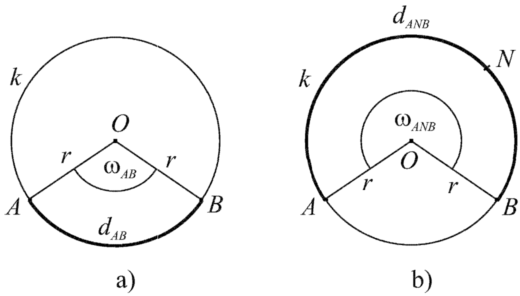
Věta o úhlu tětiv kružnice

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

1. Úvod

Věta o úhlu tětiv kružnice představuje zobecnění věty o obvodových úhlech. K řešení některých geometrických úloh je vhodnější. Je známa již z klasické Hadamardovy učebnice [2]. Na webu ji najdeme jak v amerických přehledech středoškolské matematiky, například [7] nebo [9], tak i v ruských materiálech pro středoškoláky, viz [6] nebo [10]. U nás není příliš známa. Než ji uvedeme, upřesníme si základní pojmy.



a) Oblouk AB b) Oblouk ANB

Obr. 1

Pro *délku oblouku* AB zavedeme symbol d_{AB}. Velikost středového úhlu, který přísluší oblouku AB budeme stručně nazývat *úhlová velikost oblouku* AB a značit ω_{AB} (obr. 1). Někdy není jasné, který z oblouků AB máme na mysli. V takovém případě můžeme na obrázku označit některý vnitřní bod uvažovaného oblouku písmenem (např. N) a hovořit o oblouku ANB, jak ukazuje obr. 1b).

Pokud úhlovou velikost oblouku AB vyjádříme v obloukové míře, platí vztah

$$d_{AB} = r\,\omega_{AB}. \tag{1}$$

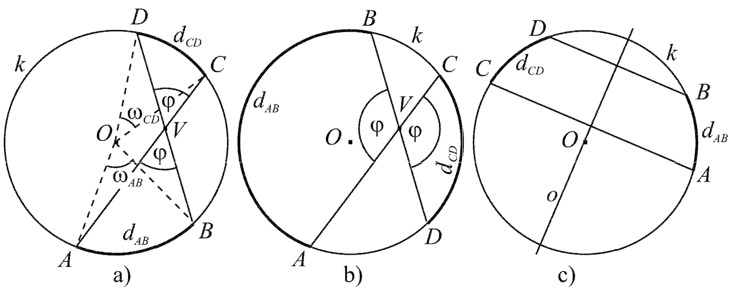
2. Věta o úhlech tětiv jako důsledek symetrie kružnice

Ze souměrnosti tětiv i kružnice podle společné osy rovnoběžných tětiv na obr. 2c) plyne $d_{CD} = d_{AB}$ a odtud následující věta:

Věta 1

Rovnoběžné tětivy ohraničují na kružnici shodné oblouky.

Při označení podle obr. 2a), b) říkáme, že úhlu φ tětiv AC a BD, které se protínají v bodě V, přísluší oblouky AB a CD. Za protínající se tětivy považujeme i ty, které mají společný krajní bod. (Při označení podle obr. 2a) to znamená buď $V = C = D$, nebo $V = A = B$.)



Obr. 2 Oblouky vyťaté tětivami

Věta 2

Jestliže se v dané kružnici protíná tětiva BD s rovnoběžnými tětivami AC a $A'C'$, přičemž body A, A' leží v téže polorovině s hraniční přímkou BD, pak platí

$$d_{A'B} + d_{C'D} = d_{AB} + d_{CD} \tag{2}$$

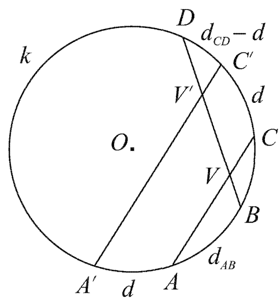
a

$$\omega_{A'B} + \omega_{C'D} = \omega_{AB} + \omega_{CD}. \tag{3}$$

Důkaz. Oblouky AA' a CC' jsou shodné, proto lze označit $d = d_{AA'} = d_{CC'}$. Zřejmě platí

$$d_{A'B} + d_{C'D} = (d_{AB} \pm d) + (d_{CD} \mp d) = d_{AB} + d_{CD},$$

přitom horní znaménka platí pro situaci, kdy je bod A uvnitř oblouku $A'B$ (obr. 3) a dolní znaménka platí, když je A' uvnitř oblouku AB. Tím je dokázán vztah (2). Rovnost (3) je přímým důsledkem vztahů (2) a (1). □



Obr. 3 K důkazu věty 2

Důsledek věty 2. *Součet délek protilehlých oblouků vyťatých sečnami na kružnici se nezmění posunutím některé z nich za předpokladu, že se sečny před posunutím i po něm protínají v kruhu kružnicí ohraničeném. Nezmění se ani součet úhlových velikostí oblouků.*

Věta 3 (o úhlu tětiv)

Velikost úhlu tětiv, které se v dané kružnici protínají, je rovna aritmetickému průměru úhlových velikostí příslušných oblouků tětivami ohraničených.

Při označení podle obr. 2a) to znamená, že

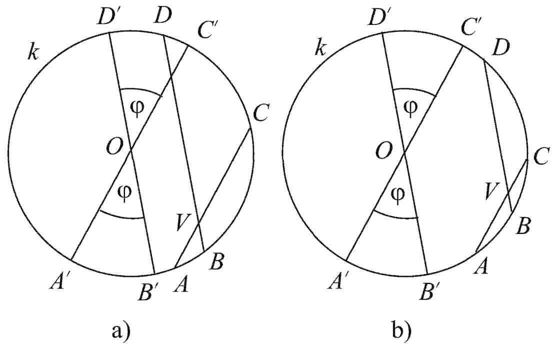
$$2\varphi = \omega_{AB} + \omega_{CD}. \tag{4}$$

Důkaz. Středem kružnice veďme rovnoběžky k tětivám AC a BD. Sestrojené rovnoběžky vytínají na kružnici tětivy $A'C' \parallel AC$ a $B'D' \parallel BD$ (obr. 4). Předpokládejme nejprve, že se úsečky $A'C'$ a BD protínají –

obr. 4a). Užitím vztahu (3) pro tětivy $A'C'$, $B'D'$, BD a potom pro tětivy BD, $A'C'$ a AC dostáváme

$$2\varphi = \omega_{A'B'} + \omega_{C'D'} = \omega_{A'B} + \omega_{C'D} = \omega_{AB} + \omega_{CD}.$$

Pro situaci, kdy se protínají tětivy $B'D'$ a AC je důkaz analogický.



Obr. 4 K důkazu věty o úhlu tětiv

Nakonec uvažujme situaci, kdy se neprotínají tětivy $A'C'$ a BD, ani tětivy $B'D'$ a AC, obr. 4b). Sečtením vztahů $\omega_{A'A} = \omega_{C'C}$ a $\omega_{D'D} = \omega_{B'B}$ dostáváme

$$\omega_{A'A} + \omega_{D'D} = \omega_{C'C} + \omega_{B'B},$$

odtud

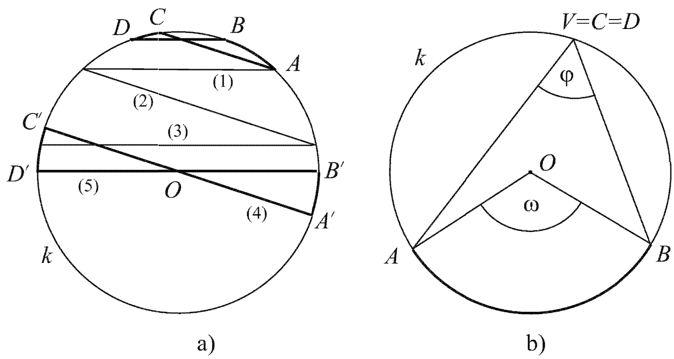
$$(\omega_{A'B'} + \omega_{B'A}) + (\omega_{C'D'} + \omega_{C'D}) = (\omega_{C'D} + \omega_{CD}) + (\omega_{B'A} + \omega_{AB})$$

a po úpravě zjistíme

$$2\varphi = \omega_{A'B'} + \omega_{C'D'} = \omega_{AB} + \omega_{CD}. \ \square$$

Poznámka 1. K důkazům vět 2 a 3 jsme volili statický přístup. Dynamická geometrie nabízí názornější a poutavější formu probrání učiva, při níž vycházíme z experimentů s posouváním sečen. Soubor pomůcek vytvořených v Cabri II+ k této sérii článků může čtenář i s metodickým návodem zdarma stáhnout na webu z adresy [4].

Pomůcky umožňují například pro situaci z obr. 3 ukázat, jak tětiva AC přechází do polohy $A'C'$ posouváním sečny AC. Přitom se vykreslují změny délek sledovaných oblouků, a tak je přímo vidět, že se posouváním součet délek oblouků nemění. Nudný důkaz věty 3 lze nahradit žákovskou aktivitou: Žák přemisťuje tětivy postupným posouváním sečen za podmínek z věty 1 z libovolného umístění do polohy průměrů $A'C'$ a $B'D'$. Ilustraci jedné z možností vidíme na obr. 5a): Nejprve byla sečna BD přemístěna do polohy (1), pak AC do polohy (2), potom (1) do (3), (2) do (4), a nakonec (3) do (5). Není to sice přesný matematický důkaz, ale lépe motivuje a vede k neformálnímu, trvalejšímu poznatku.



a) Ilustrace posouvání sečen b) Důsledek věty 3: $\omega = 2\varphi$

Obr. 5

3. Věta o obvodových úhlech

Obrázek 5b) představuje větu o obvodových úhlech jako zvláštní případ věty 2. Tětivy AC a BD jsou v takové poloze, že průsečík V leží na kružnici, tedy $C = D = V$. Úhel AVB je obvodový a AOB je příslušný středový úhel velikosti ω. Platí $\omega_{CD} = \omega_{VV} = 0$ a $\omega_{AB} = \omega$. Vztah (4) má tvar

$$2\varphi = \omega, \tag{5}$$

z něhož plyne

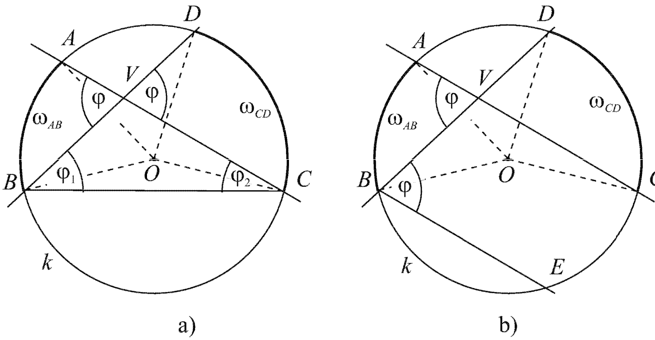
Věta 4 (o obvodových úhlech)

Obvodové úhly, které přísluší témuž oblouku dané kružnice, mají velikost rovnu polovině úhlové velikosti příslušného oblouku.

Ukázali jsme si, že věta 3 o úhlu tětiv v sobě zahrnuje větu o obvodových úhlech. Přitom není složitější, ani její odvození není pracnější. Snadno se zapamatuje a vypovídá více o dokonalé symetrii kružnice. Pokud je mi známo, dostupná literatura (s výjimkou [3]) neuvádí právě popsané odvození. Patrně z historických důvodů je věta považována za důsledek věty o obvodových úhlech a dokazována některým z následujících dvou postupů:

1. (klasický) důkaz věty 3. Při označení podle obr. 6a), na němž jsou symboly úhlových velikostí oblouků z praktických důvodů umístěny u oblouků, je podle věty o vnějším úhlu pro trojúhelník BCV velikost úhlu CVD rovna součtu velikostí úhlů CBD a BCA. Odtud a z věty 4 dostáváme

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_1 = \frac{1}{2}\omega_{AB} + \frac{1}{2}\omega_{CD} = \frac{1}{2}(\omega_{AB} + \omega_{CD}).$$



Obr. 6 K důkazům věty 3 (pomocí věty 4)

2. důkaz z Ponarinovy učebnice [6]. Sestrojme tětivu $BE \parallel AC$ podle obr. 6b). Oblouky ohraničené rovnoběžnými tětivami AC a BE jsou shodné, proto platí

$$\omega_{AB} + \omega_{CD} = \omega_{EC} + \omega_{CD} = \omega_{ED} = 2\varphi.$$

Snadno lze ověřit, že věta 3 je ekvivalentní s větou 1. Poznamenejme ještě, že k větě 3 existuje analogická věta o úhlu sečen, jež se protínají vně kružnice. Uvedeme ji bez důkazu, který čtenář jistě zvládne sám. (Může použít kterýkoliv ze způsobů, jimiž jsme dokazovali větu 3.)

Věta 6

Pokud se sečny AC a BD protínají vně dané kružnice a kružnici protínají ve vrcholech čtyřúhelníku $ABDC$, pak pro velikost jejich úhlu φ, jemuž přísluší protilehlé oblouky AB a CD, platí

$$2\varphi = |\omega_{AB} - \omega_{CD}|. \tag{6}$$

Poznámka 2. Zavedením orientovaných úhlů (resp. orientovaných oblouků) můžeme věty 3 a 6 sloučit a vztahy (4) a (6) nahradit jedinou rovností.

5. Závěr

Věta o úhlu tětiv je většinou pokládána pouze za důsledek věty o obvodových úhlech. I ve sbírkách úloh se v různých obměnách uvádí jako důkazová úloha na využití vztahu (5) (viz například [8] str. 7, úloha 5, resp. [5] str. 232, úloha 109). Přitom by měla bý považována za větu základní, neboť vypovídá více o symetrii kružnice než věta o obvodových úhlech, kterou obsahuje. Navíc umožňuje jednodušší a přehlednější řešení některých výpočtových úloh o úhlech v kružnici, jak si ukážeme příště. (Několik řešených příkladů je již dostupných v metodickém návodu souboru [4].)

Cílem článku bylo upozornit na tato fakta a inspirovat didaktickou veřejnost k modernizaci výuky školské geometrie.

Literatura

[1] *Bogomolny, A..*: Secant Angles in a Circle. Cut The Knot: <www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SecantAngle.shtml>

[2] *Hadamard, J.*: Leçons de géométrie élémentaire – I. Géométrie plane. Librairie Armand Colin, Paris 1906.

[3] *Leischner, P.*: Cavalieriho princip, věta o krájení pizzy a věta o krájení melounu. Matematika – fyzika – informatika 13 (5), 257–264, Prometheus, Praha 2004.

[4] *Leischner, P.*: Úhly v kružnici. (Soubor pomůcek pro výuku.) <http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Coll_leischner/Uhlyvkruznici>

[5] *Polák, J.*: Středoškolská matematika v úlohách II. Prometheus, Praha 1999.

[6] *Ponarin, J. P.*: Elementarnaja geometria, Tom 1. Izdateĺstvo MCNMO, Moskva 2004. <http://www.math.ru/lib/book/pdf/geometry/Ponarin-I.pdf>

[7] <http://2000clicks.com/MathHelp/GeometryTheorem-Summary.aspx>

[8] *Šarygin, I. F.*: Zadači po geometrii – Planimetrija, Nauka, Moskva 1982. <http://www.math.ru/lib/cat/geom>

[9] <http://http://www.mathwarehouse.com/geometry/circle/angles-of-intersecting-chords-theorem.php>

[10] <http://www.problems.ru/>

Dva pohledy na řešení problémů

JIŘÍ MAZUREK

Gymnázium Orlová

Úvod

Naučit žáky řešit problémy je jeden z dávných a současně zcela aktuálních úkolů didaktiky.[1] V matematice je řešení problémů věnována pozornost odedávna (viz například egyptský *Ahmesův rukopis*, datovaný 1650 př. n. l.). Řešení vhodných matematických úloh je i dnes nedílnou součástí výuky matematiky na všech stupních a typech škol. Problémem však zůstává, jak žáky lépe *učit řešit* tyto úlohy, jak u nich rozvíjet logické a abstraktní myšlení, jak je vést k dosažení stanoveného cíle a k dovednosti ověřit si výsledek.

K tomuto úkolu se hlásí i „nová škola" prostřednictvím svých dokumentů *Rámcové vzdělávací programy pro gymnázia* (RVP G) a *Rámcové vzdělávací programy pro základní školy*, v nichž jsou formulovány tzv. klíčové kompetence. Jedna z nich, která se má na školách utvářet a rozvíjet, je *kompetence k řešení problémů*. RVP G v několika bodech upřesňují její obsah [1, s. 9], tj. říká, jak si má žák počínat.

Žák:
- rozpozná problém, objasní jeho podstatu, rozčlení ho na části;
- vytváří hypotézy, navrhuje postupné kroky, zvažuje využití různých postupů při řešení problému nebo ověřování hypotézy;
- uplatňuje při řešení problémů vhodné metody a dříve získané vědomosti a dovednosti, kromě analytického a kritického myšlení využívá i myšlení tvořivé s použitím představivosti a intuice;
- kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry;

[1] *David Jonassen* například tvrdí, že lidé jsou řešiteli problémů odpradávna a že špičkoví experti nejsou placeni jen za své znalosti, ale především za *řešení problémů* ve svých oborech [4, s. 17–18]. Metodolog vědy *Karl. R. Popper* má tezi „Život je řešením problémů" dokonce v názvu jedné ze svých publikací.

– je otevřený k využití různých postupů při řešení problémů, nahlíží problém z různých stran;
– zvažuje možné klady a zápory jednotlivých variant řešení, včetně posouzení jejich rizik a důsledků.

Tyto teze se týkají řešení problémů obecně, z hlediska výuky matematiky jsou však příliš obecné a velmi málo instruktivní, a proto je nelze považovat za návod k řešení matematických úloh a problémů. Ve výuce matematiky musejí být výše zmíněné teze konkretizovány řešením konkrétních problémů. Při rozvíjení kompetence k řešení problémů v matematice lze vyjít z dnes již klasického díla George Pólyi [2]. Současným autorem, který se věnuje řešení matematických problémů, je například Terence Tao[2], viz [3].

Tento článek si klade za cíl ukázat na dvou nepříliš obtížných matematických úlohách přístup k řešení matematických problémů podle obou zmíněných autorů. Zároveň lze následující text chápat i jako podnět pro učitele, jak konkrétně postupovat při rozvíjení kompetence k řešení problémů v matematice v duchu rámcových vzdělávacích programů.

Řešení matematických problémů podle George Pólyi

George Pólya uvádí čtyři etapy řešení problému [2, s. xvii]:

1. *Pochopit problém*: Je pošetilé očekávat správné odpovědi či řešení od žáka, který problém nepochopil. Musíte se ujistit, že žáci daný problém pochopili, a to tak, že je necháte vyjádřit problém vlastními slovy, a pak jim kladete otázky: „Co je v úloze neznámou, kterou máme najít? Jaké jsou údaje v zadání? Jaké podmínky se objevují v úloze? Je možné splnit podmínky zadání? Jsou tyto podmínky dostatečné k nalezení řešení? Načrtněte si obrázek, zaveďte si vhodné označení veličin, zapište podmínky.“
2. *Vymyslet plán řešení problému*: V tomto kroku je třeba najít spojení mezi údaji v zadání a neznámou. Pokud žáci daný problém nikdy neřešili a nic je nenapadá, zkuste jim připomenout jiný, podobný problém, jehož řešení znají. Vyřešte jednodušší problém, analogický problém, více obecný nebo naopak speciálnější problém. Vyřešte alespoň část úlohy. Nakonec byste měli objevit plán řešení dané úlohy.

[2] Terence Tao (nar. 1975) je vítěz Mezinárodní matematické olympiády (IMO) z roku 1988 a nositel Fieldsovy medaile (nejprestižnějšího matematického ocenění) z roku 2006.

3. *Provést plán*: Při řešení kontrolujte každý krok, musíte postupovat logicky správně (korektně).
4. *Provést zpětnou kontrolu*: Zkontrolujte s žáky řešení. Je správné? Je tím, co se mělo získat? Je možné řešení ověřit jinak? Je možné použít toto řešení i k řešení nějakého jiného problému?

Úloha 1. Vypočtěte délku tělesové úhlopříčky v kvádru, jestliže jsou dány délky jeho hran [2, s. 7–15].

1. Žáci znají Pythagorovu větu, ale nemají žádné znalosti ze stereometrie (geometrie v trojrozměrném prostoru). Učitel může na úvod úlohu konkretizovat: za kvádr lze vzít třídu a tělesovou úhlopříčkou je pak spojnice protilehlých rohů třídy. Učitel kvádr načrtne na tabuli a pak následuje dialog s žáky:

   Učitel: „Co je neznámou?"
   Žáci: „Délka tělesové úhlopříčky v kvádru."
   Učitel: „Jaké údaje máme v zadání?"
   Žáci: „Známe délku, šířku a výšku kvádru."
   Učitel: „Zaveďme si označení. Jak označíme neznámou?"
   Žáci: „x".
   Učitel: „A jak označíme délky hran kvádru?"
   Žáci: „a, b, c."
   Učitel: „Jakou podmínku vyjadřuje zadání? Jaká je souvislost mezi neznámou x a hranami a, b a c?"
   Žáci: „Neznámá x je tělesovou úhlopříčkou v kvádru s délkou a, šířkou b a výškou c."
   Učitel: „Má tento problém smysl? Jde ze zadání určit x?"
   Žáci: „Ano. Když známe a, b a c, známe kvádr, a tím je dána i délka jeho tělesové úhlopříčky."

2. Žáci mohou mít problém s vymýšlením plánu řešení. Proto je učitel navede k problému, který je podobný, a který žáci znají z planimetrie: najít délku přepony v pravoúhlém trojúhelníku, případně úhlopříčky v obdélníku.
3. Učitel načrtne v kvádru pravoúhlý trojúhelník s přeponou x a žáci se pustí do výpočtu. Přitom dvakrát použijí Pythagorovu větu a zřejmě si zavedou pomocnou neznámou (např. u) pro délku úhlopříčky v podstavě. Učitel kontroluje proces řešení, vede žáky k tomu, aby si správnost

jednotlivých kroků ověřovali („Je ten trojúhelník opravdu pravoúhlý? Můžeme použít Pythagorovu větu?“). Nakonec žáci vypočtou délku tělesové úhlopříčky v kvádru:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{1}$$

4. Zbývá ověřit výsledek (1). Učitel může žákům položit například tyto otázky:

   - „Použili jste všechny údaje ze zadání? Je ve vzorečku pro x použito a, b i c?“
   - „Označili jsme si délku kvádru jako a, šířku jako b a výšku jako c. Když zaměníme hrany kvádru (zaměníme písmena a, b a c), kvádr zůstane stejný, a proto se výsledek (x) nesmí změnit. Platí to?“
   - „Co se stane, když se výška kvádru c zmenší na nulu? Bude potom x délkou úhlopříčky v obdélníku o stranách a a b?“
   - „Když budeme zvětšovat rozměry kvádru, bude se zvětšovat také x?“
   - „Když zvětšíme všechny rozměry kvádru dvakrát, zvětší se dvakrát také x?“
   - „Co se stane, když všechny rozměry kvádru budou stejné?“

Díky těmto otázkám se zvýší důvěra žáků ve správnost dosaženého výsledku a žáci si tento výsledek lépe zapamatují, znalost je lépe ukotvena a konsolidována.

Poslednímu kroku – ověření výsledku – se však v českém edukačním prostředí učitelé ani žáci příliš nevěnují, a proto se mezi žákovskými výsledky občas objevují „do nebe volající“ nesmysly, v nichž například vlaky cestují nadsvětelnou rychlostí. Pólya uvádí, že podobné absurdity nejsou zapříčiněny ani tak hloupostí žáků, jako spíše nezájmem o daný problém. A lhostejnost žáků plyne z nedostatečné motivace. Těžiště práce učitele matematiky proto podle Pólyi spočívá v kladení vhodných otázek, které žáky motivují k řešení problému a vedou je (nenásilně) k hledanému výsledku.

Řešení matematických problémů, jak je popisuje Terence Tao

Terence Tao doporučuje použít k řešení problémů následující osnovu [3, s. 1–7]:

1. Pochopit typ problému: O jaký problém se jedná? Typ problému rozhoduje o strategii řešení. Existují tři základní typy problémů:
   - Problémy, které začínají spojením: „Ukažte, že …“, případně: „Vypočtěte …“
   - Problémy, které začínají spojením: „Najděte …“, případně: „Najděte všechna …“
   - Problémy, které začínají spojením: „Existuje … ?“

Problémy první kategorie jsou nejméně obtížné, neboť cíl je jasně formulován („je vidět“) a jde jen o to najít cestu k jeho nalezení. Problémy druhé kategorie jsou o něco obtížnější, výsledek je třeba hledat či uhádnout. Problémy třetí kategorie patří k nejobtížnějším. Na počátku je nutné se rozhodnout, zda daný objekt existuje či nikoli, a pak se snažit najít důkaz (ne)existence, respektive protipříklad.

2. *Pochopit údaje ze zadání*: Co je dáno? Obvykle jsou dány nějaké objekty a podmínky, které tyto objekty musí splňovat. Důležité je najít spojení mezi různými objekty či podmínkami.
3. *Pochopit cíl*: Co chceme najít? Znalost cíle pomáhá zvolit vhodnou strategii k řešení problému.
4. *Zvolit vhodné označení veličin.* Pro údaje, podmínky či objekty ze zadání volíme co nejjednodušší označení. Nevhodné označení může zkomplikovat řešení úlohy (viz řešená úloha níže).
5. *Zapsat, co je známo (ve zvoleném označení), nakreslit diagram.* Zápisky mohou sloužit jako podklad pro pozdější přemýšlení, člověk může zírat na papír, když se „zasekne“, a nakonec při psaní se může objevit nějaká nová inspirující myšlenka. Tímto bodem tedy začíná samotné řešení problému.
6. *Pozměnit problém částečně.* Jestliže daný problém odolává, je možné zkusit vyřešit o něco jednodušší problém, například speciální případ daného problému.
7. *Pozměnit problém výrazně.* „Ohýbáním“ problému (vypuštěním části vstupních dat, negací cíle, apod.) je možné zjistit jeho klíčová, případně slabá místa.
8. *Zkusit získat částečný výsledek, dosáhnout částečného cíle.* Částečný úspěch při řešení problému (například důkaz lemmatu) se může hodit při dosažení hlavního cíle (důkazu věty).
9. *Zjednodušit získané vztahy, využít zadaná data, dosáhout cíle.* Je třeba využít vztahů zapsaných v bodě (5), vybrat vhodnou strategii k jejich

řešení (například dosazovací metodu pro soustavu lineární a kvadratické rovnice) a pomocí algebraických či jiných operací dojít k žádanému výsledku.

Při řešení snadných úloh následuje po bodu (5) přímo bod (9). Jestliže je úloha pro řešitele příliš složitá, představují body (6) až (8) alternativy dalšího postupu: řešitel může vyřešit jen část úlohy, analogickou úlohu, speciálnější případ dané úlohy, apod.

Úloha 2. Délky trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí d. Obsah trojúhelníka je S. Určete délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka [3, s. 1–7].

1. Tento problém je prvního typu. Máme najít několik neznámých veličin, jestliže jsou dány jiné veličiny. Řešení bude zřejmě algebraické s (mnoha) rovnicemi spojujícími neznámé veličiny se známým.
2. Je dán trojúhelník, jeho obsah a vztah pro délky stran. Proto budeme potřebovat vztahy, v nichž souvisejí délky stran s velikostmi úhlů: sinovou a kosinovou větu, vztahy pro obsah trojúhelníka, apod. Dále musíme nějak vyjádřit skutečnost, že délky stran trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost.
3. Chceme najít délky všech stran a velikosti všech úhlů. Budeme k tomu potřebovat již výše zmíněné vztahy.
4. Hledané úhly označíme standardně α, β a γ, délky stran je vhodné vyjádřit symetricky pomocí (prostřední) strany b: $a = b - d$, $b = b$, $c = b + d$.
5. Zapíšeme vše, co známe, v podobě rovnic či nerovnic:
   - $\alpha, \beta, \gamma, S > 0, b \geq d$
   - $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,
   - sinová věta: $\dfrac{b-d}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{b+d}{\sin\gamma}$
   - kosinová věta: $b^2 = (b-d)^2 + (b+d)^2 - 2(b-d)(b+d)\cos\beta$
   - obsah: $S = \dfrac{1}{2}(b-d)b\sin\gamma = \dfrac{1}{2(b-d)(b+d)\sin\beta} = \dfrac{1}{2}(b+d)\sin\alpha$
   - Heronův vztah: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
6. Daný problém můžeme mírně pozměnit a tím jej zjednodušit. Můžeme například uvažovat speciální případy – rovnostranný nebo rovnoramenný trojúhelník. V případě rovnostranného trojúhelníka získáme

jednoduchým výpočtem:

$$b = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = a = c \tag{2}$$

A dále: $d = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Z řešení speciálního případu můžeme získat představu o tom, jak by mohl vypadal výsledek v obecném případě (které veličiny a v jakých mocninách či odmocninách se zde vyskytují …).

7. Problém můžeme výrazně pozměnit například tím, že část zadání vynecháme, místo abychom se snažili jisté tvrzení dokázat, můžeme se pokusit ho naopak vyvrátit, místo trojúhelníka můžeme uvažovat čtverec, apod. Toto funguje u složitějších problémů. V naší úloze je však tato cesta k cíli zbytečně složitá.
8. Cesta k cíli může vést i přes částečné nebo provizorní výsledky, při nichž využíváme jen část zadaných údajů.
9. Jako nejnadějnější východisko pro řešení problému se nabízí Heronův vztah, neboť spojuje obsah trojúhelníka přímo s délkami jeho stran (přesněji s polovinou jeho obvodu). Jakmile se podaří určit délky stran, z kosinové věty pak vypočteme úhly.
   Máme tedy Heronův vztah:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{3}$$

kde

$$s = (a+b+c)/2 = [(b-d)+b+(b+d)]/2 = 3b/2 \tag{4}$$

Dosazením (4) do (3) a umocněním na druhou dostáváme:

$$S^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - b + d\right)\left(\frac{3b}{2} - b\right)\left(\frac{3b}{2} - b - d\right) \tag{5}$$

Vztah (5) lze roznásobením zjednodušit:

$$S^2 = \frac{3b^2(b^2 - 4d^2)}{16} \tag{6}$$

Vztah (6) je bikvadratickou rovnicí pro b:

$$3b^4 - 12d^2b^2 - 16S^2 = 0 \tag{7}$$

Rovnice o neznámé b (7) má kořeny:

$$b^2 = 2d^2 \pm \sqrt{4d^2 + \frac{16}{3}S^2} \tag{8}$$

Protože b^2 musí být kladné, je v (8) přípustný pouze kořen s kladným znaménkem před odmocninou. Odmocněním (8) nakonec získáme b:

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}S^2}} \tag{9}$$

$a = b - d$, $c = b + d$, úhly α, β, a γ lze dopočítat pomocí kosinové (sinové) věty (ponecháváme na čtenáři).
Zpětná kontrola výsledku pro $d = 0$ (rovnostranný trojúhelník) dává vztah (2).

Srovnání obou přístupů

Přístupy G. Pólyi (GP) a T. Tao (TT) jsou si v zásadě podobné.[3]

- Bod GP 1, tedy porozumění problému, odpovídá bodům 1–4 u TT.
- Bod GP 2 koresponduje s TT 6–8 a první částí TT 9.
- Bod GP 3 odpovídá druhé části TT 9.
- TT na rozdíl od GP explicitně nezmiňuje kontrolu výsledku (bod GP 4).

Rozdílnost mezi [2] a [3] lze spatřovat spíše v tom, jakou měli autoři motivaci k jejich napsání, ke komu se ve svých textech obracejí a jakému typu úloh se věnují. Pólya se obrací především k učitelům a studentům matematiky a na modelových úlohách názorně předvádí, jak by si měl počínat žák i učitel v jednotlivých fázích řešení. U Pólyi převládají běžné úlohy středoškolské úrovně. Tao se zaměřuje spíše na zájemce o matematiku, vybírá si úlohy převážně z matematických soutěží a předvádí matematiku jako zajímavou, zábavnou a krásnou vědu.[4]

Zvídavý čtenář si ještě může porovnat, jak se žádané aktivity žáků při rozvíjení *kompetence k řešení problémů* dle RVP G z úvodu článku shodují s přístupy obou autorů k řešení matematických úloh.

[3]T. Tao zmiňuje Pólyovo dílo [2] již na první stránce své knihy.

[4]T. Tao zmiňuje Pólyovo dílo [2] již na první stránce své knihy T. Tao: „*I just like mathematics because it is fun.*“ [3, Preface].

Závěr

Problematice řešení problémů je v anglosaské literatuře věnována značná pozornost (viz např. [4] nebo [5]). Cílem tohoto článku proto bylo přiblížit některé přístupy a myšlenky i českému čtenáři (učiteli matematiky). Tyto přístupy jsou součástí řešení praktických problémů s využitím matematiky (viz např. [6]) a do jisté míry jsou použitelné i pro řešení problémů mimo oblast matematiky. Zájemce o problematiku utváření a rozvoje jednotlivých klíčových kompetencí lze odkázat na metodický portál RVP.

G. Pólya i jeho dílo jsou dnes již legendární, proto si závěrem dovolím citovat jeho slova [2]: „Učitel matematiky má jedinečnou příležitost. Jestliže naplní čas určený k výuce neustálým procvičováním rutinních operací, omezí tím intelektuální rozvoj svých žáků a s touto příležitostí naloží špatně. Ale pokud pobídne zvědavost svých žáků tím, že jim předloží problém přiměřený jejich znalostem a pomůže jim svými otázkami tento problém vyřešit, zakusí jeho žáci možnost nezávislého myšlení. Tato zkušenost může podnítit chuť žáků k duševní práci a do konce života formovat jejich myšlení a charakter …“

Literatura

[1] RVP – Metodický portál. Dostupné na WWW: <http://rvp.cz>.

[2] *Pólya, G.*: How To Solve It – A New Aspect of Mathematical Method. 2nd Edition. USA: Princeton University Press, 1957.

[3] *Tao, T.*: Solving Mathematical Problems – A Personal Perspective. USA: Oxford University Press, 2006.

[4] *Jonassen, D.*: Learning to Solve Problems – An Instructional Design Guide. USA: Pfeiffer, 2004.

[5] *Bransford, J. Stein, B. S.*: The IDEAL Problem Solver: A Guide for Improving Thinking, Learning, and Creativity. USA: Freeman, 1993.

[6] *Trávníček, S.*: Matematizace reálných situací. MFI, 11 (2001/02), č. 7, s. 388–398.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2012 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.* Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 185

Dokažte, že

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{\sqrt{27}}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{\sqrt{27}}}$$

je přirozené číslo.

Stanislav Trávníček

Úloha 186

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a bod E, který neleží na jeho hranici. V bodech A, B, C, D jsou v daném pořadí sestrojeny rovnoběžky a, b, c, d s přímkami EC, ED, EA a EB. Dokažte, že přímky a, b, c, d procházejí jedním bodem.

Pavel Leischner

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (18.) ročník této rubriky, který je zároveň osmým ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce obdržela celkem 110 úplných nebo částečných řešení od 44 jednotlivců (alespoň jednu vyřešenou úlohu druhého cyklu přitom zaslalo 166 řešitelů). Za každou úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body; k-násobným laureátem této rubriky se stane řešitel, který získá od 11. ročníku alespoň k-násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí řešitelů po osmém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže: 1. *Anton Hnáth* z Moravan (339 b.), 2. *Karol Gajdoš* z Trnavy (228 b.), 3. *Vladimír Pavel* z Blovic (213 b.), 4. *Jozef Mészáros* z Jelky (183 b.), 5. *Miroslav Hübsch* z Prahy 5 (156 b.), 6. *Jiří Steckbauer* z Květné (132 b.), 7. *František Jáchim* z Volyně (120 b.),

Novými laureáty se stávají *Jiří Steckbauer* a *František Jáchim.* Srdečně jim blahopřejeme.

Pavel Calábek