

Jak žáci a studenti chápou nekonečno?

JIŘÍ CIHLÁŘ – PETR EISENMANN – MAGDALENA KRÁTKÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

1. Úvod

Pojem nekonečno je klíčovým pojmem v matematice i jejím vyučování. Rozvíjení poznatků o nekonečnu tvoří v historii matematiky ve všech kulturách zásadní mezníky důležité pro její další vývoj. Přijmeme-li hypotézu tzv. *genetické paralely*, lze předpokládat, že překážky, které nalezneme ve fylogenezi koncepce nekonečna, nalezneme i v ontogenezi, a že překonávání těchto překážek je nutnou komponentou poznávacího procesu jedince.

Nekonečno má mnoho různých podob. Tuto spleť navzájem propojených projevů jsme se pokusili strukturovat a vyčlenili jsme těchto šest atributů: mohutnost množiny, omezenost množiny, míra množiny, uspořádání, nekonečný proces a konvergence. Na vhodných objektech aritmetiky a geometrie jsme sledovali, jak probíhá vývoj představ o nekonečnu v současné populaci od počátečních elementárních představ až po představy užívané současnou školskou matematikou.

Cílem tohoto článku je upozornit čtenáře – učitele na několik důležitých překážek v porozumění nekonečnu, se kterými se může běžně setkat při výuce nejrozumnějších partií. Naše závěry opíráme především o dlouhodobý výzkum¹, který probíhal formou experimentálních rozhovorů a dotazníko-

¹Výzkum probíhal současně ve dvou rovinách. Za prvé jsme vedli s respondenty ve věku od 9 do 21 let řízené experimentální rozhovory. Za druhé jsme formou hromadného dotazníkového šetření zjišťovali prvotní reakce žáků v úlohách vyžadujících užití představ souvisejících s pojmem nekonečno. Respondenti odpovídali písemně a anonymně. V průběhu roku 2008 proběhlo dotazníkové šetření celkem u 1388 žáků základních a středních škol v šesti věkových kategoriích (8, 10, 12, 14, 16 a 18 let) na různých typech škol. V každé věkové kategorii byl zhruba stejný počet respondentů.

vého šetření u žáků a studentů od 9 do 21 let, ale také o zkušenosti řady učitelů, kteří s námi v průběhu výzkumu spolupracovali.

2. Překážky a jejich překonávání

Ve výuce máme všichni vytipovány jakési krizové partie, kde ze zkušenosti víme, že zde budou mít žáci problémy, popřípadě se tu objeví „klasické“ chyby, které titíž žáci mnohokrát opakují, apod. Na tyto zákonitosti „chyb“ začala teorie překážek hledět nejen jako na nutnou, ale dokonce stěžejní pozitivní součást učení a pomocí nich modeluje utváření znalostí. My jsme využili tuto teorii pro vysvětlení složité individuální cesty žáka od prvotních představ k představám (více či méně) blízkým ideálním matematickým pojmům vystavěným na nekonečnu.

Překážku chápeme jako soubor znalostí ukotvených ve znalostní struktuře žáka, které lze v jistých situacích úspěšně používat, ale které v novém kontextu selhávají a dávají špatné výsledky. Pro zvládnutí dalších představ je třeba překážku překonávat. Avšak to je právě to, co není tak jednoduché. Překážku nepřekonáme žádným „dodáním informace“ nebo „nacvičením chybějící dovednosti“. Je ji třeba opravit v celé řadě významů, které jsou spojené s mnoha nástroji, tvrzeními i algoritmy. Právě proto, že překážka je ukotvená znalost, dává smysl v tolika situacích a brání se změně.

Teorie překážek navíc předpokládá, že určité milníky ve vývoji daného pojmu není možné minout. Tato stádia přímo utvářejí daný pojem, a tudíž je možné je nalézt nejen v historii, ale také ve vývoji porozumění tomuto pojmu žákem. Takové překážky označujeme jako epistemologické. (V češtině se věnuje této problematice publikace [4].)

Významným pomocníkem při překonávání překážek je navození *kognitivního konfliktu*. Je to situace, kdy si žák sám uvědomí nějaký spor ve své znalostní struktuře, tedy konflikt mezi nesprávnou odpovědí, která je důsledkem použití překážky a nějakou jinou jeho znalostí.

V ideálním případě se nám nejprve podaří nastolit takovou situaci, kdy se žák do kognitivního konfliktu dostane. A budeme-li optimisté ještě chvíli, tak se ho žák bude snažit i odstranit. V tom nejlepším případě se mu to podaří (a my jsme spokojeni a ničeho si vlastně ani nevšimneme). Ovšem to se nestává často. Mnohem častěji dojde k tomu, že si žák neví rady a ponechá si oba nekonzistentní závěry. Neví totiž, kterou znalost by měl poopravit. I to můžeme ale později zúročit. Nebo se žák snaží (alespoň z části) přizpůsobit nesprávné tezi z konfliktu a chybně koriguje správné znalosti. Překážka se tedy nemění vůbec nebo se mění nežádou-

cím způsobem a dále přetrvává. V praxi bohužel dochází také k tomu, že žák převezme řešení nabízené učitelem, ale jen mechanicky, bez pochopení a tudíž není schopen ho použít v jiném kontextu. V ostatních kontextech žák i nadále používá (nezměněnou) překážku, která byla jen zdánlivě překonaná. Podrobnější rozpracování teorie kognitivního konfliktu je uvedeno v [1] či [5].

Z toho tedy vyplývá, že naším úkolem je znovu a znovu připravovat situace tak, aby se žáci v kognitivních konfliktech ocitali a aby je odstraňovali, a to v nejrůznějších kontextech. Že to je nesnadný úkol ilustruje následující úryvek rozhovoru. Lenka, studentka 3. ročníku gymnázia, řešila známou úlohu: Platí $0,\overline{9} < 1$ či $0,\overline{9} = 1$? Vysvětlí proč. Mnoho studentů odpovídá stejně jako ona: *Platí to první. Protože nula celá devět desetin periodických není stejný jako jednička, protože to je o kousíček menší, je to menší číslo.* Nejprve jsme se pokusili navodit kognitivní konflikt pomocí otázky o rozdílu $1 - 0,\overline{9}$. To se ale nepodařilo. Za Lenčinou odpovědí stojí totiž několik znalostí nebo představ. Jednak je to domněnka *Když to začíná nulou, tak to nemůže být stejně jako jednička*, která vychází z osvědčené znalosti o porovnávání desetinných čísel s ukončeným rozvojem. Dále je to představa o nekonečném počtu devítek v desetinném rozvoji. Pro Lenku *je jich tam prostě hodně, strašně moc.* A v neposlední řadě Lenka nepřipouští možnost dokončení nekonečného procesu, protože *i když těch devítek tam bude hrozně moc, tak tam přece vždycky ještě do té jedničky bude kousíček chybět, nikdy tam úplně do té jedničky nedojdu.* Pokusili jsme se tedy navodit kognitivní konflikt jinak, a to známým postupným vyjadřováním zlomků $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}$ jako desetinných čísel, kdy u posledního zlomku dostaneme rovnost $\frac{9}{9} = 0,999 \dots = 0,\overline{9}$. Lenka byla schopná porozumět postupu i záměru, kognitivní konflikt se navodit podařilo. Ale jeho řešení bylo pro Lenku nemožné, uzavřela naše snažení slovy: *No. Já si myslím, že to nemá být rovno, protože když to začíná 0,9, tak to nemůže být rovno jedny, (3) ale přes ten zlomek to rovno je.* Zmíněný postup neatakoval totiž žádnou ze znalostí, o které Lenka opírala své přesvědčení o nerovnosti mezi čísly $0,\overline{9}$ a 1. Předvedením nějakého podobného triku tedy naše práce podnětného učitele nekončí, naopak tady začíná.

3. Pojetí existence objektů a vnímání obzoru a jeho polohy – hlavní zdroje epistemologických překážek

Ještě než se dostaneme ke konkrétním překážkám v porozumění nekonečnu, všimněme si dvou obecných principů, které se neodmyslitelně váží

k matematickému uvažování a na které tudíž neustále narážíme, zajímáme-li se o nekonečno. Je to pojetí *existence objektů* a problematika *obzoru a jeho polohy*.

Pro zdárný průběh učebního procesu má klíčovou roli zjištění toho, jak ten či onen žák chápe existenci objektů. Přitom případné poopravení těchto žákových názorů patří mezi významné cíle celého učebního procesu.

Děti na počátku učebního procesu přistupují k jevům naprosto subjektivně. Přisuzují existenci těm objektům, které mohou evidovat tělesnými smysly, a to bezprostředně. Například zeptáme-li se dítěte, zda nějaká daná úsečka AB má střed, odpoví, že ne, dokud není tento střed sestrojen. Tedy teď úsečka střed nemá, ale za chvíli by ho mohla mít. Aby ho měla, buď musí být již sestrojen, anebo ho musí dítě (fyzicky) sestrojít. Tuto potřebu vykonání nazýváme *principem tvůrce*.

V dalším stádiu žák na stejnou otázku už odpovídá, že úsečka střed má, ale další body nevidí, popřípadě jich vidí jen nějaký malý počet, zopakuje-li v myšlení konstrukci středu. Jde stále o princip tvůrce, i když v jeho zeslabené podobě. Žák totiž stále potřebuje vědět, jak se daný objekt vytvoří. Avšak už nemusí být oním tvůrcem, dokonce ani nemusí být objekt fyzicky sestrojen. Stačí, když je mu znám postup konstrukce. Pro takového žáka nemůže být na úsečce nekonečně mnoho bodů, protože neexistuje postup, jakým by byly sestrojeny. Odpověď takového dítěte lze pak charakterizovat vyjádřením *Na úsečce bude tolik bodů, kolik se jich tam vejde, asi tak 30*. V jeho představě totiž probíhá proces konstrukce těchto bodů. Tento způsob uvažování lze přirovnat k uvažování Eukleidovu. Ten samozřejmě nepovažuje úsečku za množinu bodů. Body jsou pro něj buď ty, které jsou významné (krajní body úsečky, vrcholy čtverce) nebo ty, které jsou konstruovány v [3].

Podobně se princip tvůrce může objevit, když dítě odpovídá na otázku, zda je nějaká (relativně početná) množina konečná či nekonečná. Jeho argumentace totiž stojí většinou na představě, že by on sám měl fyzicky spočítat prvky dané množiny.

To, zda dítě považuje nějakou množinu za konečnou nebo nekonečnou, souvisí také s tím, kde je umístěn jeho „vnitřní“ obzor. Obzor je pojem ryze subjektivní – je to hranice našeho pohledu, ať už smyslového nebo „prodlouženého znalostmi“, a zároveň mez rozdělující „viditelnou část světa od neviditelné“. Překročíme-li nějaký obzor, znamená to, že rozšíříme viditelnou část, a to, co se předtím jevilo jako nekonečné, se už nekonečným nejeví, viz [6].

Příkladem je častá odpověď žáků na otázky týkající se mohutnosti početných reálných množin, například zrníček písku na Zemi. Překvapivě velká část žáků i středoškolských studentů se domnívá, že zrníček musí být nekonečně mnoho, protože jsou nepředstavitelně malinká – tj. jsou za jejich obzorem při pohledu do hloubky – a kdybychom je chtěli nějak uspořádat, pak by se taková množina táhla až za obzor při pohledu do dálky.

Například Michal (15 let) u většiny otázek týkajících se mohutnosti reálných množin reagoval slovy: *Nedají se spočítat, těch je nekonečně*. Takto argumentoval i tam, kde by ono spočítání reálně proveditelné bylo (např. zrníčka písku na polévkové lžici nebo mravenci v jednom mraveništi). Při dotazu na počet všech lidí na světě však Michal nezaváhal: *Těch je konečně mnoho, vždyť to se provádí, to je to sčítání domů, bytů a lidí*. Michal svůj obzor překročil tím, že již slyšel o sčítání všech lidí na světě. Proto je pro něj tato množina konečná, oproti tomu množina všech zrníček písku nebo mravenců v mraveništi se i nadále táhne za jeho obzor, proto je pro něj nekonečná.

Uvědomíme-li si přítomnost obzorů a možnost jejich překračování – nalezneme-li onen společný princip překonávání našich obzorů – objevíme klasické nekonečno. Tak k němu přistupoval Eukleides, když požadoval, aby jakákoli úsečka byla prodloužitelná tak, jak potřebujeme, nebo když formuloval tvrzení o množství prvočísel slovy „Prvočísel je více než jakékoli dané množství“. Vyslovil tak požadavek, že jakýkoli obzor může být překročen. Je zřejmé, že se v tomto případě jedná o nekonečno potenciální – neříká se totiž, že jsou již všechny obzory prolomeny. Takový přístup – v podstatě umělý, neboť v reálném světě je nemožný – potřebujeme teprve při přijetí aktuálního nekonečna.

4. Překážky

V této části uvedeme podrobněji ty překážky, se kterými se učitel při výuce může běžně setkat. Rozděleny jsou do následujících čtyř skupin:

- znalosti o konečných množinách,
- záměna objektu s jeho modelem,
- znalosti o konečných procesech, potenciální vnímání nekonečného procesu,
- znalosti o uspořádání množiny přirozených čísel.

V každé skupině je většinou jedna vybraná překážka rozebrána podrobněji, ostatní jsou jen stručně vysvětleny či ilustrovány příkladem.

4.1 Znalosti o konečných množinách

Na počátku školní docházky má žák zkušenosti pouze s konečnými množinami (zná malá přirozená čísla, pojem čísla mu splývá s počtem prvků konečné množiny). Setkává se pouze s nepříliš početnými množinami z reálného světa, na základě elementárních představ o „velikosti“ je umí intuitivně porovnávat (*Maruška má víc bonbónů než já*).

Později se setkává s více početnými množinami, učí se pojmenovávat počet jejich prvků, rozšiřuje si obor přirozených čísel o záporná, racionální a iracionální čísla, seznamuje se s číselnými operacemi. V geometrii se setkává s bodovými množinami, kterým přiřazuje míru a vnímá je jako omezené či neomezené.

Prvním reprezentantem nekonečných množin je pro žáky množina všech přirozených čísel. Nejprve je chápána (podobně jako přímka) jako „neomezeně prodlužovatelná“ (ke každému číslu existuje ještě větší číslo), tedy ve smyslu potenciálního nekonečna. Pozdější přijetí existence této množiny jako aktuálně nekonečné je spojeno též s akceptováním existence nekonečného procesu. Vytváření dalších pojmů spojených s nekonečnem podstatně závisí na tom, zda se vytvoří tato představa aktuálně nekonečné množiny přirozených čísel.

Znalosti o konečných množinách žáci někdy neoprávněně přenášejí i do oblasti nekonečných množin. Mají často problém odlišit velmi početné množiny, které jsou za jejich obzorem, od klasicky nekonečných množin. Obvykle používají představu, že prvky konečné množiny „lze spočítat“, a tedy nelze-li prvky množiny spočítat, prohlašují množinu za nekonečnou. Jejich argumentace ale bývá někdy opřena o představu, že by oni sami měli fyzicky spočítat prvky dané množiny (princip tvůrce), teprve později se objevuje další stádium, kdy již operují s pouze principiální možností spočítání prvků dané množiny.

Například Martin (15 let) reagoval v rozhovoru na otázku *Je zrněk v poušti konečně nebo nekonečně mnoho?* slovy: *Nedají se spočítat, těch je nekonečně*. Při dotazu na počet všech lidí na světě však Martin říká: *Těch je ale konečně mnoho, to se přece spočítalo, těch je asi pět miliard*. Při dotazu na počet všech atomů na Zemi Martin říká: *Atomů je jen tady třeba v téhle tužce několik miliard, to se ani nedá spočítat, těch je nekonečně*.

V pozadí těchto úvah žáků je následující překážka:

Prvků množiny je nekonečně mnoho, když se nedají reálně spočítat

V dotazníkovém šetření diagnostikovaly přítomnost této překážky mimo jiné tyto dvě položky:

Je všech živých tvorů na Zemi konečně nebo nekonečně mnoho?

Je všech molekul na Zemi konečně nebo nekonečně mnoho?

Závislost četnosti odpovědi *Nekonečně mnoho* na věku uvádí tabulka 1.

Tabulka 1

Věk	10	12	14	16	18
živí tvorové		46 %	22 %	24 %	20 %
molekuly	75 %	62 %	52 %	45 %	50 %

Je zřejmé, že tato překážka je rezistentní. U relativně velkého počtu žáků se její vliv projevuje až do maturity. Rozdíl v četnosti odpovědi *Nekonečně mnoho* v obou kontextech je dán tím, že pod slovem molekuly se žákům a studentům vybavují menší, ještě méně přehledné objekty. Ty zůstávají za jejich obzorem.

Je třeba zdůraznit, že věk, v němž žák přechází od představy reálného spočítání prvků dané množiny ke schopnosti operovat s principiální možností spočítání prvků, je velmi variabilní. Schopnost takto uvažovat je daleko méně závislá na věku dítěte než schopnost správně posuzovat jiné atributy nekonečna. Ve svém výzkumu jsme se setkali se studenty maturitních ročníků gymnázia, kteří velice sverepě obhajovali svůj názor, že zrníček písku na pískovišti či brouků na zahradě je nekonečně mnoho, stejně jako s devítiletými dětmi, které měly v otázce mohutnosti reálných množin zcela jasno. Příkladem budiž následující úryvek rozhovoru s Klárou, maturantkou jednoho ústeckého gymnázia.

E21: *Co pro vás znamená, že je něčeho nekonečně mnoho?*

K22: *No když to nedovedu spočítat.*

E23: *Hm. Tady píšete, že je nekonečně hvězd.*

K24: *(3) No tak, těch bude, protože ty neumíme spočítat.*

E25: *Hm. A lidí na Zemi?*

K26: *(4) No. (2) To bysme asi měli umět spočítat.*

E27: *No tak, co myslíte, je lidí nekonečně mnoho anebo ne?*

K28: *Tak těch je asi konečně, protože se to dá spočítat.*

E29: *A co atomů, všech atomů tady v té místnosti?*

- K30: *Tak těch je nekonečně mnoho.*
 E31: *Proč?*
 K32: *Protože jsou úplně malinký.*
 E33: *Hm. A zrníček písku? Na poušti? Na jedný nějaký konkrétní poušti.*
 K34: *(4) Těch je taky nekonečně mnoho, to se nedá spočítat.*

Pro Kláru znamená *spočítat* reálně spočítat, reálně proces počítání uskutečnit. Pro „málo početné“ množiny se principiální možnost a reálná možnost pochopitelně překrývají. Ale co víc, překrývají se i pro nekonečné množiny. V těchto kontextech je tedy Klára utvrzována, že je její znalost správná. Právě tato znalost – tedy porozumění významu *Lze spočítat* jakožto reálné možnosti spočítání – je pro ni překážkou.

Opačným příkladem je reakce devítileté Mařenky, žákyně třetí třídy, která v podobném rozhovoru například na otázku po počtu *všech zrníček, která jsou na všech pouštích na celém světě*, reaguje slovy: *Těch není nekonečně mnoho. Když skončí ta poušť, tak skončí ty zrnka. I kdybych to počítala, tak bych nenapočítala nekonečno. Někdy by to muselo skončit, to počítání.*

Z propedeutického hlediska je vhodné s žáky o konečnosti a nekonečnosti podobných, početných množin z reálného světa diskutovat. Mají-li mít později v této otázce jasno, musí mít možnost v tomto směru atakovat své možné budoucí překážky.

Dalšími překážkami této skupiny, se kterými je možné se u žáků běžně setkat, jsou tyto:

Když je množina omezená, pak je konečná, když je neomezená, pak je nekonečná

V dotaznících i rozhovorech jsme se často setkávali s tím, že i studenti maturitních ročníků gymnázií obhajovali svůj názor, že úsečka či kružnice libovolné délky sestává z obrovského, ale konečného počtu bodů, zatímco na přímce je bodů nekonečně.

Menší množina (ve smyslu míry) má méně prvků

Žáci, v jejichž vědomí figuruje tato překážka, zastávají např. názor, že úsečka délky 10 cm se skládá z méně bodů než úsečka dvakrát delší. Podobně studenti středních škol odpovídají na následující úlohu slovy *Ta druhá, má delší interval, tam je jich víc* a podobně.

Řešením nerovnice $|x + 1| \leq 1$ je interval $\langle -2; 0 \rangle$. Řešením nerovnice $|x - 10| \leq 10$ je interval $\langle 0; 20 \rangle$. Která nerovnice má více řešení? Vysvětli proč.

Je pozoruhodné, že tato překážka se jeví jako rezistentní. Vyskytuje se u všech položek asi u jedné třetiny žáků ve všech sledovaných věkových kategoriích.

Vlastní podmnožina obsahuje méně prvků

Je přirozené, že tato znalost platná v kontextu konečných množin dlouho ve vědomí studentů přetrvává. Ukazuje se, že i tam, kde učitel ideu ekvivalence, vzájemného přiřazení, studentům prozradí a vysvětlí, pouze u malé části studentů dojde například k pochopení toho, že množiny sudých a přirozených čísel jsou ekvivalentní.

Číslo znamená počet prvků (existují pouze čísla přirozená)

Výskyt této překážky ve vědomí respondentů zjišťovaly v dotazníkovém šetření např. tyto úlohy:

Jaké je nejmenší číslo větší než nula?

Existuje nějaké číslo mezi 0 a 1? Pokud ano, napiš nějaké.

Výskyt této překážky v závislosti na věku má zpočátku klesající tendenci. To je přirozené, neboť žáci se postupně seznamují především prostřednictvím desetinných čísel s čísly racionálními, objevuje se zobrazení bodů přímky na obor reálných čísel. Od věku přibližně 14 let je pak tato překážka rezistentní. Je zajímavé, že zhruba 15 % středoškoláků má prvotní představu čísla stále jako čísla přirozeného. Takoví studenti odpovídají například na první úlohu i v maturitním ročníku slovem *Jedna*.

4.2 Záměna objektu s jeho modelem

Jedná se o situaci, kdy nějakému objektu, z pohledu matematiky čistě abstraktnímu, jako je např. úsečka, přisuzuje jedinec (některé) vlastnosti jejího modelu, nejčastěji obrázku. V první fázi se můžeme setkat s úplným ztotožněním obrázku a znázorňovaného abstraktního objektu. To, že jedinec postupně abstrahuje od reálného k ideálnímu, znamená, že některé vlastnosti obrázku potlačuje a nepřisuzuje je již dále ideálnímu objektu. Např. chápe, že i když se nám nedaří narýsovat opravdu rovnou čáru, „skutečná“ úsečka je „dokonale“ rovná. Jiné vlastnosti obrázku jakožto modelu ale přetrvávají, např. představa o tloušťce úsečky. Podobně přímka

je nejprve jen omezená nositelka bodů, teprve postupně se vytváří představa jejího libovolného prodlužování, podobně jako ji používal Eukleides. Dále se žák seznamuje s jednoduchými geometrickými konstrukcemi, vždy se ale jedná o konečné procesy. Je-li přímka či úsečka později chápána jako množina bodů, přenáší se představy o uspořádání diskrétních množin do tohoto geometrického kontextu a bodu je často připisován rozměr. Je vnímán jako „korálek na šňůrce“. Představa kontinua se vytváří spolu s rozvíjením představ o číslech daleko později.

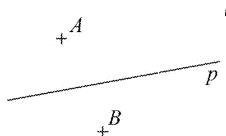
Překážka Záměna objektu s jeho modelem vychází z obou zdrojů překážek, tj. jak z principu tvůrce, kdy existenci přisuzujeme jen zkonstruovaným, tj. nakresleným objektům nebo objektům nějak významným, a také z polohy obzoru, kdy ztotožnění objektu s jeho obrázkem brání k pronikání za obzor jak do dálky, tak do hloubky. Typickým příkladem je následující překážka.

Přímka je rovná čára naryšovaná na papíře

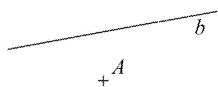
V dotazníkovém šetření diagnostikovaly přítomnost této překážky například tyto dvě úlohy:

Je možné spojit body A a B nějakou čarou tak, aby neprotínala přímku p ? Vysvětlí proč, případně nakreslí (text doprovází obr. 1).

Je dána přímka b a bod A , který na ní neleží. Sestrojte úsečku AB tak, že bod B leží na dané přímce b a úsečka AB je co nejdelší (text doprovází obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

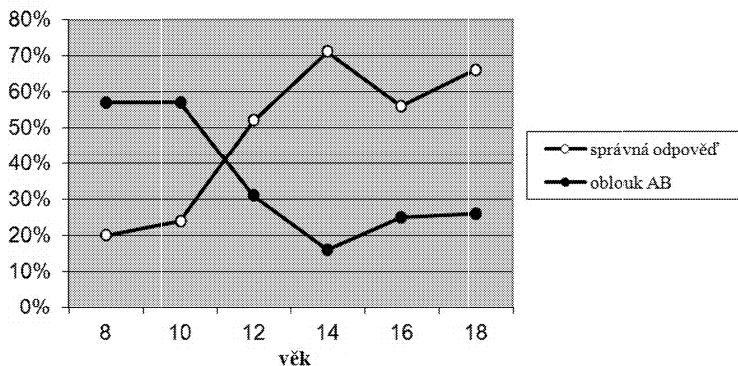
Respondenti, v jejichž vědomí se vyskytuje uvedená překážka, kreslili v první úloze oblouk vpravo či vlevo kolem obrazu přímky, spojující body A a B . U druhé úlohy načrtli úsečku AB tak, že bod B byl umístěn na konci úsečky znázorňující na obrázku přímku b . Četnost takových odpovědí je uvedena v tabulce 2.

Tabulka 2

Věk	8	10	12	14	16	18
Spoj A a B	57 %	57 %	31 %	16 %	25 %	26 %
Sestroj úsečku AB			35 %	31 %	37 %	37 %

Je pozoruhodné, že překážka se jeví i zde jako poměrně rezistentní. Zaznamenáváme ji u více než poloviny dětí na 1. stupni a přibližně u třetiny žáků od 12 let až do konce jejich docházky na střední školu.

Zajímavým jevem je významný pokles sledované nesprávné odpovědi u první úlohy (nakreslený oblouk spojující body A a B) u žáků devátých tříd a zároveň jejich vyšší úspěšnost. Téměř tři čtvrtiny deváťáků zde odmítly body spojit. Polovina z nich navíc s vysvětlením, že přímka p je přece neomezená. Souvislost ilustruje následující obr. 3:

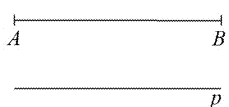


Obr. 3

Tento jev popisujeme jako *výraznou poruchu očekávaného vývoje úspěšnosti*. Byl zaznamenán celkem u třetiny všech položek dotazníku. Není jednoduché jej vysvětlit. Pokusíme se o to v závěru článku.

Jak již bylo konstatováno, překážka Přímka je rovná čára narýsovaná na papíře přetrvává u některých jedinců do relativně pozdního věku. Příkladem je Jana (18 let), studentka střední odborné školy. Přes velmi dobré reakce u většiny položek rozhovoru má Jana (premiantka třídy) jednoznačně představu přímky jako jejího obrazu na papíře, tj. nakreslené úsečky. Na otázku z první úlohy odpovídá slovy:

- J74: *Podle mě ne, protože nevíme, jak je ta přímka dlouhá.*
 E75: *To znamená, že přímky jsou různě dlouhé?*
 J76: *Ano.*
 E77: *To znamená, že nějaká přímka má délku třeba 10 kilometrů a jiná 2 centimetry?*
 J78: *Třeba.*
 E79: *A jakej je teda rozdíl mezi přímkou a úsečkou?*
 J80: *Úsečka je ohraničená dvěma body.*
 E81: *A přímka?*
 J82: *Ta není ohraničená.*
 E83: *A mohla byste tedy prosím teď nakreslit úsečku, třeba AB, která má délku 10 centimetrů a pod to přímku p, která má délku 10 centimetrů?*
 J84: *Jo (kreslí obr. 4.)*



Obr. 4

Další překážky této skupiny, se kterými je možné se u žáků a studentů běžně setkat, nepotřebují vysvětlení. Jedná se o tyto překážky: Bod má velikost. Čáry (úsečky, přímky, kružnice) mají šířku. Bodem je pouze význačný bod objektu (krajní body úsečky, střed kružnice, apod.).

Obecně lze konstatovat, že od konce základní školy se pohybuje četnost výskytu těchto překážek okolo 15 %. Je zajímavé, že i zde zaznamenáváme jejich nejmenší vliv v deváté třídě základní školy. Jak již bylo řečeno, pokusíme se vysvětlit tento jev v závěru článku.

4.3 Znalosti o konečných procesech, potenciální vnímání nekonečného procesu

Žáci se v průběhu školní docházky nejprve setkávají s konečnými procesy, speciálně s algoritmy. Vytvářejí pomocí aritmetických operací například konečné součty či součiny, provádějí algoritmy číselných operací s přirozenými a desetinnými čísly v desítkové soustavě, eukleidovské konstrukce, atd. Také objekty, které se v matematice definují induktivně (mocniny s přirozeným exponentem, formule výrokového počtu, atd.), jsou ve

vyučování obvykle představovány formou příkladů jako objekty vznikající konečným procesem. Objekty, pro jejichž definici či konstrukci je třeba nekonečný proces (na základní škole periodické desetinné rozvoje, na střední škole pak limity a řady, atd.), jsou často probírány jen zjednodušeně, protože je třeba učinit náročný abstrakční zdvih k nekonečnému procesu. Nekonečný proces je abstrakce, vzniklá „prodloužením“ konečného procesu, neexistuje (podobně jako nekonečná množina) v reálném světě, ale pouze v naší mysli.

Připustí-li pak žáci existenci objektů vzniklých nekonečným procesem, například desetinný zápis čísla $1/3$ či geometrickou řadu, mohou je vnímat dvojím způsobem: potencióálně či aktuálně. Potenciálním pojetím nekonečného procesu se zjednodušeně řečeno rozumí neomezená možnost pokračovat, jít stále dále. Můžeme uvádět další a další prvky množiny přirozených čísel, vypočítávat stále další číslice desetinného rozvoje, libovolně podle potřeby prodloužovat úsečku, atd. Obzor, který byl pevným, se stává pohyblivým, ale pořád je přítomen. Na rozdíl od tohoto přístupu je při aktuálním pojetí nekonečný proces „dokončen“, obzor „zmizí“, všechny jeho předchozí pozice jsou prolomeny. Žáci si představují nekonečné množiny, nekonečné desetinné rozvoje, řady, atd. v definitivním „ukončeném tvaru“ jako „jeden celek“. Přejchod od potenciálního chápání nekonečna k aktuálnímu je dalším náročným abstrakčním zdvihem. Pokud jej žák doposud neuskutečnil, nemůže dobře porozumět některým úvahám, se kterými se ve vyučování setkává. Například axiom, který je základem postupu důkazů matematickou indukcí,

$$T(0) \wedge (\forall k) (T(k) \Rightarrow T(k+1)) \Rightarrow (\forall n) T(n)$$

má svůj předpoklad formulován „potenciálně“, ale jeho závěr je formulován „aktuálně“.

Potenciální vnímání nekonečného procesu může být překážkou v situacích, kdy se studenti například setkají s nekonečnými řadami. Například studentka gymnázia Marta (17 let) říká: *Vždyť když sčítám čísla do nekonečna, tak to nejde sečíst, to nemá konec. Vždyť k tomu vždycky ještě něco připočítám.* Nebo Petr (16 let) vysvětluje: *Přece když přičtu ještě další číslo, tak se to vždycky zvětší, to se pořád zvětšuje, do nekonečna.* Podobně argumentuje při diskusi nad obrázkem ilustrujícím konvergenci geometrické řady se součtem 1 Jana (17 let): *To stejně ale nikdy není jedna, jenom se k té jedničce pořád přibližuju, ale nikdy to do ní nedojde,*

vždycky do ní bude ještě kousek chybět. V pozadí všech těchto výroků je následující překážka:

Nekonečný proces nemůže být dokončen (potenciální vnímání nekonečného procesu)

Při přechodu od potenciálního vnímání nekonečna k aktuálnímu se často u žáků setkáváme se zajímavým jevem.

Michal (15 let) například připouští, že ke každému přirozenému číslu existuje následovník, ale nevyplývá pro něj z toho nutně, že největší přirozené číslo neexistuje, je naopak přesvědčen o jeho existenci.

E51: *Jaké číslo je největší? Ty jsi tady v dotazníku napsal tohle, ležatou osmičku.*

M52: *No, nekonečno.*

E53: *Hm. (3) Hele, Michale, znáš nějaký hodně velký přirozený číslo?*

M54: *Já nevím, třeba (4) miliarda.*

E55: *A existuje ještě nějaký větší než miliarda?*

M56: *Jo, miliarda tři milióny.*

E57: *A ještě nějaký větší?*

M58: *No, jasně, vždycky můžu to číslo ještě zvětšit, třeba jen o jedničku.*

E59: *Počkej, počkej, to je divný. Ty jsi říkal, že největší číslo existuje, že je to nekonečno. Ale teď říkáš, že každý číslo můžu vždycky ještě zvětšit. Tak jak může být potom to nekonečno největší?*

M60: *No může, za ním už nic není.*

Michalův obzor již není pohyblivým obzorem, tedy nevnímá už přirozená čísla jako potenciálně nekonečná. Jeho přístup ale ještě není aktuální, kdy by obzor neexistoval. Jeho nový obzor – nekonečno (M52), je pevný a leží za všemi přirozenými čísly, je posledním obzorem, za nímž už nic není (M60).

Tento jev jsme nazvali *pozicí omega* (podle čísla ω , což je nejmenší ordinální číslo, které je větší než všechna přirozená čísla).

S tímto jevem jsme se setkali i u vysokoškolských studentů při rozho-vorech o čísle $0,\overline{9}$, kdy jsme se ptali, zda je toto číslo menší než 1 anebo je rovno číslu 1. Studenti (19 až 21 let, budoucí učitelé matematiky), na začátku obvykle bez zaváhání uvedli, že platí $0,\overline{9} < 1$. V průběhu dalšího hovoru pak byli přivedeni k otázce, jaký je rozdíl mezi 1 a $0,\overline{9}$, čemu je tedy rovno číslo $1 - 0,\overline{9}$? Studenti odpovídali vesměs obdobně:

Petra: *Tak to je nula celá* (píše 0,) *a tady by byly samý nuly* (ukazuje tužkou za desetinnou čárku) *prostě hodně nul a tady někde vzádu by byla nááá jednička* (píše 0,000 1).

Hynek: *Nula celá, (4) nula nula, no, a pak prostě někde v nekonečnu jednička.*

Zdeněk: *Nula celá, nekonečně mnoho nul a ještě plus ta jednička* (píše 0,01).

Hanka: Rozdíl $1 - 0,\overline{9}$ zapisuje jako 0,0.....1, ukazuje na tečky mezi 0 a 1 a říká: *Tam je právě to nekonečno, a za tím nekonečnem je ta jednička.*

Ve všech odpovědích je možné zaznamenat možnou přítomnost pozice omega. Abychom odlišili, jak studenti chápou „nekonečně mnoho“ nul mezi desetinnou čárkou a číslicí 1, položili jsme jim otázku, čemu bude roven desetinásobek jejich čísla $0,0 \dots 1$. Zaznamenali jsme dva druhy odpovědí.

Například Hanka říká: *Nula celá, nula nula a ta jednička se posune o jedno místo doleva* (ukazuje přitom tužkou v zápise $0,0 \dots 1$ před číslicí 1). Studenti, kteří odpověděli takto, vnímají onu poslední desetinnou cifru (zde jedničku) jako pohyblivý obzor, a počet nul chápou pouze jako potenciálně nekonečný.

Oproti tomu Zdeněk na stejnou otázku odpovídá: *No to bude to samý přece, těch nul tam je nekonečně mnoho, takže kdybych jednu ubral, tak jich je tam stejně nekonečně.* U studentů, odpovídajících stejně jako Zdeněk, se obzor neposunuje, zde se tedy skutečně jedná o pozici omega.

Poznamenejme, že podobné představy rozpracovává nestandardní pojetí reálných čísel, kde vedle klasických reálných čísel existují i nekonečně malé veličiny, viz [2].

Obecně lze říci, že pozice omega je jakýsi mezistupeň mezi potenciálním a aktuálním chápáním nekonečna, vzniká u některých žáků a studentů tehdy, když je jedinec nucen aktualizovat svůj potenciální přístup k nekonečnu. V té situaci by měl úplně zrušit obzor, který je přirozeným projevem potenciálního přístupu, ale on to neudělá, jen jej přesune do jakéhosi „nevlastního bodu“, do pozice, kde s ním již nelze posunovat.

4.4 Znalosti o uspořádání množiny přirozených čísel

Jak se u žáků a studentů rozvíjí představy o uspořádání? Děti se zpočátku setkávají s množinami s diskrétní strukturou. Mají jednoduché představy o uspořádání konečných množin, vnímají předcházení a následnost

(děje v pohádkách, říkadla atd.), postupně si vytvářejí představu lineárního uspořádání konečných úseků množiny přirozených čísel. Čísla vnímají pouze jako celá a kladná, domnívají se, že každé číslo má svého následovníka. Zkušenosti získané při pozorování množin z reálného světa kolem nich (např. fronta lidí čekajících v obchodě) je vedou k představě diskrétního uspořádání množin. Také určování počtu prvků nějaké množiny je často spojeno s uspořádáním, např. když děti počítají, kolik schodů má rozhledna. I později, po seznámení s čísly desetinnými, chápou zpočátku tato čísla jako diskrétně uspořádaná. Teprve později se jim číselná osa „zahušťuje“, poznávají, že mezi dvěma (libovolně blízkými) desetinnými či racionálními čísly leží nekonečně mnoho dalších čísel, že jejich uspořádání je husté. Představa kontinua reálných čísel je jen intuitivní, spojitost je spojena s představou plynulého pohybu.

V množině přirozených čísel platí, že každé nenulové číslo má svého předchůdce i svého následovníka. Tato znalost se může stát překážkou, přenesou-li ji žáci neoprávněně do kontextu desetinných, racionálních či reálných čísel, anebo do geometrického kontextu pro polohy bodů na přímce. V dotazníkovém výzkumu i v interview s žáky a studenty jsme se setkali s touto překážkou:

Každé číslo má svého předchůdce a následovníka, každý bod na přímce má své sousedy

V dotazníkovém šetření diagnostikovaly přítomnost této překážky mimo jiné tyto dvě položky:

Jaké je nejmenší číslo větší než nula?

Je dán čtverec $ABCD$. Nalezněte na jeho straně BC bod X takový, že trojúhelník ABX bude mít co nejmenší obsah.

Respondenti, v jejichž vědomí se vyskytuje uvedená překážka, odpovídali na první otázku 0,1, resp. 0,0001 (na počtu nul nezáleží), resp. 0,0.....01, resp. 0,01. Ve druhé úloze odpověděli *Těsně nad B* nebo se pokusili nakreslit bod X do obrázku v tomto duchu.

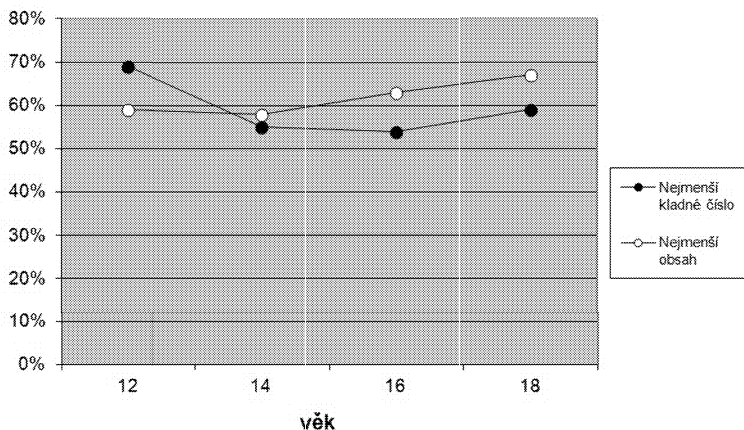
Následující obr. 5 vyjadřuje četnost uvedených odpovědí na příslušné položky.

Je pozoruhodné, že tato překážka se vyskytuje ve všech věkových kategoriích s poměrně vysokou frekvencí (cca 60 %).

V rozhovorech jsme se setkali i s relativně často se vyskytující překážkou:

Každá uspořádaná množina má minimum i maximum

Tato znalost, která produkuje správné výsledky v konečných uspořádaných množinách, je žáky a studenty přenášena i do nekonečných množin. Často se uplatňuje i jejich přesvědčení, že každá matematická úloha by měla být „pozitivně řešitelná“. Žáci pak mají tendenci hledat minima a maxima i u otevřených intervalů nebo mají potíže nalézt omezenou množinu, kde neexistuje minimum.



Obr. 5

5. Závěr

Na závěr se ještě zaměříme na ty překážky, které svým vývojem četnosti vzhledem k věku vykazují určitý trend. Dalo by se optimisticky a naivně předpokládat, že vliv překážek bude s přibývajícím věkem respondentů klesat. Je pozoruhodné, že toto očekávání se projevilo pouze u dvou překážek. Ty souvisí s principem tvůrce v jeho nejčistší podobě:

- Bodem je pouze význačný bod objektu a
- Číslo znamená počet prvků.

Vliv těchto překážek po 12. roce věku klesá na marginální hodnoty.

Pokud budeme chtít mezi ostatními zaznamenanými překážkami vybrat ty, které určitým způsobem ční nad ostatními, budou to následující:

- Prvků množiny je nekonečně mnoho, když se nedají reálně spočítat.

- Přímka je rovná čára narysovaná na papíře.
- Každé číslo má svého předchůdce a následovníka, každý bod na přímce má své sousedy.

Tyto překážky jsou jednak výrazně zastoupené, neboť jsou identifikovány ve věku od 12 let výše u alespoň třetiny respondentů. Dále jsou rezistentní, protože četnost jejich výskytu je ve věku od 14 let výše zhruba konstantní. Výuka v posledních ročnících základní školy a na škole střední tedy u zhruba jedné třetiny žáků již na přítomnost těchto překážek v jejich poznatkové struktuře nemá vliv.

U třetiny položek dotazníku jsme zaznamenali zmiňovanou výraznou poruchu vývoje úspěšnosti. Je tedy třeba vysvětlit jednak, proč nenastává očekávané zlepšení, ale naopak dochází k propadu správných odpovědí ve zmiňovaných věkových kategoriích, a za druhé, proč dochází k výraznější úspěšnosti v kategorii 14letých.

U části populace dochází kolem věku 14 let k dosažení jakéhosi intelektového stropu, kdy se vytvářená představa o nějakém atributu nekonečna či objektu již dále přes další vzdělávání nemění. Navíc v tomto věku žáci přecházejí ze základní školy na školu střední a to s sebou nese i změnu stylu výuky. Výuka geometrie na základní škole má spíše syntetický charakter. Na střední škole naopak převládá přístup analytický, přičemž ve většině případů má výpočetně algebraický charakter a nerozvíjí příliš původní geometrické představy ze základní školy. Podobně je zde také aritmetický přístup nahrazen algebraickým – méně se pracuje s čísly a více s proměnnými. Některé pojmy probírané na základní škole, jako např. kružnice, přímka nebo reálné číslo, jsou na střední škole považovány za již definitivně vybudované. To je v mnohých případech jen zdánlivé, neboť jednak pojmotvorný proces dokončen být nemusí a také v něm mohlo dojít k různým pochybením. Při budování tak abstraktního pojmu jako je nekonečno se objevuje velké nebezpečí nedorozumění žáka a učitele. Učitelé mají své představy již (více méně) hotové a strukturované. Žáci ale nemají pojmy a souvislosti mezi nimi na stejné úrovni, teprve je konstruují. Žák tak nerozumí tomu, co učitel říká, popřípadě jeho slovům rozumí jinak. Navíc učitel často není dostatečně trpělivý v tom, aby se žák mnohokrát opakovaně setkal s konkrétními případy probíraného jevu a opakovaně se vyrovnával s kognitivními konflikty.

V deváté třídě základní školy (15 let), ve které jsme zaznamenali nárůst správných odpovědí, jsou mnohé děti fenoménem nekonečna fascinovány,

rádi o něm diskutují. Způsobeno je to především tím, že se v tomto období poprvé o některých attributech nekonečna ve škole hovoří. Žáci se setkávají s rovnicemi, které mají nekonečně mnoho řešení, vyšetřují množiny bodů daných vlastností, hovoří o uspořádání bodů na reálné ose. Na konci základní školy také vrcholí zvědavé období. Na střední škole přirozená zvědavost obecně klesá. Navíc po dvanáctém roku se žáci dostávají do piagetovského stádia vyšších mentálních funkcí, kdy se rozvíjí abstraktní myšlení, mimo jiné použitelné jako nástroj pro vytváření představ o nekonečnu.

Na střední škole také díky novým znalostem např. o limitách posloupností a funkcí, o řadách, ale i znalostem z jiných oblastí jako je fyzika a chemie, dochází u žáků k větší opatrnosti při soudech o nekonečnu, což se projevuje vyšší mírou odpovědí typu *nevím*. Dále se pak v jejich úvahách objevují nové, tzv. nevlastní objekty jako poslední členy posloupností (∞ jako největší číslo nebo krajní bod přímky v nekonečnu). Naopak některé nové poznatky interferují s překážkami, např. poznání o atomech jen utvrzuje některé jedince ve správnosti jejich argumentace: *Je jich nekonečně mnoho, protože jsou tak malinkatý, že jich je hrozně, strašně, nepředstavitelně moc nebo že je nemůžu spočítat*. Navíc v otázkách o „počtu“ bodů na úsečce apod. jsou žáci utvrzováni, že nekonečně mnoho objektů může být na konečném prostoru, proč by tedy nemohlo být na Zemi nekonečně mnoho atomů – nepředstavitelně malých objektů, které jsou podobné bodům.

Pokles správných odpovědí na střední škole lze tedy obecně vysvětlit pomocí dvou vlivů. Jednak se objevují nové znalosti, které mohou s překážkami, které byly již v nějakém kontextu zdánlivě překonány, interferovat a tím paradoxně posílit jejich vliv. A zároveň část žáků, právě ve věku 14 let, sice získá příslušné poznatky, s jejichž pomocí jsou schopni řešit některé úlohy související s nekonečnem, ale nezačlenění je do své poznatkové struktury. Proto je později nepoužívají, ale znovu se vracejí k dřívějším představám.

Naše výsledky potvrzují do značné míry oprávněnost genetické paralely. Ukazuje se, že vývoj představ jedinců o nekonečnu koresponduje do značné míry s fylogenetickým vývojem. Ve svých výpovědích žáci a studenti užívají slova *nekonečno*, *nekonečně* či *nekonečně mnoho*. Například na otázku *Jaké číslo je největší?* odpovídá ve všech věkových kategoriích zhruba polovina respondentů slovem *Nekonečno*. Ve výzkumu jsme se snažili zjistit, jaký obsah a význam má žákova odpověď, jakou představu o nekonečnu

má. Domníváme se, že tyto představy úzce souvisejí s pojmem obzoru, jeho polohou a postupným překonáváním různých obzorů. Výsledná vývojová struktura obsahuje čtyři typy představ, přitom poslední z nich je klasické aktuální nekonečno, které odpovídá představám současné (školské) matematiky. Popsanou klasifikaci však nelze vnímat zjednodušeně v tom smyslu, že člověk má jedinou představu nekonečna ve všech kontextech.

Nejjednodušší a nejranější představa o nekonečnu, s níž se u žáků setkáváme, je *přirozené nekonečno*. Přirozené nekonečno je jev subjektivní – žákovi se může nějaká množina nebo objekt jevit přirozeně nekonečným, jestliže se táhne až k jeho obzoru. Budeme-li chápat množiny jako klasicky aktuálně nekonečné, pak žákův obzor leží v jejich rámci a je pevný. Například přirozená čísla jsou v jeho představě ukončena největším pevným přirozeným číslem (např. trilion apod.). Přímkou je v jeho představě ztotožněna se svým obrazem – úsečkou. O čísle $0,9$ prohlašuje, že *devítek za desetinnou čárkou je nekonečně mnoho*, ale znamená to pro něj přirozeně nekonečně mnoho, považuje tedy některou z nich za poslední. Číslo $1 - 0,9$ si pak představuje ve tvaru $0,00.....01$, kde mezi desetinnou čárkou a jedničkou je z našeho pohledu konečně mnoho nul.

Pokročilejší představa je *potenciální nekonečno*. Žák si již uvědomuje možnost, že libovolný obzor může být překročen. Jeho obzor je tedy pohyblivý, ale stále leží v rámci diskutované množiny. Přirozená čísla jsou v jeho představě stále ukončena největším přirozeným číslem, o kterém ale nevíme, jak je veliké. Přímkou je zde chápána jako neomezitelně prodloužitelná úsečka v Euklidově smyslu. V úlohách o číslech $0,9$ a $1 - 0,9$ je i zde v představě studenta mezi desetinnou čárkou a poslední devítkou, resp. jedničkou, z našeho pohledu konečně mnoho cifer, ale pohyblivost obzoru se projevuje tak, že libovolný jejich počet může být zvětšen. Místo obrovského pevného čísla (trilion apod.) se často objevují formulace *Je jich strašně moc, nevíme ale, kolik jich vlastně je*. Rozdíl mezi představou popsanou slovy Přirozené nekonečno a Potenciální nekonečno se jasně projevuje např. v úloze o existenci průsečíku různoběžných přímek, jejichž obrazy na papíru se neprotínají. Zatímco člověk s představou přirozeného nekonečna existenci průsečíku odmítne, člověk s představou potenciálního nekonečna obrazy přímek prodlouží a existenci průsečíku potvrdí.

Zajímavým fenoménem je představa, kterou jsme popsali v předchozí kapitole jako *pozici omega*. Vzniká u některých žáků a studentů tehdy, když se snaží aktualizovat svůj potenciální přístup k nekonečnu. Například množina přirozených čísel je prodloužena o jakési „nevlastní“ přirozené

číslo, které je větší než všechna ostatní přirozená čísla. Toto číslo (student ho nazývá nekonečno) sice má některé vlastnosti čísel – například označuje počet prvků nějaké množiny, ale některé vlastnosti mu naopak chybí – například možnost sečíst ho s jiným číslem. Číslo $0,9$ je pak chápáno tak, že devítek za desetinnou čárkou je aktuálně nekonečně mnoho, ale za nimi je ještě jedna poslední. Podobně přímka je prodloužená až „do nekonečna“, přičemž si ale stále zachovává svůj krajní (nevlastní) bod. Pozici omega lze chápat jako vývojový mezistupeň mezi potenciálním a aktuálním chápáním nekonečna. Člověk svůj obzor, který je přirozeným projevem potenciálního přístupu, nezruší úplně, ale přesouvá jej do jakési „nevlastní polohy“, kde s ním již nelze posunovat.

Termínem *klasické aktuální nekonečno* označujeme situaci, kdy všechny obzory jsou již prolomeny, a student disponuje v oblasti nekonečna představami současné matematiky.

Domníváme se, že porozumění nekonečnu je nutně spojeno s překonáváním překážek, které jsou popsány v článku, a to do značné míry nezávisle na místě nebo způsobu výuky matematiky. Proces utváření pojmu nekonečno lze proto modelovat dosahováním výše popsaných typů představ od přirozeného až po klasické aktuální nekonečno. Přijmeme-li tuto hierarchii, snáze pochopíme možná nedorozumění mezi učitelem a žákem vyplývající z odlišného vnímání polohy obzoru. Úkolem nás učitelů je tedy prostřednictvím vhodných situací postupně překonávat překážky spojené se všemi atributy nekonečna v různých kontextech.

L i t e r a t u r a

- [1] Cihlář, J. – Eisenmann, P. – Krátká, M. – Vopěnka, P.: Cognitive conflict as a tool of overcoming obstacles in understanding infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 7/2, 2009.
- [2] Ely, R.: Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *For Research in Mathematics Education*, 41/2, 2010, 117–146.
- [3] *Euklides: Základy I–IV.* (Překlad: F. Servít, upravil a komentoval P. Vopěnka, 2008) 2. opravené vydání. Nymburk, OPS.
- [4] Spagnolo, F. – Čížmár, J.: *Komunikácia v matematike na strednej škole.* Brno, Masarykova univerzita 2003.
- [5] Škoda, J. – Doulík, P.: Prekoncepce a miskoncepce v oborových didaktikách. Ústí nad Labem, UJEP 2010.
- [6] Vopěnka, P.: *Pojednání o jevech povstávajících na množstvích.* Plzeň a Nymburk, OPS 2008.

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu GAČR č. 406/07/1026.

Zajímavé matematické úlohy

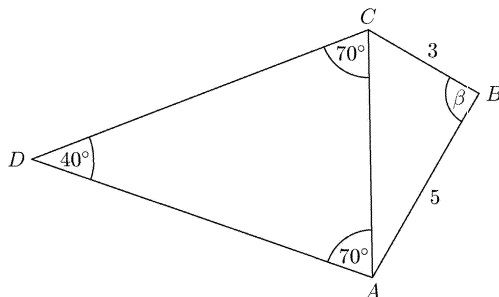
Uvádíme řešení úloh 181 a 182, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 181

Uvažujme trojúhelník ABC , v němž $|AB| = 5$ a $|BC| = 3$. Nechť ACD je rovnoramenný trojúhelník ACD vně připsaný straně AC trojúhelníku ABC , jehož velikost vnitřního úhlu proti základně AC je 40° . Určete velikost vnitřního úhlu β při vrcholu B v trojúhelníku ABC , pro niž má úsečka BD maximální délku.

Jozef Mészáros (Jelka)

Řešení.



Velikost vnitřních úhlů při základně AC trojúhelníku ACD je 70° . Podle sinové věty platí $|CD| = |DA| = |AC| \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}$. Užitím Ptolemaiovy nerovnosti ve čtyřúhelníku $ABCD$ dále máme $|AC| \cdot |BD| \leq \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$, přitom rovnost nastane, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětiový. V našem případě tedy je

$$|AC| \cdot |BD| \leq 5 \cdot |AC| \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} + 3 \cdot |AC| \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ},$$

proto

$$|BD| \leq 8 \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

Rovnost zde nastane, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový, tj. když velikost úhlu β je 140° .

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *David Bainer*, *Jana Novotná*, *Dominik Těluřil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplicích, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, Parlérova, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* a *Michal Nožička* oba z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jan Klusáček* z G v Třebíči, *Michal Kopf* z SG v Opavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, Nádražní, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Pavel Polcer* z G v Brně, Křenová, *Lenka Stará* z G v Č. Budějovicích, Jírovcova, *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Úloha 182

V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(z + x) = z^2 x^2 + 1,$$

$$y(x + y) = x^2 y^2 + 1,$$

$$z(y + z) = y^2 z^2 + 1.$$

Jaroslav Švrček

Řešení.

Pokud by jedna z neznámých byla rovna 0, potom jsme ve sporu s některou rovnicí soustavy. Tedy čísla x, y, z jsou kladná. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí $z^2 x^2 + 1 \geq 2zx$. Rovnost nastává, právě když $zx = 1$. Z první rovnice pak máme

$$x(z + x) = z^2 x^2 + 1 \geq 2zx,$$

odkud využitím podmínky $x > 0$ dostaneme $x \geq z$. Podobně ze druhé rovnice plyne $y \geq x$ a ze třetí $z \geq y$. Odtud vidíme, že $x = y = z$ a že ve všech užitych AG nerovnostech nastane rovnost. Z rovností $1 = zx = xy = yz$ již plyne $x = y = z = 1$.

Závěr. Jediným řešením dané soustavy je trojice $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *David Bainer*, *Dominik Těluřil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplicích, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, Parlérova, *Eva*

Gocníková z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* a *Michal Nožička* oba z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jan Klusáček* z G v Třebíči, *Michal Kopf* z SG v Opavě, *Jakub Krásenský* z G v Jihlavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, Nádražní, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Lenka Stará* z G v Č. Budějovicích, Jírovcova, *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplné řešení zaslali: *Jana Novotná* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Polcer* z G v Brně, Křenová.

Pavel Calábek

(Dokončení ze s. 284)

L. Pika v Plzni. Bronzové získali Ondřej Bartoš z Gymnázia ve Žďáru nad Sázavou a Hynek Kasl z Gymnázia v Plzni, Mikulášské nám. Mezinárodní chemická olympiáda, v pořadí již 43., se konala v Turecku (v Ankaře) za účasti 273 soutěžících ze 70 zemí. Čtyři čeští reprezentanti přivezli 2 zlaté a po jedné stříbrné a bronzové medaili. Zlaté získali Ondřej Hák z Gymnázia a SOŠ v Hořicích v Podkrkonoší a František Petrouš z Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovcova ul., stříbrnou Petr Louša z Gymnázia v Havlíčkově Brodě a bronzovou medaili Aneta Pospíšilová z Gymnázia v Mikulově. Mezinárodní biologická olympiáda, v pořadí 22., se konala v Číně na Tchaj-wanu (v Tchaj-pej) za účasti 228 soutěžících z 58 zemí. Naši čtyři reprezentanti přivezli 4 medaile, všechny bronzové. Byli to Karel Kodejš z Gymnázia v Jablonci nad Nisou, Kateřina Medková z Biskupského gymnázia v Hradci Králové, Lenka Čurnová a Václav Nuc, oba z Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovcova ul. Mezinárodní matematická olympiáda, v pořadí již 52., se konala v Nizozemsku (v Amsterdamu) za rekordní účasti 564 soutěžících ze 101 zemí. Šest českých reprezentantů dovezlo 1 stříbrnou a 3 bronzové medaile. Stříbro získal Anh

Dung Le, student vietnamské národnosti z Gymnázia v Tachově a bronzové medaile přivezli Michael Bílý z Gymnázia v Klatovech, Štěpán Šimsa z Gymnázia v Litoměřicích a Tomáš Zeman z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Mezinárodní olympiáda v informatice, v pořadí 23., se konala rovněž v Thajsku (v městě Pattaya) za účasti 302 soutěžících z 81 zemí. Čtyři čeští reprezentanti dovezli tři stříbrné medaile. Jsou to Filip Hlásek z Gymnázia v Plzni, Mikulášské nám., Hynek Jemelík z Gymnázia v Brně, tř. Kpt. Jaroše a Jakub Zíka z Gymnázia v Praze 6, Nad Alejí. Mimořádné ceny za výrazné úspěchy na 5. Mezinárodní astronomické a astrofyzikální olympiádě, konané v Polsku (ve Varšavě) za účasti 134 soutěžících z 26 států, získali Stanislav Fořt za zlatou medaili a absolutní vítězství a Jakub Vošmera za stříbrnou medaili, oba stříbrní i na MFO v Thajsku.

Na Sychrově se 4. prosince 2011 sešel a byl oceněn výkvět současných nejlepších českých studentů přírodních věd. Potěšitelné je, že z 22 udělených nadačních cen je 14 (64 %) za obor matematika, fyzika a informatiky, tedy v oborech, na něž je zaměřen tento časopis.

Bohumil Vybíral
Univerzita Hradec Králové