíž součástí je i penzijní připojištění, dochází u tohoto produktu k určitým změnám. Změny, které byly schváleny do konce července 2011, jsou v tomto článku již zahrnuty.

Přehled základních informací o penzijním připojištění

- Vklady nejsou pojištěny.
- Maximální roční státní příspěvek je v současné době 1 800 Kč. Výše státního příspěvku je uvedena v tabulce 1 (tabulka je platná do 1. 1. 2013).

Tab. 1 Výše státního příspěvku penzijního připojištění do 1. 1. 2013

Výše příspěvku účastníka v Kč	Výše státního příspěvku v Kč
100 až 199	50 + 40 % z částky nad 100 Kč
200 až 299	90 + 30 % z částky nad 200 Kč
300 až 399	120 + 20 % z částky nad 300 Kč
400 až 499	140 + 10 % z částky nad 400 Kč
500 a více	150 Kč

Od 1. 1. 2013 dojde v rámci důchodové reformy ke změně výše státního příspěvku (viz tabulku 2). Maximální roční státní příspěvek se zvýší z 1 800 Kč na 2 760 Kč.

Tab. 2 Výše státního příspěvku penzijního připojištění od 1. 1. 2013

Výše příspěvku účastníka v Kč	Výše státního příspěvku v Kč
100 až 299	0 Kč
300 až 999	90 + 20 % z částky nad 300 Kč
1 000 a více	230 Kč

- Daňová úspora může dosáhnout až 1 800 Kč ročně. Za současných podmínek se maximální roční daňové úspory, tj. 1 800 Kč, dosáhne při mě-

síční úložce 1 500 Kč. Od 1. 1. 2013 bude maximální roční daňová úspora (opět 1 800 Kč) dosažena při měsíční úložce 2 000 Kč.

- Vklady z penzijního připojištění (včetně státních příspěvků a výnosů) mohou být vyplaceny jednorázově nebo postupně formou doživotní penze. V současné době probíhají diskuze kolem jednorázového vyrovnání. Zatím nebylo rozhodnuto, zda tato forma výplaty penzijního připojištění bude zrušena.
- Výnosy z příspěvků účastníka i ze státních podpor jsou zdaněny 15 %, ale až v den jednorázového vyrovnání nebo v průběhu vyplácení penze.
- V případě sjednání pouze starobní penze, můžeme peníze vybrat nejdříve za 5 let a až po dosažení 60 let.
- V případě, že ke starobní penzi máme sjednanu výsluhovou penzi, můžeme peníze vybrat před dosažením 60 let, ale až po 15 letech, a to ve výši maximálně 50 % z naspořené částky.
- Roční zhodnocení vkladů se každý rok liší v závislosti na hospodaření fondu.
- Penzijní připojištění má garantovaný výnos. Penzijní fondy nemohou ze zákona připsat záporné zhodnocení. Tato skutečnost platí pro účastníky, kteří již spoří v dnešních penzijních fondech nebo do nich vstoupí do konce roku 2012 a nebudou mít zájem nic měnit. Výhodu garantovaného výnosu ztratí, pokud dobrovolně přestoupí do jednoho ze čtyř nových penzijních fondů ve třetím pilíři.

Základní matematický aparát

V hodinách matematiky jsou studenti seznámeni se základními vzorci finanční matematiky, a to v učivu aritmetická a geometrická posloupnost. V této části článku si odvodíme některé vzorce, které studenti potřebují při řešení úloh týkajících se penzijního připojištění. Vzhledem k tomu, že penzijní připojištění je vlastně spoření, budeme odvozovat vzorce pro spoření.

Konkrétně:

Krátkodobé spoření předlhužní: na začátku každé m -tiny roku ukládáme částku x Kč při roční úrokové míře i vyjádřené desetinným číslem a s ročním úrokovacím obdobím.

Naspořená částka je

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i \right), \quad (1)$$

kde S = celková naspořená částka, m = počet úložek během roku, x = úložka, která je ukládána na začátku každé m -tiny roku, i = roční úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo.

Dlouhodobé spoření polhůtní: po dobu n let ukládáme na konci každého roku částku a Kč při roční úrokové míře i vyjádřené desetinným číslem a s ročním úrokovacím obdobím.

Naspořená částka je

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad (2)$$

kde S = celková naspořená částka, a = roční úložka, která je ukládána na konci roku, n = počet let spoření, i = roční úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo.

Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření při spoření předlhuťním: po dobu n let ukládáme na začátku každé m -tiny roku částku x Kč při roční úrokové míře i vyjádřené desetinným číslem a s ročním úrokovacím obdobím.

Naspořená částka je

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i \right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad (3)$$

kde S = celková naspořená částka, m = počet úložek během roku, x = úložka, která je ukládána na začátku každé m -tiny roku, n = počet let spoření, i = roční úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo.

Poznámka. Ve vzorcích (1), (2) a (3) není zohledněna daň z úroků, která je v současné době 15 %. Důvod je, jak již jsme v první části článku poznamenali, že úroky z příspěvků účastníka i ze státních podpor jsou u penzijního připojištění zdaněny až v den jednorázového vyrovnání nebo v průběhu vyplácení penze. Pokud bychom uvažovali klasické spoření (např. spořicí účet, stavební spoření), museli bychom daň z úroků ve vzorcích (1), (2) a (3) zohlednit. To znamená nahrazení úrokové míry i čistou úrokovou mírou $0,85 \cdot i$.

Odvození výše uvedených vzorců ukážeme na konkrétních příkladech, které posléze zobecníme.

Příklad 1

Pan Veselý se rozhodl, že na začátku každého měsíce bude ukládat 1 000 Kč na účet s roční úrokovou mírou 3 % a s ročním úrokovacím obdobím. Jak vysoká částka bude na účtu za jeden rok? Daň z úroků neuvažujeme.

Řešení: Pan Veselý bude mít po roce na účtu vložené peníze a úroky z jednotlivých úložek. Úroky budeme počítat na základě jednoduchého úrokování, neboť se pohybujeme v rámci jednoho úrokovacího období.

Tab. 3 Úroky z jednotlivých úložek

Pořadí úložek	Doba vyjádřena ve zlomcích roku, po kterou je úložka úročena	Úrok (v Kč)
1	$12 \cdot \frac{1}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{12}{12} \cdot 0,03$
2	$\frac{11}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{11}{12} \cdot 0,03$
3	$\frac{10}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{10}{12} \cdot 0,03$
4	$\frac{9}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{9}{12} \cdot 0,03$
5	$\frac{8}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0,03$
6	$\frac{7}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{7}{12} \cdot 0,03$
7	$\frac{6}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{6}{12} \cdot 0,03$
8	$\frac{5}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{5}{12} \cdot 0,03$
9	$\frac{4}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{4}{12} \cdot 0,03$
10	$\frac{3}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{3}{12} \cdot 0,03$
11	$\frac{2}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{2}{12} \cdot 0,03$
12	$\frac{1}{12}$	$1\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,03$

Celkové úroky U z jednotlivých úložek činí

$$\begin{aligned} U = & 1\,000 \cdot \frac{12}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{11}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{10}{12} \cdot 0,03 + \\ & + 1\,000 \cdot \frac{9}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{7}{12} \cdot 0,03 + \\ & + 1\,000 \cdot \frac{6}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{5}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{4}{12} \cdot 0,03 + \\ & + 1\,000 \cdot \frac{3}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{2}{12} \cdot 0,03 + 1\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,03. \end{aligned}$$

Po vytknutí výrazu $1\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,03$ z každého členu součtu obdržíme

$$U = 1\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,03 \cdot (12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1).$$

Pro určení součtu $(12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$ použijeme vzorec pro součet prvních 12 členů aritmetické posloupnosti $(n)_1^\infty$, kde $a_1 = 1$, $a_{12} = 12$:

$$s_{12} = \frac{(a_{12} + a_1) \cdot 12}{2} = \frac{(12 + 1) \cdot 12}{2}.$$

Tedy

$$U = 1\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,03 \cdot \frac{(12 + 1) \cdot 12}{2}.$$

Po roce bude mít pan Veselý na účtu částku

S = vložené peníze + úroky,

$$S = 12 \cdot 1\,000 + 1\,000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,03 \cdot \frac{(12 + 1) \cdot 12}{2},$$

$$S = 12 \cdot 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{(12 + 1) \cdot 12}{2 \cdot 12} \right) = 12\,000 + 195 = 12\,195 \text{ Kč}.$$

Zadání příkladu 1 nyní zobecníme.

Příklad 2

Pan Veselý se rozhodl, že na začátku každé m -tiny roku bude ukládat x Kč na účet s roční úrokovou mírou i (vyjádřeno desetinným číslem)

a s ročním úrokovacím obdobím. Jak vysoká částka bude na účtu za jeden rok? Daň z úroků neuvažujme.

Řešení: Úroky z jednotlivých úložek budeme opět počítat na základě jednoduchého úrokování (viz tabulku 4).

Celkový úrok činí

$$\begin{aligned} U &= x \cdot i \cdot m \cdot \frac{1}{m} + x \cdot i \cdot (m-1) \cdot \frac{1}{m} + x \cdot i \cdot (m-2) \cdot \frac{1}{m} + \dots + x \cdot i \cdot \frac{2}{m} + \\ &+ x \cdot i \cdot \frac{1}{m} = x \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot (m + (m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1) = \\ &= x \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2}. \end{aligned}$$

Na konci roku bude mít pan Veselý k dispozici částku

$$S = m \cdot x + x \cdot i \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i \right) \text{ Kč.}$$

Tab. 4 Úroky z jednotlivých úložek

Pořadí úložek	Doba, po kterou je úložka úročena	Úrok (v Kč)
1	$m \cdot \frac{1}{m}$	$x \cdot i \cdot m \cdot \frac{1}{m}$
2	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$x \cdot i \cdot (m-1) \cdot \frac{1}{m}$
3	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$x \cdot i \cdot (m-2) \cdot \frac{1}{m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$\frac{2}{m}$	$x \cdot i \cdot \frac{2}{m}$
m	$\frac{1}{m}$	$x \cdot i \cdot \frac{1}{m}$

Dlouhodobé spoření polhnutí

Příklad 3

Pan Veselý ukládá ke konci každého roku částku 12000 Kč na účet s roční úrokovou mírou 2 % a s ročním úrokovacím obdobím. Jak vysokou částku bude mít na účtu za 5 let? Daň z úroků neuvažujme.

Řešení: Při výpočtech budeme vycházet z principů složeného úrokování.

Částka na konci 1. roku: 12 000 Kč.

Částka na konci 2. roku: částka vložená koncem 1. roku s hrubým úrokem za 2. rok + částka vložená na konci 2. roku:
 $12\,000 \cdot (1 + 0,02)$ Kč + 12 000 Kč.

Částka na konci 3. roku: částka vložená koncem 1. roku s hrubým úrokem za 2. a 3. rok + částka vložená na konci 2. roku s hrubým výnosem za 3. rok + částka vložená na konci 3. roku:
 $12\,000 \cdot (1 + 0,02)^2$ Kč + $12\,000 \cdot (1 + 0,02)$ Kč + 12 000 Kč.

Částka na konci 4. roku: částka vložená koncem 1. roku s hrubým úrokem za 2., 3. a 4. rok + částka vložená na konci 2. roku s hrubým výnosem za 3. a 4. rok + částka vložená na konci 3. roku s hrubým úrokem za 4. rok + částka vložená ke konci 4. roku:

$$12\,000 \cdot (1 + 0,02)^3 \text{ Kč} + 12\,000 \cdot (1 + 0,02)^2 \text{ Kč} + \\ + 12\,000 \cdot (1 + 0,02) \text{ Kč} + 12\,000 \text{ Kč}.$$

Částka na konci 5. roku: částka vložená koncem 1. roku s hrubým úrokem za 2., 3., 4. a 5. rok + částka vložená na konci 2. roku s hrubým výnosem za 3., 4. a 5. rok + částka vložená na konci 3. roku s hrubým úrokem za 4. a 5. rok + částka vložená ke konci 4. roku s hrubým úrokem za 5. rok + částka vložená ke konci 5. roku:

$$12\,000 \cdot (1 + 0,02)^4 \text{ Kč} + 12\,000 \cdot (1 + 0,02)^3 \text{ Kč} + 12\,000 \cdot (1 + 0,02)^2 \text{ Kč} + \\ + 12\,000 \cdot (1 + 0,02) \text{ Kč} + 12\,000 \text{ Kč}.$$

Pro výpočet naspořené částky (= úložky + úroky), kterou bude mít po pěti letech pan Veselý na účtu, použijeme vzorec pro součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti

$$\left(12\,000 \cdot (1 + 0,02)^{n-1} \right)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{kde } a_1 = 12\,000, \quad q = 1 + 0,02.$$

Tedy

$$S = s_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 12\,000 \cdot \frac{(1 + 0,02)^5 - 1}{1 + 0,02 - 1} = 62\,448,50 \text{ Kč.}$$

Pan Veselý bude mít po 5 letech na svém účtu 62 448,50 Kč.

Opět zadání příkladu 3 zobecníme.

Příklad 4

Pan Veselý ukládá ke konci každého roku částku a Kč na účet s roční úrokovou mírou i (vyjádřeno jako desetinné číslo) a s ročním úrokovacím obdobím. Jak vysokou částku bude mít na účtu za n let? Daň z úroků neuvažujme.

Řešení: V tabulce 5 máme zaznamenány zhodnocené jednotlivé úložky na konci n -tého roku. Při výpočtu jsme použili vzorec pro složené úrokování (viz např. [1]).

Tab. 5 Zhodnocené úložky na konci n -tého roku

Pořadí úložek	Počet úrokových období, po které je úložka uložena	Zhodnocená úložka na konci n -tého roku
1	$n - 1$	$a \cdot (1 + i)^{n-1}$
2	$n - 2$	$a \cdot (1 + i)^{n-2}$
3	$n - 3$	$a \cdot (1 + i)^{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	1	$a \cdot (1 + i)$
n	0	a

Na konci n -tého roku pan Veselý obdrží částku S , kde

$$S = a \cdot (1 + i)^{n-1} + a \cdot (1 + i)^{n-2} + a \cdot (1 + i)^{n-3} + \dots + a \cdot (1 + i) + a.$$

K výpočtu naspořené částky S stačí zjistit součet prvních n členů geometrické posloupnosti

$$\left(a \cdot (1 + i)^{n-1} \right)_{n=1}^{\infty},$$

ve které platí: $a_1 = a$, $q = 1 + i$.

Tedy

$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1} = a \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Pan Veselý bude mít na účtu ke konci n -tého roku částku

$$S = a \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \text{ Kč.}$$

Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření při spoření předlhučným

Příklad 5

Pan Veselý ukládá na začátku každé m -tiny roku x Kč na účet s roční úrokovou mírou i (vyjádřeno jako desetinné číslo) a s ročním úrokovacím obdobím. Jak vysokou částku bude mít na účtu za n let? Daň z úroků neuvažujme.

Řešení: Na konci každého roku bude mít pan Veselý z úložek, které během roku uloží, částku

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m + 1}{2m} \cdot i \right).$$

Jedná se o krátkodobé spoření předlhuční (viz vzorec (1)). Nyní jsme úlohu převedli na dlouhodobé spoření polhluční, kdy ke konci každého roku po dobu n let ukládáme místo částky a Kč částku S_x Kč. To znamená, že do vzorce pro dlouhodobé spoření polhluční (2) dosadíme místo částky a Kč částku S_x Kč. Po dosazení obdržíme

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m + 1}{2m} \cdot i \right) \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Závěr

V tomto článku byly podány základní informace ohledně penzijního připojištění, které by měli studenti gymnázia získat jednak ve vzdělávací oblasti *Člověk a svět práce*, jednak ve vzdělávací oblasti *Matematika a její*

aplikace. Studenti vybaveni příslušnými informacemi, by měli umět posoudit, zda třetí pilíř důchodové reformy (stávající penzijní fondy) je pro jejich budoucí zabezpečení v důchodu přínosem.

L i t e r a t u r a

- [1] *Odvárko, O.*: Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. Prometheus, Praha 2005.
- [2] *Petrášková, V.*: Pěstování finanční gramotnosti ve vzdělávání středoškoláků. Matematika, fyzika, informatika, roč. 19 (2009/2010), č. 3.
- [3] *Petrášková, V.*: Znalost problematiky hypotečních úvěrů – nezbytná součást finanční gramotnosti. Matematika, fyzika, informatika, roč. 20 (2010/2011), č. 4.
- [4] MF ČR. Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách [online]. Praha: Ministerstvo financí ČR, c2007 [cit. 2011–07–25]. Dostupné z <<http://www.mfcr.cz>>.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 5. 2012 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 187

Je dána úsečka KL a bod S , který na ní neleží. Najděte množinu všech vrcholů B a C rovnostranných trojúhelníků ABC takových, že $A \in KL$ a S je středem AB .

Šárka Gergelitsová

Úloha 188

Najděte všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro něž je každé z čísel a, b, c dělitelem čísla $a + b + c$.

Robert Geretschläger (Graz)