

MATEMATIKA

Rozumět nebo umět

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta UHK, Hradec Králové

„Škola nemá jinou důležitější úlohu, než učit jasnému myšlení, opatrnému úsudku, konsekventním závěrům.“

Friedrich Nietzsche ([1], s. 45)

„Matematika je věda o myšlení, návod k žití. Kdyby se matematika neučila, staneme se národem hlupáků. Děti budou chodit po světě bez schopnosti mu porozumět.“

Jaroslav Nešetřil [2]

1. Úvod

Bezprostředním podnětem k napsání tohoto příspěvku byl průběh dílčí zkoušky z geometrie studentky, která prakticky bez chyb reprodukovala důkaz věty o obrazu přímky v kruhové inverzi, ačkoliv mu vůbec nerozuměla, nerozuměla ani definici kruhové inverze a neuměla sestavit ani obraz bodu v tomto zobrazení. I když se s takto vyhraněným přístupem nesetkáváme zcela běžně, je snaha o studium matematiky založené na paměti a podceňování porozumění jevem dosti běžným. Matematika takto pojímaná nepřispívá k rozvíjení myšlení.

Trapným příkladem neporozumění textu jsou některé překlady z cizího jazyka. Snad překladatel ovládá příslušný jazyk, ale někdy překládá slova a věty, aniž by věděl, o čem je řeč. Doložme to příklady z matematiky.

V českém překladu knihy *Historie čísla π* je citována jedna z nejkrásnějších vět elementární geometrie *Pascalova věta* o šesti bodech na kuželosečce takto: „*Průsečíky protilehlých stran hvězdicového šestiúhelníku vepsaného do kužele jsou kolineární*“ ([3], s. 101), *Milan Mareš* píše o tomtéž velkoryse: *Pascal „už v šestnácti napsal filozofický rozklad o kónických úsečích“* ([4], s. 193).

V překladu populární historie matematiky *Denise Guedje* se můžeme dočíst např., že Fermat dokázal větu „*Neeexistuje pravouhlý trojúhelník, jehož obsah je čtvercem přirozeného čísla*“ ([5], s. 327) a o rozkladu na prvočinitele se píše: *Celé číslo může vzniknout jen jediným způsobem (vyloučíme-li použití činitelů) totiž násobením prvočísel* ([5], s. 135).

Zcela bez porozumění reprodukováný matematický důkaz má stejnou hodnotu jako např. odříkání *Morgensternovy básně Die Kugeln* ([6], s. 54, abychom zůstali u geometrie) žákem, který nezná ani slovo německy. Je ovšem třeba přiznat, že student, který např. vyjmenuje díla *Karla Čapky* a reprodukuje obsah jeho románu *Krakatit* podle literární příručky, může být hodnocen výborně, stejně jako např. student, který vyjmenuje hlavní toky naší republiky a reprodukuje přesně podle učebnice např. údaje o klimatu v české kotlině. Tento rozdíl mezi matematikou a některými jinými předměty někteří studenti těžko chápou, mnozí i těžce nesou. Je ovšem otázka, zda takovýto povrchní přístup k vědění není v současné době příznakem jisté krize kultury. „*Vždy, když se dnes mluví o vědění, jde vždy o něco jiného než o pochopení,*“ píše rakouský vědec *Liessmann* ([1], s. 51)

2. Paměť a porozumění

Co si vlastně mají žáci a studenti z matematiky pamatovat, co mají „umět“? To je důležitá praktická otázka a názory na odpověď mohou být různé. Např. *Milan Mareš* v článku *Radost z A plus B* na druhou napsal: „*Jsem matematik a mám matematiku rád. Kdybych ji měl učit, zakázal bych svým žákům biflování vzorečků z paměti. Vzorečky se dají snadno najít v příručce nebo zapsat do notýsku a já bych jejich užívání doporučoval i při zkoušení*“ ([7]). *Petr Piňha* naopak píše: „*V souvislosti s vedením k myšlení je třeba připomenout význam paměti. Mám na mysli znalost vzorečků především. Nesporně je pravda, že je můžeme vždy znovu odvodit (nebo najít). Jenže pouze ztřeštěnec je bude vždy znovu odvozovat při každém příkladu, který má řešit. Matematik trpící nedostatkem paměti bude buď génius, který zopakuje kdykoli bleskurychle všechno poznání od Pythagora až po Cantora atd., nebo trouba, který nikdy nic nezvládne*“ ([8], s. 147).

Chápeme-li *porozumění* v běžném smyslu, tj. jako „*postižení souvislostí, vztahů, smyslu a podstaty problémů*“ ([9], s. 422), je zřejmé, že porozumění je spjato s pamětí. Porozumění textu předpokládá nejen znalost významu slov (a je lhostejné, zda jde o text v cizím jazyku nebo o odborný text např. v matematice nebo ve fyzice), ale i o znalost souvislostí. Porozumění textu je základem řešení problémů.

Přitom je nutné respektovat tradici a konvence. K porozumění matematice nepřispívají texty formulované např. takto:

„V aritmetice známe zlomky kmenové (to jsou ty, které dnes píšeme se zlomkovou čarou) a desetinné (na které potřebujeme mít desítkovou poziční číselnou soustavu) a jejich analogie pro podobné soustavy s jiným základem. Všem číslům, která se dají napsat jako kmenový zlomek (tedy jako poměr dvou celých čísel), nemající ve jmenovateli číslo 0, se říká čísla racionální podle řeckého „racio“ – poměr.“ ([4], s. 45).

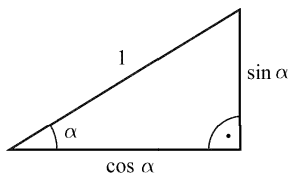
„... nemá smysl sčítat imaginární a reálné číslo, má ale smysl je násobit“ ([4], s. 112)

K pochopení souvislostí může podstatně přispívat prezentace poznatků různými jazyky (např. verbálně a vizuálně) a různými metodami (např. analyticky a synteticky). Prioritně tedy nejde o roli paměti např. při zkoušení, ale o roli paměti v porozumění matematice, zejména pak při řešení úloh. Přitom samozřejmě musíme znát a rozumět potřebným pojmům (které se v matematice zavádějí zpravidla definicemi), musíme znát souvislosti v matematice formulované obvykle ve větách. Vzorce nejsou nic jiného než symbolicky zapsané matematické věty, jejichž „okolí“ (např. kvantifikátory nebo význam symbolů) bývá někdy „zamlčeno“ (někdy právem, je-li např. zřejmé oč jde z kontextu).

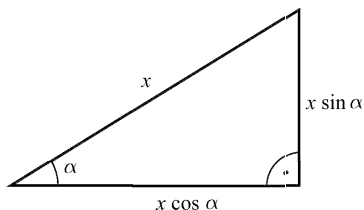
V další části článku uvedu, snad jako inspiraci pro výuku, několik příkladů, jak lze podle mého názoru přispívat k porozumění vybraným tématům středoškolské matematiky. Jsem si vědom toho, že pojednávám jen o jedné stránce problematiky. K porozumění matematice přirozeně vede především systém otázek a úloh, které studující řeší. Touto problematikou se zde nebudu zabývat.

3. Goniometrické funkce

Na obr. 1a jsou připomenuty představy spjaté s definicemi funkcí sinus a kosinus ostrého úhlu. Tyto definice lze známým způsobem rozšířit na funkce s definičním oborem rovným množině všech reálných čísel.



Obr. 1a



Obr. 1b

Jakým způsobem lze odvodit součtové vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

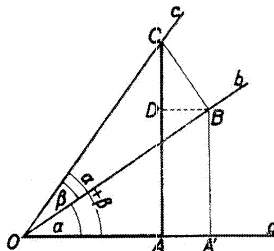
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta?$$

Klasický způsob pro případ, kdy součet $\alpha + \beta$ je ostrý úhel, připomenu reprodukci části stránky učebnice [10] na obr. 2.

Chtějíc poznati, jak je možno $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ vyjádřiti funkcemi obou úhlů jednotlivých ($\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta$), zvolme nejprve dva ostré úhly α a β , jejichž součet je menší než R , a učiňme tyto úhly styčnými: $\alpha = ab$, $\beta = bc$ (vrchol O , obr. 39). S bodu C na rameni c spusťme kolmici CA na rameno a ; i jest

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AC}{OC}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{OA}{OC}.$$

S bodu C spusťme dále kolmici CB na rameno b a s její paty B kolmici BA na a , konečně s bodu B kolmici BD na CA .



Obr. 39.

Platí

$$\begin{aligned} AC &= A'B' + DC \text{ protože } AD = A'B \\ &= OB \cdot \sin \alpha + BC \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

(z $\triangle Oa'B$ a z $\triangle CDB$, jehož úhel $DCB = \alpha$, protože úhel ten má ramena kolmá k ramenům úhlu ab a je téhož smyslu jako tento). Proto

$$\frac{AC}{OC} = \sin \alpha \cdot \frac{OB}{OC} + \cos \alpha \cdot \frac{BC}{OC} \text{ čili (z } \triangle OBC)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Obdobně nalezneme:

$$\begin{aligned} OA &= OA' + DB \\ &= OB \cdot \cos \alpha - CB \cdot \sin \alpha, \\ \frac{OA}{OC} &= \cos \alpha \cdot \frac{OB}{OC} - \sin \alpha \cdot \frac{CB}{OC} \text{ čili} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Obr. 2

Náše současné učebnice uvádějí postup pro dutý součet $\alpha + \beta$ podle obr. 3 ([11], s. 76–78).

- Pro goniometrické funkce sinus a kosinus platí tyto věty
- Pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (1)$$

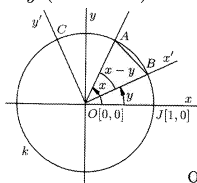
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (2)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (3)$$

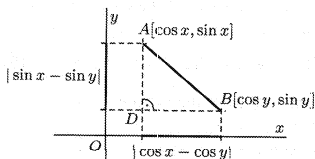
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (4)$$

Vzorce (1)–(4) se nazývají součtové vzorce pro sinus a kosinus
Důkaz (4). Předpokládejme nejprve, že x, y jsou čísla z intervalu $(0, 2\pi)$ a přitom $x > y$.

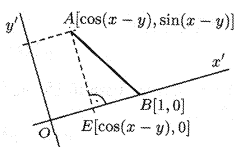
V soustavě souřadnic s počátkem O sestrojíme úhel $\widehat{JOA}$ o velikosti x a úhel $\widehat{JOB}$ o velikosti y (obr. 3.2a).



Obr. 3.2a



Obr. 3.2b



Obr. 3.2c

Potom bod J má souřadnice $[1, 0]$, bod $A[\cos x, \sin x]$, bod $B[\cos y, \sin y]$. Body A, B vedeme rovnoběžky s osami souřadnic. V pravoúhlém trojúhelníku ABD (obr. 3.2b) platí

$$|AB|^2 = |\cos y - \cos x|^2 + |\sin x - \sin y|^2,$$

čili

$$|AB|^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin x - \sin y)^2,$$

a po úpravě

$$|AB|^2 = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y), \quad (5)$$

Otočíme-li soustavu souřadnic Oxy o úhel $\widehat{JOB}$ (polopřímka OJ se přitom otočí v kladném smyslu o úhel velikosti y), přejde osa x do polohy $x' = OB$

Obr. 3a

a osa y do polohy y , přičemž $y'x'$. Pro body A, B v této nové soustavě souřadnic $Ox'y'$ bude platit: $B[1, 0]$, $A[\cos(x-y), \sin(x-y)]$. Bodem A vedeme rovnoběžky s osami souřadnic. V pravoúhlém trojúhelníku AEB (obr. 3.2c) platí

$$|BE| = |1 - \cos(x-y)|,$$

a tedy

$$|AE| = |\sin(x-y)|,$$

čili

$$|AB|^2 = |1 - \cos(x-y)|^2 + |\sin(x-y)|^2,$$

a po úpravě

$$|AB|^2 = [1 - \cos(x-y)]^2 + [\sin(x-y)]^2,$$

$$|AB|^2 = 2 \cdot [1 - \cos(x-y)], \quad (6)$$

Porovnáním vztahů (5) a (6) získáme dokazované tvrzení

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

Jestliže $x, y \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a přitom $x = y$, pak po dosazení do (4) dostaneme

$$\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

čili

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

což platí.

Jsou-li $x, y \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a přitom $x < y$, potom

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos[-(y-x)] = \cos(y-x) = \\ &= \cos y \cdot \cos x + \sin y \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Přejdeme nyní k důkazu vzorce (1), dříve si však ještě dokážeme dvě pomocné věty

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (10)$$

Důkaz (9). Podle (4) je

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cdot x + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin x = \\ &= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x \end{aligned}$$

Důkaz (10). Podle (9) je

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x.$$

Důkaz (1). Využijeme (9) a (10):

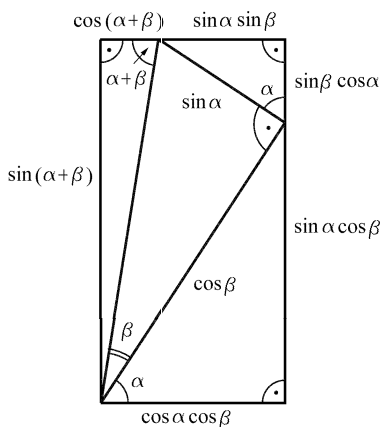
$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin y = \\ &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y. \end{aligned}$$

což, jsme měli dokázat.

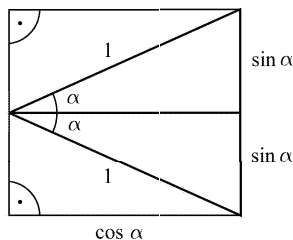
Obr. 3b

Oč jednodušší je odvození, které můžeme nahlédnout s použitím „vzor-
ce“ 1b z obr. 4?

Odvození podle učebnice [11] stěží student porozumí, neboť myšlenko-
vých operací je v něm celá řada a odvození je velmi dlouhé. Odvození na
obr. 4 je velmi jednoduché a opírá se pouze o „podstatné“ vlastnosti funkcí
sinus a kosinus.



Obr. 4



Obr. 5

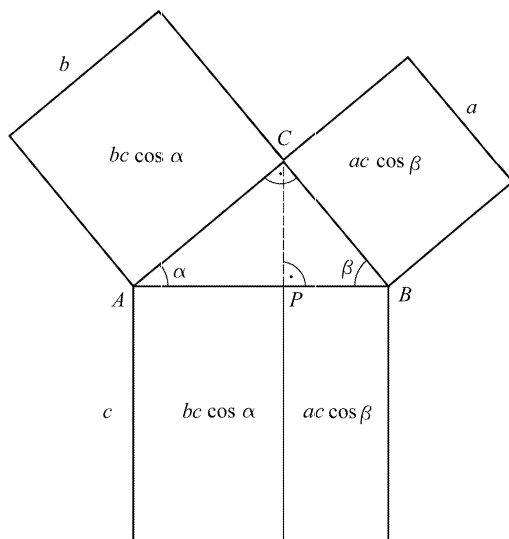
Připomeňme další možnosti aplikací obr. 1b.

Na základě vzorce $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ pro obsah trojúhelníku se můžeme
podle obr. 5 přesvědčit o platnosti vzorce

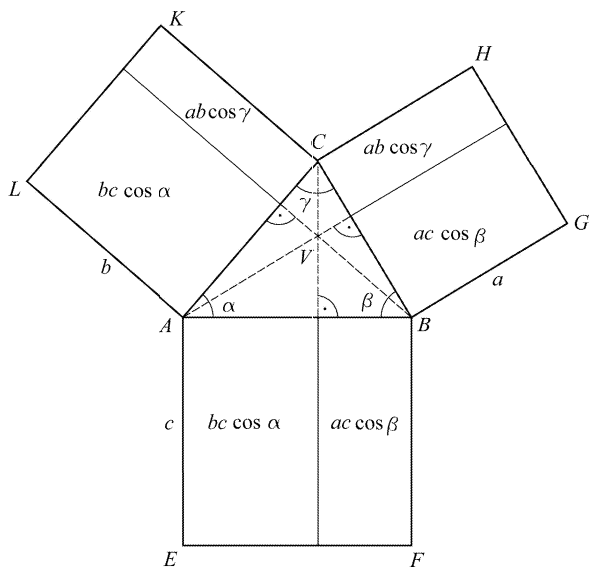
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Podle obr. 6 můžeme dokázat Pythagorovu větu, neboť

$$\begin{aligned} |AC| &= b = c \cos \alpha, \\ |BC| &= a = c \cos \beta, \\ |AP| &= b \cos \alpha, \\ |BP| &= a \cos \beta. \end{aligned}$$



Obr. 6



Obr. 7

Podle obr. 7 lze pro ostroúhlý trojúhelník dokázat kosinovou větu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

neboť součet obsahů čtverců nad stranami a , b je o $2ab \cos \gamma$ větší než obsah čtverce na stranou c . Srovnání s učebnicí [11] je opět poučné.

4. Posloupnosti a řady

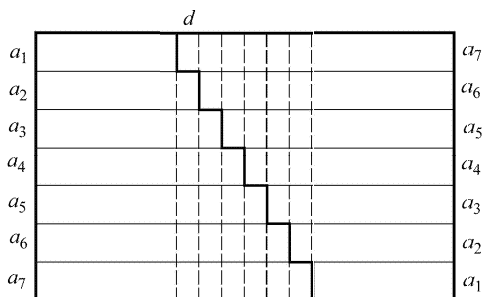
Ačkoliv je všeobecně uváděn nápad mladého Gausse pro výpočet součtu

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5\,050,$$

nenášel jsem v našich učebnicích tento nápad aplikovaný na odvození součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti s prvním členem a_1 a diferencí d :

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

podle obr. 8.



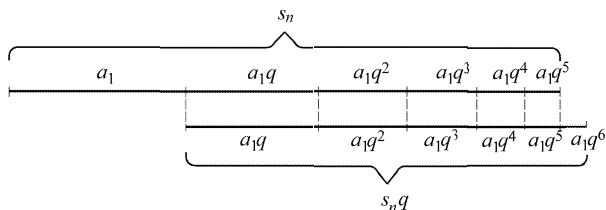
Obr. 8

Nejčastější postup odvození vzorce

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti je vhodné ilustrovat obrázkem 9. Protože

$$s_n q = s_n - a_1 + a_1 q^n,$$



Obr. 9

je

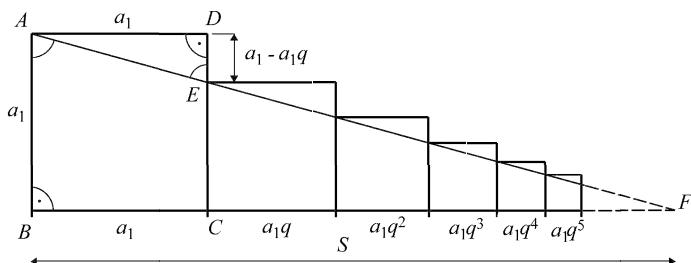
$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Součet

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

nekonečné geometrické řady s prvním členem a_1 a kvocientem $0 < q < 1$, je možné názorně odvodit podle obr. 10, který je inspirován publikací [12], s. 120). Trojúhelník ABF je podobný trojúhelníku EDA a platí tedy

$$\frac{s}{a_1} = \frac{1}{1 - q}.$$



Obr. 10

Odvození podané v učebnici [13], které připomínáme obr. 11, je jistě na hlubší teoretické úrovni, obrázek 10 je však podle mého názoru přesvědčivější.

- Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$, pak posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + \dots + a_n$, je konvergentní a přitom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Kvocient posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je různý od čísla 1, je tedy

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Vzhledem k tomu, že $|q| < 1$, posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (viz větu v článku 3.2). Vypočítáme nyní limitu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n - 1) = \\ &= \frac{a_1}{q - 1} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} q^n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \right) = \frac{a_1}{q - 1} \cdot (0 - 1) = \frac{a_1}{1 - q}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

Obr. 11

5. Vidění souvislostí

Jedním z nedostatků řady učebnic matematiky je malá pozornost, která se věnuje souvislostem různých pojmů. Ilustrujme tuto skutečnost na dvou příkladech.

Na obr. 12 z učebnice [14] vidíme, že autoři řeší úlohu podrobným „množinově – logickým“ rozbořením, ačkoliv je zřejmé, že graf relace

$$|x| + |y| = 2$$

je souměrný podle souřadnicových os a stačí tedy přenést část grafu funkce $y = 2 - x$ souměrnostmi z prvního do zbývajících kvadrantů.

V učebnicích *Stereometrie* [15], *Analytická geometrie* [16] a *Rovnice a nerovnice* [17] jsem marně hledal byť aspoň zmínku o tom, že řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých lze interpretovat jako určování společných bodů tří rovin, ačkoliv je vše potřebné v těchto učebnicích vyloženo. Ilustrovat na příkladech např. diskusi o vzájemné poloze tří rovin řešením soustav by jistě bylo přínosné.

Sestrojte graf relace v $\mathbf{R}$ dané výrokovou formou $|x| + |y| = 2$.

Řešení. Zkoumanou relaci označme $\mathbf{T}$. Zkusme ji vyjádřit ve tvaru sjednocení relací, které jsou dány výrokovými formami, v nichž je y „bez absolutní hodnoty“. Víme, že platí:

$$|y| = \begin{cases} y & \text{pro každé } y \geq 0 \\ -y & \text{pro každé } y \leq 0 \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\mathbf{T} = \mathbf{U} \cup \mathbf{V}$, přičemž

$$\mathbf{U} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; |x| + y = 2 \wedge y \in \langle 0, +\infty \rangle\},$$

$$\mathbf{V} = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; |x| - y = 2 \wedge y \in (-\infty, 0)\}.$$

Relace $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ jsou zřejmě funkcemi, přitom $D(\mathbf{U}) = D(\mathbf{V}) = \langle -2, 2 \rangle$ (promyslete).

Lze tedy psát

$$\mathbf{U} : y = -|x| + 2, \quad \text{kde } x \in \langle -2, 2 \rangle,$$

$$\mathbf{V} : y = |x| - 2, \quad \text{kde } x \in \langle -2, 2 \rangle,$$

Dále dospějeme k tomu, že $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$, přičemž

$$\mathbf{U}_1 : y = x + 2, \quad \text{kde } x \in \langle -2, 0 \rangle,$$

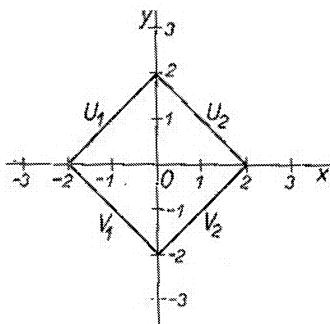
$$\mathbf{U}_2 : y = -x + 2, \quad \text{kde } x \in \langle 0, 2 \rangle,$$

$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$, přitom

$$\mathbf{V}_1 : y = -x - 2, \quad \text{kde } x \in \langle -2, 0 \rangle,$$

$$\mathbf{V}_2 : y = x - 2, \quad \text{kde } x \in \langle 0, 2 \rangle,$$

Graf relace $\mathbf{T} = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$ je sestrojen na obr. 2.10. Je $\mathbf{T}$ funkcí?



Obr. 2.10

Obr. 12

6. Závěry

Vyučování matematice nerozvíjí myšlení díky svému předmětu (čísłům, výpočtům, rovnicím či konstrukcím), ale může myšlení kultivovat využíváním příležitostí řešit úlohy, provádět výpočty, konstruovat pojmy, zobecňovat, provádět abstrakce či aplikovat teorii. Umět něco z matematiky znamená především tomu rozumět. Porozumění pojmům a postupům souvisí s představami o těchto jevech. „*Učiti se znamená vyhledávati, jak bys mohl něco duchem vytvářeti,*“ říká Jan Ámos Komenský ([18], s. 11). „*Vlastní náhled znamená, že nespokujíce se cizím vyprávěním, ohledáváme věci přímo ... To má velikou důležitost pro skutečné a mohutné vtisknutí představ*“ ([19], s. 67). Roli představ v poznávání zdůrazňuje i John Dewey: „*Představa je významným nástrojem vyučování. Z předmětu, který dítěti předložíme, získává představy, jež si na jeho základě samo vytvoří. Kdyby se devět desetin energie vynakládáné dnes na to, aby se určitým věcem naučilo, spotřebovalo na vytváření odpovídajících představ, vyučovací práce by se nekonečně usnadnila*“ ([20], s. 64). Představy souvisejí s vizualizací učiva. Naše učebnice matematiky jsou podle mého názoru ilustračně chudé. Je zajímavé, že ačkoliv odvození podobná obr. 4 jsou u nás známa minimálně od roku 1989, kdy vyšla „Žlutá kniha“ [21], která se jimi zabývá, autoři učebnic takovéto přístupy zřídka využívají. To se týká např. i uzlových a kartézských grafů nebo stromů logických možností (klasická kniha amerických autorů *Kemeny, Snell, Thompson*, která tuto problematiku uvádí, vyšla v českém překladu v roce 1971 [22]).

Ilustrace mají obvykle proti slovnímu vyjádření významnou výhodu: jdou přímo k podstatě věci. A podle Komenského „*Cokoli vede přímo k cíli, jest královskou silnicí; cokoli má vzhled zájezdní hospody, nechť je považováno za průtah*“ ([19], s. 89). Podle amerického psychologa Rudolfa Arnheima „skutečné tvůrčí myšlení v jakémkoliv oboru poznání se odehrává v naší představivosti“ (citováno podle knihy [23], s. 199). Tato myšlenka nás u psychologa umění patrně nepřekvapí. V podobném duchu se však vyjádřil i jeden z našich nejvýznamnějších matematiků Eduard Čech: „*Umět úlohu přeložit z řeči slov do řeči obrazů a obráceně, to není spjato jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení*“ (citováno podle [24]).

K porozumění matematice přispívá výrazně neverbální vyjadřování, jež jsme zde věnovali pozornost.

Rozumět nebo umět není alternativa ve vyučování. Rozumět a na tomto základu i umět je základem úspěšného studia matematiky.

Rozvíjet myšlení a porozumění matematice lze pouze v atmosféře vzájemného porozumění učitele a žáka.

Literatura

- [1] *Liessmann, K. P.*: Teorie nevzdělanosti. Academia, Praha 2008.
- [2] *Nešetřil, J.*: Lidé počítače podceňují. Lidové noviny 4. 1. 2011.
- [3] *Beckmann, P.*: Historie čísla . Academia, Praha 1998.
- [4] *Mareš, M.*: Příběhy matematiky. Praha.
- [5] *Guedj, D.*: Papoušekův teorém. Ikar, Praha 2000.
- [6] Morgenstern v Čechách. Vida vida, Praha 1996.
- [7] *Mareš, M.*: Radost z A plus B na druhou. Lidové noviny 20. 6. 2006.
- [8] *Piřha, P.*: Archa matematiky ve víru liberalistické relativizace. In: Jak připravit učitele matematiky. J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed). Matfyzpress. Praha 2010.
- [9] *Hartl, P. – Hartlová, H.*: Psychologický slovník. Portál, Praha, 2000.
- [10] *Vojtěch, J.*: Geometrie pro VI. třídu středních škol. JČMF, Praha 1946.
- [11] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia. Goniometrie. Prometheus, Praha 1994.
- [12] *Nelsen, R. B.*: Proofs without Words. MAA, Washington 1993.
- [13] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady. Prometheus, Praha 1995.
- [14] *Odvárko, O. – Fořt, J. – Novák, B.*: Matematika pro gymnázia. Sešit 3. SPN, Praha 1978.
- [15] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Stereometrie. Prometheus, Praha 1995.
- [16] *Kočandrlé, M – Boček, L.*: Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie, Prometheus, Praha 1995.
- [17] *Boček, L – Bočková, J. – Charvát, J.*: Matematika pro gymnázia. Rovnice a nerovnice. Prometheus, Praha 1994.
- [18] *Komenský, J. A.*: Analytická didaktika. Státní nakladatelství, Praha 1947.
- [19] *Komenský, J. A.*: Didaktika analytická. Samcovo knihkupectví, Praha 1946.
- [20] *Dewey, J.*: My Pedagogic Cread. Citováno podle Singule, F.: Americká pragmatická pedagogika, SPN, Praha 1991.
- [21] *Hejný a kol.*: Teoria vyučovania matematiky. SPN, Bratislava 1989.
- [22] *Kemeny, J. G. – Snell, J. L. – Thompson, G. L.*: Introduction to Finite Mathematics. Český překlad 1971.
- [23] *Gardner, H.*: Dimenze myšlení. Portál, Praha, 1999.
- [24] *Holubář, J.*: Metodické semináře akademika Čecha o matematice. Matematika ve škole 6. X (1960), s. 325–329.

Zajímavé matematické úlohy

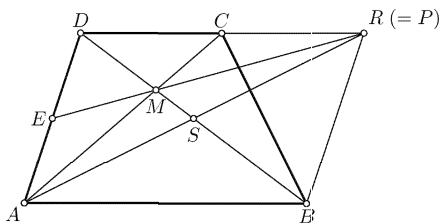
Uvádíme řešení úloh 179 a 180, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 179

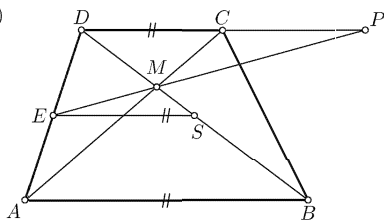
Nechť pro základny AB a CD lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB| = 2|CD|$. Označme M průsečík jeho úhlopříček AC a BD , E střed strany AD a P průsečík přímek EM a CD . Dokažte, že platí $|CP| = |CD|$.

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení. Doplňme nejprve lichoběžník $ABCD$ na rovnoběžník $ABRD$ a označme S průsečík jeho úhlopříček (obr. 1). Z vlastností rovnoběžníku plyne $|DR| = |AB|$, tedy podle zadání $|CR| = |CD|$. Bod S je středem úhlopříček BD a AR .



Obr. 1



Obr. 2

Odtud vidíme, že úsečky SD a AC jsou těžnicemi trojúhelníku ADR a M je jeho těžiště. Třetí těžnice tohoto trojúhelníku leží tudíž na přímce EM , která protíná přímku CD v jediném bodě R . Proto bod P je totožný s bodem R . Z rovnosti $|CR| = |CD|$ tak plyne $|CP| = |CD|$.

Jiné řešení. (podle Lenky Staré)

Nechť S je střed úhlopříčky BD (obr. 2). Úhly ABM a MDC jsou střídavé, tudíž shodné. Úhly AMB a CMD jsou vrcholové, tedy shodné. Podle předpokladů platí $|AB| = 2|CD|$, tedy trojúhelníky ABM a CMD jsou podobné s poměrem podobnosti $2 : 1$, proto $|BM| = 2|DM|$. Odtud

a z rovnosti $|DS| = |SB|$ dále plyne $2|MS| = |DM|$. Jelikož ES je střední příčka trojúhelníku ABD , platí $|ES| = \frac{1}{2}|AB| = |CD|$. (Je rovnoběžná se stranou AB a tedy i se stranou CD .) Podobnými úvahami ukážeme, že trojúhelníky EMS a PMD jsou podobné s poměrem podobnosti $1 : 2$. Odtud již plyne $|PD| = 2|SE| = 2|CD|$, což je ekvivalentní s tvrzením $|CP| = |CD|$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *David Binar*, *Jana Novotná*, *Dominik Tělužil* a *Jakub Vančura*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Zuzana Boršiová* z G v Teplících, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Hana Dlouhá* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Eva Gocníková* z GJS v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *David Hruška* a *Michal Nožička* oba z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jan Klusáček* z G v Třebíči, *Jakub Krásenský* z G v Jihlavě, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Jan Mikel* z G v Rožnově p. R., *Michal Opler* z MG ve Vsetíně, *Pavel Polcer* z G v Brně, Křenová, *Lenka Stará* z G v Českých Budějovicích, *Jirovcova* a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplné řešení zaslal *Pavel Trutman* z GMK v Bílovci.

Úloha 180

Najděte nejmenší přirozené číslo k s vlastností: Z každých k (ne nutně různých) přirozených čísel z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$ lze vždy vybrat několik čísel, jejichž součin dává při dělení číslem 67 zbytek 1.

Pavel Calábek

Řešení. Nejprve ukážeme, že $k > 65$. K tomu nám stačí zjistit, že nejmenší přirozená mocnina čísla 2, která při dělení prvočíslem 67 dává zbytek 1, je 66. Potom z 65 čísel rovných dvěma nebudeme moci vybrat několik čísel, jejichž součin při dělení 65 dává zbytek 1.

Podle malé Fermatovy věty číslo 67 dělí číslo $2^{66} - 1$. Nechť n je nejmenší přirozené číslo takové, že 67 dělí $2^n - 1$. Ukážeme, že n dělí číslo 66. Pokud by to neplatilo, existovalo by celé nezáporné číslo m a přirozené číslo r z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ tak, že $66 = mn + r$. Z kongruence

$$1 \equiv 2^{66} \equiv 2^{mn+r} \equiv (2^n)^m 2^r \equiv 1^m 2^r \equiv 2^r \pmod{67}$$

plyne, že 67 dělí $2^r - 1$, což je spor s tím, že n je nejmenší přirozené číslo této vlastnosti. Množina dělitelů čísla 66 menších než 66 je množina $\{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33\}$. Čísla $2^1, 2^2, 2^3, 2^6, 2^{11}$ mají při dělení 67 po řadě zbytky 2, 4, 8, 64, 38. Z kongruencí

$$2^{22} \equiv (2^{11})^2 \equiv 38^2 \equiv 37 \pmod{67},$$

$$2^{33} \equiv (2^{11})^3 \equiv 38^3 \equiv 66 \pmod{67}$$

plyne, že ani čísla $2^{22}, 2^{33}$ nemají při dělení 67 zbytek 1. Proto $k > 65$.

Nyní ukážeme, že z každých 66 (ne nutně různých) přirozených čísel označených $a_1, a_2, \dots, a_{66}$ z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$ lze vždy vybrat několik čísel, jejichž součin dává při dělení číslem 67 zbytek 1. Označme

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 a_2, \quad s_3 = a_1 a_2 a_3, \quad \dots, \quad s_{66} = a_1 a_2 \dots a_{66}.$$

Žádné z čísel s_i není dělitelné prvočíslem 67. Pokud by některé z nich dávalo při dělení 67 zbytek 1, tvrzení platí. Jinak těchto 66 čísel má 65 možných zbytků z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$, podle Dirichletova principu tedy existují alespoň dvě čísla s_q a s_r ($1 \leq q < r \leq 66$), která dávají stejný zbytek při dělení 67. Proto 67 dělí jejich rozdíl $s_r - s_q$. Avšak

$$s_r - s_q = s_q (a_{q+1} a_{q+2} \dots a_r - 1).$$

Součin čísel $a_{q+1} a_{q+2} \dots a_r$ dává při dělení 67 zbytek 1 a dokazované tvrzení platí i v tomto případě.

Tím jsme ukázali, že nejmenší přirozené číslo k dané vlastnosti je 66.

Poznámka. Ve druhém odstavci jsme ukázali, že číslo 2 je tzv. *primitivním kořenem* modulo 67. Místo mocnin čísla 2 stačilo uvažovat mocniny libovolného primitivního kořene, jak správně uvedli někteří řešitelé, i když věty o existenci primitivního kořene nepatří do středoškolského učiva.

Správná řešení zaslali *David Hruška* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jakub Krásenský* z G v Jihlavě, *Le Anh Dung* z G v Tachově, *Lenka Stará* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova* a *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích.

Neúplné řešení zaslal *Michal Kopf* z SG v Opavě.

Pavel Calábek