

MATEMATIKA

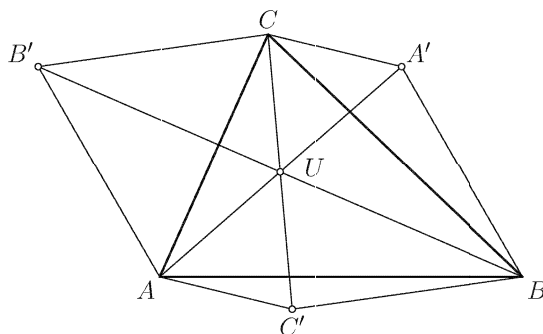
Šestero řešení úlohy z 60. ročníku MO

JAROMÍR ŠIMŠA – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta MU, Brno – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na zasedání společné česko-slovenské úlohové komise MO v květnu 2010 byla pro II. (krajské) kolo 60. ročníku soutěže (2010/2011) v kategorii A vybrána také následující planimetrická úloha navržená *dr. Pavlem Leischnerem*.

Je dán trojúhelník ABC s obsahem S . Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC , je libovolně zvolen bod U . Označme A' , B' , C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U . Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



Obr. 1

Na základě prezentace dvou odlišných autorových řešení¹ byla tato úloha na jednání komise vnímána jako středně obtížná pro uvedenou soutěžní část v kategorii A. Při opravování žákovských protokolů v jednotlivých krajích a rovněž při centrální koordinaci před III. kolem soutěže se však ukázalo, že úloha byla pro žáky snazší, než jsme očekávali. Zařazení úlohy s nepřesně odhadnutou obtížností však nijak nezhodnotilo II. kolo MO v kategorii A, navíc pestrá paleta nápaditých žákovských přístupů k řešení této planimetrické úlohy byla pro nás velice příjemným překvapením. Za zmínku také stojí, že žádný z řešitelů nevyužil postupu, který je shodný s prvním, třetím ani čtvrtým řešením této soutěžní úlohy, která jsme před soutěžním kolem rozeslali krajským komisím MO.

Cílem tohoto příspěvku je seznámit naše čtenáře s několika pěknými řešeními zadané soutěžní úlohy, která jsme získali v průběhu již zmíněné centrální koordinace úloh krajského kola, a která jsou dokladem pozoruhodné vynalézavosti našich mladých olympioniků při řešení nestandardních planimetrických úloh.

Dříve než vyložíme konkrétní žákovská řešení, uvedeme některé zřejmé vlastnosti uvažovaného šestiúhelníku $AC'BA'CB'$, které dotyční žáci zohlednili a které nebudeme při výkladu jejich řešení opakovat. Předně si uvědomme, že s ohledem na určenou polohu bodu U leží body A', B', C' vně trojúhelníku ABC tak, že zkoumaný šestiúhelník $AC'BA'CB'$ je konvexní. Vzhledem k souměrnosti tří dvojic (A, A') , (B, B') , (C, C') vrcholů šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ podle zvoleného středu U je rovněž patrné, že $ABA'B'$, $BCB'B'$ a $CAC'A'$ jsou rovnoběžníky.

Symbolem $S_{XY\dots Z}$ budeme označovat obsah mnohoúhelníku $XY\dots Z$.

Řešení podle Karla Beneše z G v Kojetíně.

Šestiúhelník $AC'BA'CB'$ je středově souměrný podle zvoleného bodu U (obr. 1). Každá z jeho úhlopříček AA' , BB' , CC' tudíž dělí tento šestiúhelník na dva shodné čtyřúhelníky, a proto například platí

$$S_{AC'BA'CB'} = 2 S_{AC'BA'}.$$

¹Na oficiálních webovských stránkách [1] naší MO jsou uvedena ještě dvě další řešení (jako druhé a čtvrté). Spolu s šesti řešeními z tohoto článku tak disponujeme *desaterem* různých postupů, jak danou úlohu vyřešit.

Stačí tedy dokázat, že čtyřúhelník $AC'BA'$ má stejný obsah S jako trojúhelník ABC . Protože úsečka AU je těžnicí v trojúhelníku CAC' , platí

$$S_{AUC'} = S_{AUC}. \quad (1)$$

Podobně úsečka BU je těžnicí v trojúhelnících ABA' a CBC' . Platí tudíž

$$S_{BUC'} = S_{BUC} \quad \text{a} \quad S_{BUA'} = S_{BUA}. \quad (2)$$

Sečtením všech tří rovností ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$S_{AC'BA'} = S_{AUC'} + S_{BUC'} + S_{BUA'} = S_{AUC} + S_{BUC} + S_{BUA} = S,$$

což dokazuje platnost daného tvrzení.

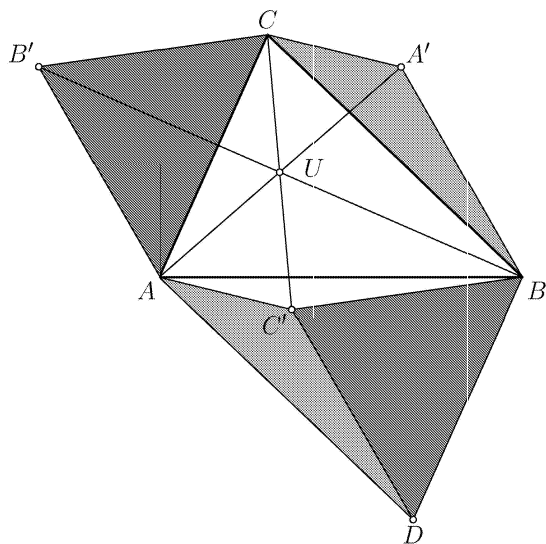
Obdobného postupu (*metody shodných obsahů*) využili jiným způsobem také někteří další řešitelé. V obou následujících řešeních je tato metoda kombinována s transformacemi rovinných útvarů, které zachovávají jejich obsah.

Řešení podle Pavla Polcera z G v Brně, Křenová, Kateřiny Medkové z BG Bohuslava Balbína v Hradci Králové a Zuzany Boršiové z G v Teplicích.

Doplňme nejprve trojúhelník ABC na rovnoběžník $ADBC$ (obr. 2). Vzhledem k tomu, že také $AC'A'C$ je rovnoběžník, je v posunutí určeném vektorem $\overrightarrow{CA}$ obrazem trojúhelníku CBA' trojúhelník ADC' . Rovněž $BCB'C'$ je rovnoběžník, a proto v posunutí určeném vektorem $\overrightarrow{CB}$ je obrazem trojúhelníku ACB' trojúhelník DBC' . Platí tedy rovnosti

$$S_{CBA'} = S_{ADC'} \quad \text{a} \quad S_{ACB'} = S_{DBC'},$$

které zřejmě znamenají, že obsah zkoumaného šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ je roven obsahu rovnoběžníku $ADBC$, tudíž dvojnásobku obsahu S daného trojúhelníku ABC .



Obr. 2

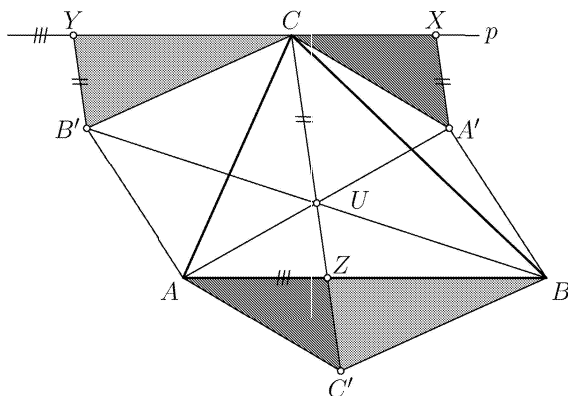
Řešení podle Jiřího Veselého z G Jiřího Wolkera v Prostějově.

Označme Z průsečík úsečky CC' se stranou AB . Vrcholem C trojúhelníku ABC vedme rovnoběžku p se stranou AB . Body A' , B' vedme dále rovnoběžky s přímkou CC' , které protnou přímku p po řadě v bodech X , Y (obr. 3a). Trojúhelník $AC'Z$ je podle věty *usu* shodný s trojúhelníkem $CA'X$ a podobně trojúhelník $BC'Z$ je shodný s trojúhelníkem $CB'Y$. (Nekonvexní) šestiúhelník $ABA'XYB'$ má tudíž stejný obsah jako zkoumaný šestiúhelník $AC'BA'C'B'$ ² a navíc z rovností

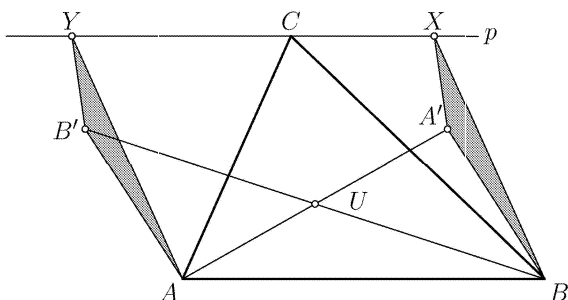
$$|XY| = |XC| + |CY| = |AZ| + |ZB| = |AB|$$

plyne, že $ABXY$ je rovnoběžník.

²Je-li bod U je totožný s těžištěm trojúhelníku ABC , degeneruje šestiúhelník $ABA'XYB'$ na rovnoběžník $ABXY$ (body A' , B' jsou po řadě vnitřními body stran BX , AY).



Obr. 3a



Obr. 3b

Z obr. 3b již bezprostředně vyplývá, že obsah šestiúhelníku $ABA'XYB'$ je roven obsahu rovnoběžníku $ABXY$, tedy dvojnásobku obsahu daného trojúhelníku ABC .

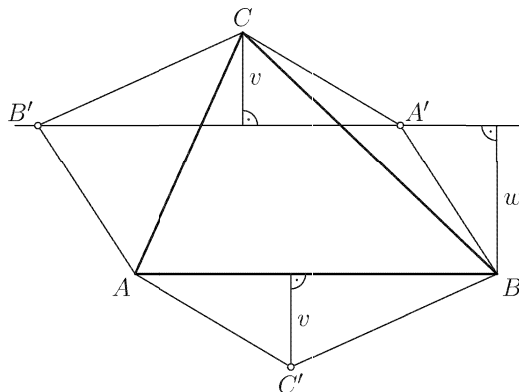
Druhou trojici řešení v našem článku tvoří postupy, které jsou založeny na vyjádření zkoumaných obsahů pomocí vhodných vzorců. V prvním z těchto řešení vystačíme se základními vzorci pro obsah rovnoběžníku a trojúhelníku pomocí délek jejich stran a k nim příslušných výšek.

Řešení podle Tomáše Reichela z GaSOŠP v Čáslavi.

Uvažovaný šestiúhelník $AC'BA'CB'$ rozdělíme na rovnoběžník $ABA'B'$ a na dva trojúhelníky $AC'B$ a $A'CB$, které jsou shodné, neboť jsou souměrně sdružené podle středu U . Shodnou výšku z vrcholů C , resp. C'

těchto trojúhelníků označíme v , zatímco w bude značit výšku rovnoběžníku $ABA'B'$ na stranu AB (obr. 4). Obsah Q zkoumaného šestiúhelníku můžeme tedy snadno vyjádřit. Platí

$$\begin{aligned} Q &= S_{ABA'B'} + S_{AC'B} + S_{A'CB} = S_{ABA'B'} + 2S_{AC'B} = \\ &= |AB| \cdot w + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v = |AB| \cdot (w + v). \end{aligned}$$



Obr. 4

Protože však $w + v$ je velikost výšky z vrcholu C na stranu AB v trojúhelníku ABC , pro jeho obsah platí

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot (w + v).$$

Porovnáním obou vyjádření dostáváme kýženou rovnost $Q = 2S$.

V závěrečných dvou řešeních budeme potřebovat složitější, přesto známý vzorec pro obsah trojúhelníku, v němž vystupují délky dvou jeho stran spolu se sinem úhlu, jež tyto strany svírají. Z tohoto vztahu plyne i méně známý vzorec pro obsah obecného konvexního čtyřúhelníku z délek jeho úhlopříček a sinu jimi sevřeného úhlu. Ten využijeme v následujícím řešení.

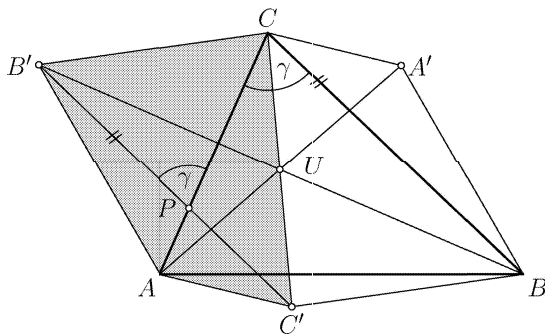
Řešení podle Štěpána Šimsy z G Josefa Jungmanna v Litoměřicích.

Vzhledem k uvažované souměrnosti se středem v bodě U jsou čtyřúhelníky $AC'CB'$, $A'CC'B$ shodné, a mají tudíž stejné obsahy. Jejich úhlopříčky BC a $B'C'$ jsou přitom shodné a rovnoběžné. Označme P průsečík úhlopříček AC a $B'C'$ čtyřúhelníku $AC'CB'$ a γ velikost vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC (obr. 5). Přímka AC protíná dvojici rovnoběžek BC , $B'C'$, a proto ze shodnosti střídavých úhlů plyne

$$|\sphericalangle CPB'| = |\sphericalangle ACB| = \gamma.$$

Podle dříve zmíněného vzorce pro výpočet obsahu obecného konvexního čtyřúhelníku pomocí délek jeho úhlopříček a úhlu jimi sevřeného proto platí

$$S_{C'CB'A} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |B'C'| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin \gamma = S_{ABC} = S,$$



Obr. 5

což jsme chtěli dokázat.

Řešení podle Dominika Lachmana z G v Olomouci-Hejčíně.

Ve shodě s obr. 6 označme $\varphi = |\sphericalangle BUC'|$, $\omega = |\sphericalangle CUA'|$ a $\psi = |\sphericalangle AUB'|$. S ohledem na shodnost vrcholových úhlů lze obsah S trojúhelníku ABC (rovný součtu obsahů trojúhelníků ABU , BCU a CAU) vyjádřit následujícím způsobem

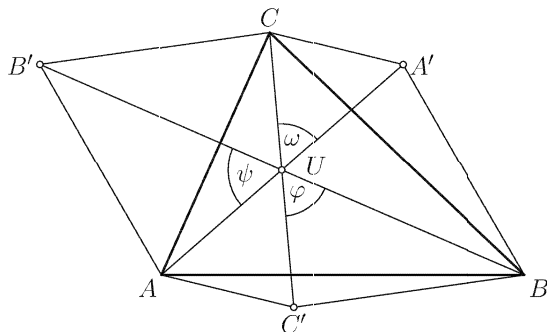
$$S = \frac{1}{2}|AU| \cdot |BU| \sin(\omega + \varphi) + \frac{1}{2}|BU| \cdot |CU| \sin(\psi + \omega) + \frac{1}{2}|CU| \cdot |AU| \sin(\varphi + \psi).$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi + \psi + \omega = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$, platí

$$\sin(\omega + \varphi) = \sin \psi, \quad \sin(\psi + \omega) = \sin \varphi, \quad \sin(\varphi + \psi) = \sin \omega,$$

a proto má obsah S jednodušší vyjádření

$$S = \frac{1}{2} |AU| \cdot |BU| \sin \psi + \frac{1}{2} |BU| \cdot |CU| \sin \varphi + \frac{1}{2} |CU| \cdot |AU| \sin \omega.$$



Obr. 6

Obsah Q šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ je roven (díky souměrnosti podle středu U) dvojnásobku obsahu čtyřúhelníku $AC'BA'$, který vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků $AC'U$, $C'BU$ a $BA'U$. Dostaneme tak

$$Q = 2 \left(\frac{1}{2} |AU| \cdot |C'U| \sin \omega + \frac{1}{2} |C'U| \cdot |BU| \sin \varphi + \frac{1}{2} |BU| \cdot |A'U| \sin \psi \right).$$

Ze shodnosti dvojic úseček UA a UA' , UB a UB' , UC a UC' dostáváme konečně

$$\begin{aligned} Q &= 2 \left(\frac{1}{2} |AU| \cdot |BU| \sin \psi + \frac{1}{2} |BU| \cdot |CU| \sin \varphi + \frac{1}{2} |CU| \cdot |AU| \sin \omega \right) = \\ &= 2S, \end{aligned}$$

což bylo třeba dokázat.

Literatura

[1] <http://www.math.muni.cz/mo>

Překvapující úlohy aneb paradoxy

PETR EISENMANN – LUCIE LOUKOTOVÁ

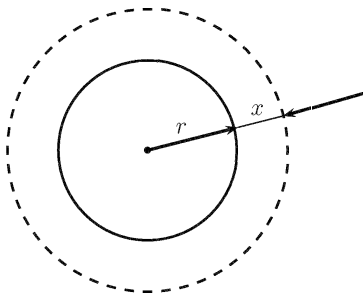
Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Náš článek ukazuje sedm vybraných úloh, jevů či objektů, jejichž znění či popis je překvapivý, paradoxní. Je známé a ověřené, že takové úlohy přinášejí při vhodné prezentaci ve výuce oživení a motivaci ke studiu dané problematiky.

Typickým příkladem přitažlivého a přitom velice jednoduchého paradoxu je známá úloha o mezikruží, o které píše např. *Karel Čupr* v [1] či *František Kuřina* v [3]. Formulujme ji stručně následovně.

Míč a Zeměkoule

Položme na zem fotbalový míč a rozprostřeme okolo něj na zem v pravidelném odstupu provázek, jehož délka je o jeden metr větší, než je obvod míče. Všimněme si vzniklé mezery. Ta činí asi 15 cm. Představme si, že stejný pokus uděláme se Zeměkoulí. Natáhněme myšlenkově okolo rovníku (délka činí přibližně 40 075 km) provázek délky o jeden metr větší. Jak velká bude mezera nyní?



Obr. 1

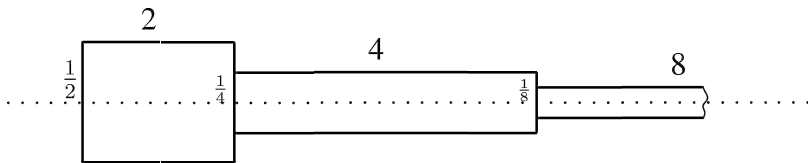
Je přirozené očekávat mezeru podstatně menší. Dá se však jednoduše ukázat, že tato nezávisí vůbec na poloměru základní kružnice. Přidáme-li k délce kružnice o poloměru r jeden metr, bude mít soustředná kružnice představující natažený provázek poloměr $r + x$ (viz obr. 1).

$$2\pi r + 1 = 2\pi(r + x),$$

$$x = \frac{1}{2\pi}.$$

Podivné těleso

Řešení předchozí úlohy vyžadovalo pouze znalosti ze základní školy. V tomto námětu bude už zapotřebí umět sečíst geometrickou řadu. Ukážeme si totiž jedno těleso s podivuhodnými vlastnostmi. Toto těleso bude mít konečný objem a nekonečný povrch. Je složené z nekonečně mnoha válců, a v pohledu z boku ho vidíme na obr. 2.



Obr. 2

Poloměr n -tého válce je roven $\frac{1}{2^n}$, výška 2^n , objem

$$V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot 2^n = \frac{\pi}{2^n}$$

a obsah pláště

$$S_n = 2\pi \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 2\pi.$$

Objem V celého tělesa je tedy

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi,$$

povrch tělesa S je ale jistě větší než součet obsahů plášťů

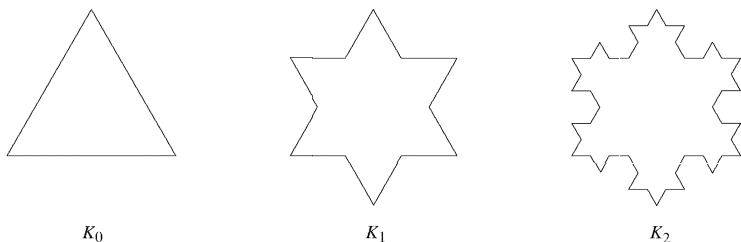
$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi = 2\pi + 2\pi + 2\pi + \dots,$$

který zřejmě není vlastním reálným číslem. Přitom se přece ale dá vnitřek tohoto tělesa „obarvit“ nalitím π objemových jednotek barvy dovnitř!

Kochova křivka

Po podivuhodném tělese zmíníme nyní jednu zvláštní křivku. Jde o tzv. Kochovu křivku. Ta nejenže nemá nikde tečnu, ale je i příkladem uzavřené křivky nekonečné délky. V roce 1906 ji publikoval švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch (1870 – 1924). Sestrojíme ji tak, že rozdělíme každou stranu rovnostranného trojúhelníka na tři stejné díly a nad každou střední částí sestrojíme nový rovnostranný trojúhelník (křivka K_1 na obr. 3). Na každou z dvanácti stran takto vzniklé šesticípé hvězdy aplikujeme stejný postup. Dostaneme tak křivku K_2 znázorněnou na obr. 3.

Jestliže budeme tento proces opakovat do nekonečna, dostaneme jako limitu posloupnosti $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ těchto čar křivku, která se láme v každém bodě, ke které nelze v žádném bodě sestrojit tečnu. Tato všude ostnatá, uzavřená křivka ležící v ohraničené části roviny přitom nemá konečnou délku. Měl-li totiž výchozí rovnostranný trojúhelník strany o délce například 1, dostali jsme po prvním kroku hvězdu o délce $d_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$. Křivka vytvořená po dalším kroku se skládá z $16 \cdot 3 = 48$ úseček délky $\frac{1}{9}$, n -tý člen této posloupnosti křivek má délku $d_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Zřejmě $d_n \rightarrow \infty$.



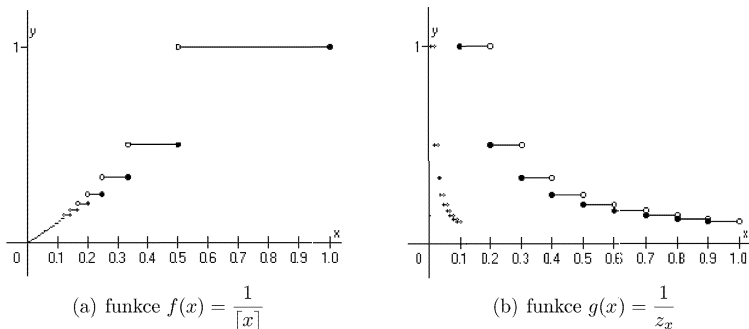
Obr. 3

Podivuhodné vlastnosti mohou mít i křivky, které jsou grafy reálných funkcí.

Zajímavé funkce

Vyšetřeme například vlastnosti následující neelementární funkce $f(x)$ definované na intervalu $(0; 1)$, která má v libovolném pravostranném okolí

počátku nekonečně mnoho bodů nespojitosti (viz obr. 4, symbol $\lceil x \rceil$ značí horní celou část čísla x).



Obr. 4

Podobné vlastnosti má i funkce $g(x)$, která navíc vykazuje i jisté známky „periodicity“. Definována je na intervalu $(0; 1)$ předpisem $g(x) = \frac{1}{z_x}$, kde z_x je první od nuly různá cifra v desetinném rozvoji čísla x (viz obr. 4).

Funkcí se týká i následující hezká úloha ze života.

Cesta do Bratislavy

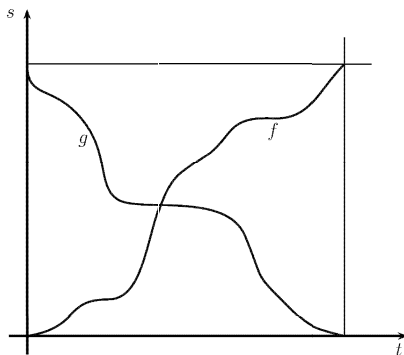
Obchodní cestující pan Milan vyrazil v pondělí v 8 hodin ráno z Prahy svým autem na cestu do Bratislavy. Tam dojel v 15 hodin. Vyřídil si své záležitosti, přespal v hotelu a ráno v 8 hodin vyjel zpět domů do Prahy. Tam dorazil opět ve tři hodiny odpoledne. Při zpáteční cestě jel po stejné trase.

Otázka zní: Existuje někde na trase Praha – Bratislava místo (bod), ve kterém byl Milan v pondělí i v úterý v přesně stejném čase?

Na první pohled se existence takového bodu zdá nereálná. Uvažme, že cesta pana Milana měla pravděpodobně v pondělí i v úterý jiný časový průběh. Obědovat mohl pan Milan pokaždé na jiném místě, jeden den mohla být dálnice na několik hodin ucpaná, tankovat palivo mohl jen jednou či pokaždé u jiné čerpací stanice. Dokonce se mohlo stát, že se jeden den vracel 10 km pro zapomenutou čepici v motorestu, kde obědval.

Přesto existuje místo (bod), ve kterém byl pan Milan v pondělí i v úterý v přesně stejném časovém okamžiku. Vysvětlit tento fakt můžeme lehce pomocí následující vlastnosti spojitě funkce.

Má-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ funkční hodnotu $f(a) < 0$ a funkční hodnotu $f(b) > 0$, má v tomto intervalu alespoň jeden nulový bod.



Obr. 5

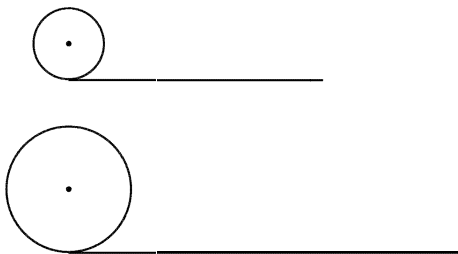
Obrázek 5 znázorňuje možný průběh Milanovy pondělní a úterní cesty. Funkce f a g vyjadřují ujetou vzdálenost s , která je spojitou funkcí času t . Grafy obou funkcí jsou nakresleny do jednoho obrázku. Je zřejmé, že grafy se musí protnout. Korektní zdůvodnění nám dává odkaz na výše citovanou větu, aplikovanou na funkci $f - g$.

Historie následujících úloh sahá více než dva tisíce let zpátky. Obvykle bývá spojována se jménem antického myslitele Aristotela, neboť se poprvé objevila v jeho díle *Mechanica*.

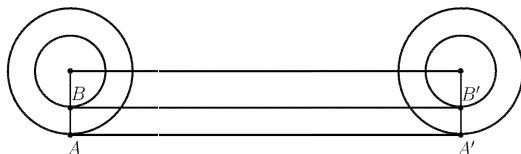
Aristotelovo kolo

Původní zadání problému zní takto. Máme dva kruhy o různých velikých poloměrech. Valíme-li každý kruh zvlášť po přímce, která je jeho tečnou (viz obr. 6), je dráha, kterou daný kruh urazí během jedné otočky, rovna obvodu tohoto kruhu.

Nyní pevně spojíme oba kruhy za středy. Předpokládejme, že ve výchozí poloze se větší kruh dotýká přímky v bodě A , menší kruh se pak dotýká své tečny v bodě B (viz obr. 7).



Obr. 6



Obr. 7

Kruhy se nyní budou valit společně po svých tečnách. Během jedné otáčky urazí větší kruh vzdálenost rovnou svému obvodu (délka úsečky AA'). Stejnou vzdálenost ale urazí i menší kruh (je rovna délce úsečky BB'), přestože má menší obvod³. Jak je to možné?

Paradox vzniká pouze vlivem obrázku. Ve skutečnosti není možné, aby se oba pevně spojené kruhy současně valily po svých tečnách bez prokluzování či drhnutí o tečnu.

Pokud se tedy valí větší kruh plynule po přímce, svým způsobem „táhne“ menší kruh po jeho tečně. Malý kruh tak klouže po své tečně a ve výsledku urazí stejnou vzdálenost jako větší kruh. Celou situaci lze přirovnat k autíčku s pevným převodem mezi motorem a koly jedoucímu konstantní rychlostí po silnici z kopce. Pokud se na silnici vyskytne náledí, začnou kola na hladkém povrchu klouzat a autíčko se začne tíhovou silou pohybovat větší rychlostí. Celková vzdálenost ujetá autíčkem po ledu je tak větší než vzdálenost ujetá po suché silnici.

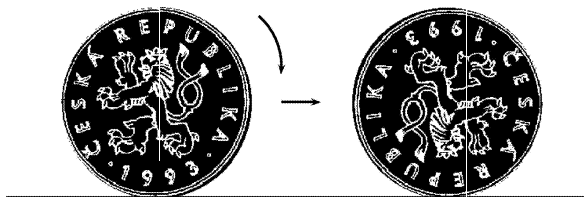
Další komentáře k tomuto paradoxu lze najít např. v [2] či [4].

Odvalování kruhu se týká i poslední paradox, který nyní uvedeme.

³Situaci velmi pěkně ilustruje webová animace [5].

Český lev vzhůru nohama?

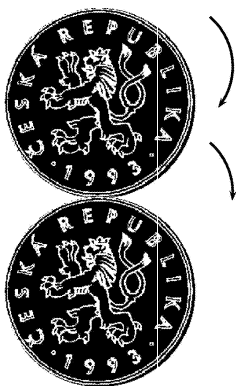
Vezměme desetikorunovou minci a odvalme ji po polovině délky jejího obvodu po rovné podložce. Je zřejmé, že mince se přitom otočí o 180° (viz obr. 8).



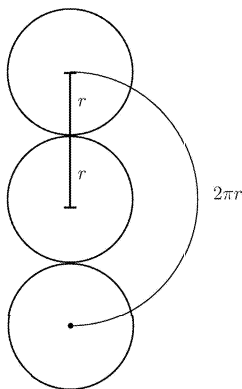
Obr. 8

Odvalme nyní tutéž minci, opět po polovině délky jejího obvodu, ale po jiné desetikorunové minci (viz obr. 9). Je přirozené očekávat, že i nyní skončí znak českého lva hlavou dolů. Výsledek, jak si může každý zkusit, je ale jiný. Mince se otočí o 360° .

Mince se sice odvaluje po dráze stejné délky, ale tato dráha má tvar kružnice. Střed mince urazí na rozdíl od prvního případu dráhu rovnou nikoli polovině obvodu mince, nýbrž dráhu rovnou celému jejímu obvodu (viz obr. 10).



Obr. 9



Obr. 10

Literatura

- [1] Čupr, K.: Geometrické hry a zábavy. JČSMF, Praha 1949.
- [2] Drabkin, I. E.: Aristotle's Wheel: Notes on the History of a Paradox. Osiris, 1950, roč. 9, s. 162–198. <<http://www.jstor.org/stable/301848>>.
- [3] Kuřina, F.: Tři klasické úlohy aneb o motivaci. Učitel matematiky, 2004, roč. 12, č. 4, s. 195–196.
- [4] Northup, E. P.: Riddles in Mathematics – A Book of Paradoxes. New York, 1944.
- [5] Aristotle's Wheel Paradox [online]. Wolfram Research, Inc., 1999–2011 [cit. 10. února 2011]. <<http://mathworld.wolfram.com/AristotlesWheelParadox.html>>.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2012 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 183

V ostroúhlém trojúhelníku ABC s neshodnými vnitřními úhly o velikostech α , β při vrcholech A a B označme P patu výšky z vrcholu C a R patu výšky z vrcholu A . Dále označme Q ($Q \neq P$) bod přímky AB , pro který $|AP| \cdot |BQ| = |AQ| \cdot |BP|$. Dokažte, že kružnice sestrojená nad průměrem PQ prochází bodem R , právě když $\alpha = 45^\circ$.

Jaroslav Zhouf

Úloha 184

Nechť p je prvočíslo a $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $P(n)$ není dělitelné p pro žádné celé číslo n . Ukažte, že existuje polynom $Q(x)$ s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $P(n)Q(n) - 1$ je dělitelné číslem p pro každé celé číslo n .

Ján Mazák