

MATEMATIKA

Matematické písemky jako bohatý zdroj informací

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Písemné práce z matematiky (dále jen „písemky“) jsou (mohou být při jejich správném použití) prospěšnou a účinnou součástí matematického vzdělávání na ZŠ i na středních školách. Budeme zde pojednávat zejména o písemkách zadaných po probrání a procvičení uceleného úseku učiva a o čtvrtletních písemkách, ostatních se tento text bude týkat přiměřeně.

Hned na počátku si uvědomme, že písemka je proces, který je v podstatě *dialogem mezi učitelem a (každým) žákem*. Jak tento dialog tedy zpravidla probíhá?

1. Na počátku tohoto dialogu *učitel* připraví a žákům zadá úkol (příklady k řešení).
2. Žák svou písemnou prací zadaný úkol plní.
3. Učitel písemku opraví a vyhodnotí, přičemž zpravidla hned po písemce krátce sdělí žákům správné výsledky resp. i správný postup. V další vyučovací hodině (tj. až písemky opraví) sdělí žákům poznatky z opravy – co dopadlo dobře, hlavní chyby a nedostatky, celkové hodnocení třídy, může použít i veřejné pochvaly a napomenutí. Opravené písemky předá žákům k nahlédnutí.
4. Žák se seznámí s opravou a hodnocením své písemky, vyhledá a uvědomí si své chyby, přizná si jejich příčiny. Při nejasnostech se dotáže učitele.
5. Učitel odpoví dotazy a podle potřeby může (nejčastěji prostřednictvím úspěšných žáků) na tabuli předvést správné řešení zadaných úloh. Při

méně úspěšné písemce může také v souvislosti s tematikou písemky zadat vhodnou domácí úlohu.

6. Žák provede opravu svých chyb v písemce formou odpovídající druhu písemky a vypracuje i případně zadanou domácí úlohu.
7. Učitel opravu a úlohu prohlédne a oviduje.

Má-li tento dialog být efektivní, je především třeba, aby se v jeho průběhu obě strany vyjadřovaly srozumitelně, ale o tom ještě dále. Než pojednáme o ústředním bodu 3 tohoto dialogu, projdeme stručně první dva body.

Příprava a zadání písemky

O přípravě písemky viz článek [4]. Příprava má dvě stránky, věcnou a formální, a dle [7] spočívá v tom:

1. *Abý učitel prozkoušel přesně to, co chce.* Jestliže chce např. především prověřit, jak žáci dovedou používat vzorce pro výpočet obsahů a objemů, nevolí příklady se složitými úpravami zlomků. Ale také může, pokud chce prověřit současně i práci se zlomky.
2. *Abý si učitel vyhledal nebo vytvořil dvě rovnocenné, ale přece jen různé verze příkladů,* případně tři, pokud tuto třetí chce použít spolu s jinými příklady při opakování před písemkou nebo na domácí úlohu. Záleží ovšem na stavu třídy a na jejím zaměření, jak mnoho se tyto verze mohou od sebe lišit, aby byla samostatnost práce zajištěna. V žádném případě však nesmí být v jedné verzi Taxis a ve druhé zelená louka. (Viz seriál třiceti článků o písemkových příkladech publikovaných od [7] po [8].)

Texty příkladů by tedy měly být formulovány naprosto srozumitelně a přitom tak, aby bylo zcela zřejmé a jednoznačné, co je úkolem žáků a *co má být výsledkem řešení příkladu*, protože sdělení tohoto výsledku je hlavním úkolem uvedeného 2. kroku komunikace. (Podrobněji o textech úloh viz [1], [4], [5].)

Je třeba volit vhodnou sestavu příkladů s ohledem na rozličnou úroveň znalostí a schopností jednotlivých žáků, např. u čtvrtletní písemky jsou zpravidla zadávány 4 příklady pokrývající poslední i starší učivo a také *různé typy* úloh – početní, geometrické, slovní apod. – v závislosti na probrané látce. Je vhodné volit střední obtížnost, tj. žádný příklad ani příliš lehký ani příliš náročný; přitom by jeden z nich měl být (v rámci střední obtížnosti) lehčí a jeden zase o něco náročnější. U příkladů střední obtížnosti

pak právem očekáváme, že výborní žáci je vyřeší vynikajícím způsobem, průměrní žáci je vyřeší bez velkých obtíží a slabí žáci s obtížemi a s chybami, ale na tom lehčím by se měli „chytnout“. Osvědčuje se připravit i „dobrovolný“ příklad pro žáky, kteří budou s písemkou dříve hotovi.

Psaní písemky

K tomu, abychom z písemky dostali věrohodné informace, je třeba zajistit objektivně vhodné podmínky. Pro psaní písemky je nutno zvolit vhodnou vyučovací hodinu a vlastní zadání provést racionálním způsobem, ale samozřejmě tak, aby *všem* žákům, i těm pomalejším, bylo písemné zadání k dispozici po celou dobu psaní písemky.

Po zadání písemky dá učitel k písemce případné pokyny (např. že není třeba dodržet pořadí řešených příkladů, že žáci nesmějí používat koncepty na nějaké pomocné výpočty, aby nezapomněli vyznačit výsledek a též, aby si po vyřešení příkladu resp. napsání písemky provedli jeho kontrolu, může i žáky povzbudit a dodat jim sebedůvěru, apod.) a je tu chvíle na případné dotazy žáků. Učitel by také měl předem sdělit dobu trvání písemky, pokud není na celou hodinu, i když pak samozřejmě může provést korekci; když např. vidí, že na konci určené doby ještě všichni pracují, čas přidá, jsou-li naopak již téměř všichni hotovi, může čas zkrátit. Je však třeba na úpravu doby konce písemky upozornit žáky s předstihem před dříve ohlášeným koncem.

Žáci by měli pracovat v klidném prostředí s dostatkem světla a čerstvého vzduchu a na lavici by měli mít jen ty pomůcky, které jsou potřebné k písemce (mobily samozřejmě vypnuté a mimo dosah). Při psaní písemky musí být naprostý klid (jen pracovní ruch), který nesmí narušovat ani učitel např. hlučným přecházením po třídě, okřikováním nebo radami jednotlivým žákům; měl by stát stranou a klidně pozorovat pracující žáky. Případné pokusy o neoprávněné získávání nebo předávání informací řešit klidným napomenutím a věc případně dorešit až po písemce nebo při opravě, viz [6]. Musíme zaměstnat i žáky, kteří skončili s písemkou dříve, aby nerušili ostatní, jak jsme se již zmínili, např. dobrovolnou úlohou.

Na konci hodiny s písemkou je vhodné sdělit výsledky řešení, případně další informace. Zadávat *právě napsanou písemku* ihned jako domácí úkol se nepovažuje za vhodné.

V zájmu dobré komunikace mezi učitelem a žáky je třeba požadovat, aby se žáci v písemce vyjadřovali čitelně a srozumitelně tak, aby učitel mohl sledovat jejich myšlenkové pochody a dovedl je ohodnotit. Musí být

srozumitelné zejména to, *co žák považuje za výsledek svého řešení daného příkladu*, což dá najevo např. u početních příkladů tím, že *výsledek dvakrát podtrhne*. Tedy podtrhnutí výsledku není počin estetický, ale komunikační, žák tím říká: *toto je můj výsledek*. Není možno považovat za drobnou formální chybu postup, kdy žák uvede několik mezivýsledků a výsledků a předkládá je s tichým vyjádřením: *učiteli, vyber si*. Velmi často se tak děje v případech, kdy žák úloze v podstatě nerozumí, vykoná několik formálních výpočtů, o nichž ví, že takové se dělávají, a sám ani netuší, *co a proč* je výsledkem řešení.

Oprava písemky jako zdroj informací

Smyslem opravy písemky *jako součásti komunikace* je sdělit žákovi

- *co provedl* správně, co u něho učitel oceňuje;
- *co nezná*, co dobře nepochopil, v čem chybuje a jak závažné to jsou nedostatky.

Vyučujícímu poskytne oprava tyto informace:

- *jak úspěšná* byla jeho výuka v uplynulém období;
- *co už žáci* (jedinci i třída) znají a na jaké úrovni, a co ještě ne, jakého pokroku dosáhli jednotliví žáci.

K tomu, aby oprava písemky vytvořila uvedené informace, musí být provedena poctivě a kvalifikovaně. Učitel při ní musí v souladu s jevou analýzou opravovaného příkladu rozpoznat, vyhodnotit a žákovi srozumitelně a racionálně „jazykem oprav“ sdělit, které kroky v jeho řešení jsou správné a také, kde projevil neznalost, udělal chybu, zmýlil se, nebo kde jsou v řešení jiné nedostatky. Při opravě nemusí učitel předložit žákovi všechny jeho chyby podrobně specifikované, osvědčuje se děla práce; např. učitel napoví, *kde* je chyba, a žák musí objevit, *jaké* chyby se dopustil. Z toho plyne postup učitele při opravě. Když u příkladu vidí chybný výsledek, jde krok za krokem na předchozí (chybné) mezivýsledky, až objeví, kde je chyba (a jaká). Poslední správný krok „odfajkuje“ a první nesprávný označí pro žáka jako chybný. Dobrý učitel však i po chybném žakově kroku sleduje (má-li to v konkrétním případě smysl), jestli žák ovládá v principu další postup a již žádné další chyby se nedopustil, nebo je-li řešení příkladu zatíženo více chybami (které vyznačí), a jakými. Tímto postupem dále zvyšuje informační hodnotu opravy pro žáka i pro sebe.

Po skončení oprav si učitel vyhodnotí získané poznatky také o výsledcích své výuky (co se mu nepodařilo, co musí příště udělat lépe), a uvědomí si,

zda žáci na základě svých znalostí dovedou už *samostatně* řešit předložené úlohy, co ještě žákům dělá potíže, co je nutno dále opakovat a procvičovat nebo dokonce probrat znovu, atd. Také si u jednotlivých žáků vyhodnotí, kde došlo k pokroku, kde naopak, a jak nadále motivovat jednotlivé žáky pro matematiku, co řekne žákům při celkovém hodnocení písemky, koho pochválí a koho napomene.

Na tomto místě je třeba se zmínit o jednom druhu de facto nekvalifikovaných učitelů matematiky, o tzv. „škrtačích“, kteří z jazyka oprav znají *jen škrtnutí výsledku* v žákovské písemce. Informační hodnota takové „opravy“ písemky je pak nepatrná (pro žáka i pro učitele) a spíše zkreslující a pro žáky demobilizující. Takovou „opravu“ není totiž vůbec podchyceno (a pak ani klasifikací), zda žák téma daného příkladu vůbec neovládá, nebo zda látku umí a jen se dopustil někde ke konci řešení nějaké banální chybičky. Škrtnout výsledek samozřejmě lze, ale jsme k tomu oprávněni, jen když jsme písemku opravovali řádně, jak je uvedeno výše.

Chyby v písemkách

Lze je rozdělit do několika skupin (nikoli disjunktních) podle jejich původu – a do značné míry i podle závažnosti. Množina možných a vyskytujících se chyb je však velmi bohatá a posouzení závažnosti chyb často závisí na konkrétních okolnostech nebo zaměření písemky. Např. chceme-li prověřit znalost určitého algoritmu (třeba částečného odmocňování), budeme považovat chyby provedené v tomto algoritmu za velmi závažné, i když v jiných souvislostech můžeme jejich závažnost posuzovat mírněji.

a) *Řešení úlohy nebo její podstatné části zcela chybí nebo je nahrazeno nesouvislými zmatenými zápisy.* Znamená to, že žák nepochopil zadání úlohy, a to většinou pro absenci jeho znalostí zkoušené látky či neznalost algoritmu potřebného k pokračování v řešení.

Příklady: neznalost řešení kvadratické rovnice; neznalost řešení soustavy nerovnic o jedné neznámé; neznalost konstrukce tečny z vnějšího bodu kružnice; neznalost úprav algebraických a jiných výrazů, apod. Ale pozor, zcela chybějící řešení některého příkladu písemky může také znamenat, že žák je pomalejší nebo se dlouho zdržel u jiného příkladu a daný příklad prostě řešit nestihl.

b) *Chyby věcné – logické* (sémantické) znehodnocují věcnou a logickou stránku předloženého řešení.

Příklady:

- 1) Zanedbala se část řešení: $x(x - 2) = 3x \Rightarrow x - 2 = 3$; při řešení rovnice s důsledkovými úpravami se neprovedla zkouška, apod.
- 2) Nepochopení sémantické stránky symbolů a z toho plynoucí hrubé syntaktické chyby: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{8}$; $\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{\sin 2}{3}$; $2^3 \cdot 2^x = 2^{3x}$; máme-li $|x - 1|$, rozlišujeme dva případy: a $|x - 1| \geq 0$ a $|x - 1| < 0$; apod.
- 3) Chybný rozbor úlohy vedoucí k chybnému závěru. Např. má se zjistit, kolika způsoby při soutěži osmi závodníků může být rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile. Odpověď $\binom{8}{3}$ ukazuje na chybný rozbor. Podobně chybný rozbor konstrukční úlohy, který vede k chybné konstrukci.
- 4) Použití nesprávných analogií: Např. má se rozhodnout, zda bod $M[3, 1]$ leží na úsečce AB , případně na přímkce AB , $A[-1; -1]$, $B[5; 2]$. Najde se parametrické vyjádření úsečky AB : $X = A + t\mathbf{u}$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$; $\mathbf{u} = B - A = (6; 3)$, zjednodušíme vyjádření tím, že vektor $\mathbf{u}$ nahradíme vektorem $\mathbf{v} = (2, 1)$, takže parametrické vyjádření úsečky AB v souřadnicích je

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t, \\y &= 1 + t, \quad t \in \langle 0; 3 \rangle.\end{aligned}$$

a nikoli $t \in \langle 0; 1 \rangle$, jak napíše a použije žák v písemce. Dosadí souřadnice bodu M : $3 = -1 + 2t \Rightarrow t = 2$, $1 = -1 + t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow t \notin \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow$ závěr: M leží na přímkce AB , ale nikoli na úsečce AB . (Z chybného vyjádření úsečky plyne uvedený chybný závěr.)

- 5) Neschopnost sestavit správnou rovnici k dané slovní úloze.

c) *Chyby věcné – početní a grafické.* Zpravidla jde o částečně chybnou nebo neúplnou znalost pouček, vzorců a algoritmů nebo o jejich chybné použití (pokud nejde o případy a nebo b).

Příklady: chybná úprava a výpočet složeného zlomku; chybný rozklad mnohočlenu $a^3 + b^3$; použití chybného vzorce pro $\cos(\alpha - \beta)$; při konstrukci kružnice trojúhelníku vepsané nebyly zjištěny body dotyku; chybně sestrojený úhel 45° ; v náčrtku kváдру je špatně vyznačena viditelnost hran; chybné vynásobení polynomů; chybné vypočtený diskriminant kvadratické rovnice, apod.

d) *Chyby formální.* Tyto chyby se mohou někdy při výpočtech či konstrukcích změnit na chyby věcné, proto je jim také třeba věnovat pozornost. *Příklady:* chybějící závorky: pokud žák запиše výraz $3(x - 1) - 5$ jako $3(x - 1 - 5)$, pak ho v dalším výpočtu může zaměnit za $3(x - 6)$; krátký

symbol odmocniny: je-li $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ zapsáno jako $\sqrt{x^2 - 2x} + 1$; podobně příliš krátká zlomková čára; chybějí pokračovací znaménka operací nebo relací při přechodu výpočtu na nový řádek; rovnítko není na úrovni (hlavní) zlomkové čáry: $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, apod. Patří sem též takřka nečitelné defektní zápisy.

e) *Chyby gramatické.* Patří mezi chyby, které by učitel matematiky měl v písemce opravit, i když do hodnocení je zpravidla nezahrnuje. Výjimkou jsou jen případy, kdy jde o chyby v matematických termínech, tehdy jde o formální chyby i z hlediska výuky matematiky.

Příklady: logarytmus; kruhová víseč; řídicí přímká; rovnostraný trojúhelník; dvěma body; cosinova věta, oběm kvádrů.

f) *Zmýlená.*

Žáci se při písemkách dosti pletou, ať už z rozrušení, roztržitosti nebo zbrklosti, ale své pochybení zpravidla zlehčují (já to umím, jen jsem se spletl). Jsou rádi, když i učitel jejich spletení bere shovívavě a příliš ho nezapočítává do klasifikace. Jistá shovívavost tu skutečně je na místě; jestliže se studentu gymnázia stane, že ve složitém výpočtu provede násobení $3 \cdot 6 = 24$, jistě není pochyb, že násobilkou šesti umí (i když neznalost malé násobilky se bohužel postupně přenáší do stále vyšších ročníků). Nebo pokud žák nějakou úpravu udělá třikrát dobře a tutéž úpravu pak jednou špatně, lze to odpustit. Ovšem někdy žáci i svou neznalost omlouvají tím, že se jen spletli, např. odstraňují závorku: $-(2a - 3b) = -2a - 3b$ a po opravě to komentují „spletl jsem se jen v blbém znamínku“, zatímco učitel v tom může a asi i musí vidět základní neznalost, zvláště kdyby zde šlo o písemku na úpravy algebraických výrazů a tento výpočet nebyl podepřen jinými výpočty správnými; záleží tedy na okolnostech.

Připomeňme zde ještě zvláštní případ zmýlené, který učiteli přidá při opravě dost práce, kdy se žák zmýlí již v zadání příkladu. Pokud se tím řešení nezjednodušilo, opraví učitel žákovo řešení, jakoby jeho zadání bylo správné, ale chybu v zadání kvalifikuje jako formální chybu. Pokud žákem pozměněný příklad ztratil svou hodnotu, pak i dobře vyřešený příklad uzná jen jako část příkladu nebo vůbec ne. Čtenář nechť uváží, u kterých písemek lze požadovat a hodnotit i určitou grafickou úroveň zápisů a konstrukcí.

Některé chyby se jeví jako *chyby zdravého rozumu*; např. žák má vypočítat 32 % ze 65, vyjde mu 208 a žák toto číslo zapíše a podtrhne jako

správný výsledek (dopustil se „jenom“ řádové chyby) – zatímco mu zdravý rozum měl napovědět, že musí vyjít číslo menší než 65, zhruba $\frac{1}{3}$ ze 65. To ovšem může žákovi vytknout jenom ten učitel matematiky, který se žáky odhady výsledků trénoval (což se však často velmi zanedbává ke škodě výuky matematiky.)

Vyhodnocení písemky

Vyhodnocení opravených písemek zpravidla vyústí ve známku, která je také součástí výstupní informace. I pro písemky platí, že „známkování“ je jedna z nejobtížnějších činností učitele. Jak postihnout číslem (nebo několika slovy) ty přepestré poznatky o žákovi, získané opravou písemky v kontextu s jeho osobností. Co např. s pomalejším žákem, kterému to matematicky myslí, ale který nestíhá vypracovat celou písemku? Mějme však na paměti, že známky z písemek nejsou jediným zdrojem klasifikace žáka, je tu ještě ústní zkoušení a výsledky soustavného pozorování (reakcí na učivo, snahy a aktivity žáka, atd.).

Způsob hodnocení písemek (tzv. „měřítko“) si učitel zpravidla stanoví již při výběru příkladů na písemku. U každého příkladu si provede jevovou analýzu a rozhodne se, jak bude oceňovat správné zvládnutí jednotlivých kroků (jevů), např. kolik „bodů“ přidělí za jednotlivé kroky. Seznam kroků s jejich oceněním pomáhá pak učiteli držet stálou úroveň hodnocení v průběhu celé opravy a je podkladem pro bodové hodnocení žákovských řešení celého příkladu (viz opět [4]). Zkušený učitel většinou dovede své zvolené měřítko podržet v paměti a při klasifikaci podle něj postupovat.

Oprava všech písemek však chvíli trvá a tak tu vyvstává ne zcela snadný problém i pro zkušeného učitele – *zachování stejného měřítka v průběhu opravy* všech písemek (týká se hlavně *složitějších* písemek, protože se v průběhu opravy může pod vlivem subjektivních faktorů nastavené měřítko deformovat. Proto je vhodné opravit všechny písemky „na jeden záťah“ (pro učitele bývá jednodušší opravit nejprve např. skupinu A a pak B). Pro kontrolu svého předem nastaveného měřítka zkušební učitelé zpravidla nahlédnou před opravou do několika písemek (lepších, středních i horších), aby získali představu o celkové úrovni o fungování jejich měřítka i o jeho případné drobné korekci. V průběhu opravy se pak měřítko stabilizuje, avšak mohou se vyskytnout situace, kdy učitel písemku raději neohodnotí definitivně, ale vrátí se k jejímu hodnocení znovu až po opravě dalších písemek a jejich vzájemném srovnávání.

Existují dva přístupy ke klasifikaci písemek:

- evidovat a hodnotit žákovy znalosti,
- evidovat a hodnotit žákovy neznalosti.

V prvním případě tedy učitel při opravě postupně žákovi přidává body za úspěšně zvládnuté kroky (podle své dříve provedené jevové analýzy) a nakonec získané body převede na známku.

V [3] je toto pojetí předvedeno i v praxi. Lze je však v běžných podmínkách mírně zefektivnit, neboť mnozí zkušení učitelé došli k tomu, že písemky opravují důkladně, jak je uvedeno zde, ale písemku vždy bodují osmi body. Pak ovšem v písemce se čtyřmi příklady je jeden příklad za 2 body, tedy půl příkladu je za 1 bod (v tomto případě však nastává jistá ztráta informační hodnoty). Po provedené opravě ihned spočítají, kolik bodů žák získal, a zapíše známku $z_1 = 5 - [0,5 \cdot b]$ ($[x]$ značí dolní celou část čísla x); v případě, že pro sebe používají u známek i znaménka „minus“, zapíše si známku $z_2 = 5 - 0,5 \cdot b$ (tj. např. 2,5 jako 2–). (Všimněme si však, že ono často zatracované používání „mínusek“ je ekvivalentní s bodováním písemky osmi body, proti čemuž už námitky nebývají!)

Pokud jde o druhý přístup, je v [2] uvedena pomůcka ke klasifikaci; citujme:

‘Při klasifikaci jedné úlohy nebo skupiny obdobných úloh hodnotíme známku

- 1 úplné vyřešení bez chyb nebo s 1 - 2 nepodstatnými chybami, je-li postup řešení originální, svědčící o samostatnosti myšlení;
- 2 řešení se 2 - 3 nepodstatnými chybami;
- 3 řešení s hrubou chybou nebo s více malými chybami;
- 4 řešení se dvěma hrubými chybami nebo s jednou hrubou a s více malými chybami;
- 5 řešení s více než dvěma hrubými chybami.

Při klasifikaci skupiny úloh různé obtížnosti si všímáme především úloh, které se řešily postupy analogickými ke vzorově řešeným úlohám ve škole. Vyřeší-li žák takové úlohy a jen s malými chybami, hodnotíme práci známkou 3; vyřeší-li žák takové úlohy s hrubou chybou, hodnotíme práci známkou 4; řešil-li žák úlohy s více hrubými chybami, je práce nedostatečná. Vyřešil-li žák i úlohy obtížnější a jen s malými chybami, hodnotíme práci známkou 2; je-li řešení bez chyb, je práce výborná.’

Tento postup je v principu blízký hodnocení diktátu nebo slohové práce v českém jazyce. Výsledkem je zpravidla klasifikace, proti níž nelze mít podstatné námitky. V tomto článku (samozřejmě i ve skriptech [3]) dávám

však přednost prvnímu přístupu, protože princip *hodnotit, co žák umí* se mi jeví jako spravedlivější a více motivující, který také zřetelněji žáka upozorňuje, co se má ještě doučit.

Velmi často však oba způsoby klasifikace vedou ke stejné známce. Samozřejmě může učitel volit i jiná bodování. Obvykle je vhodné, když jsou u školních písemek všechny zadané příklady váženy přibližně stejným počtem bodů. Při nerovnoměrných vahách jednotlivých příkladů v písemce mají žáci právo tyto váhy předem znát, jinak může dojít k nepříjemnému dopadu na neinformované žáky. To se povedlo před mnoha lety i ministerstvu školství, které tehdy zadávalo příklady k přijímacím zkouškám na střední školy; a jistý příklad byl tak bohatě dotován body (aniž to uchazeči tušili), že kdo měl všechno správně, jen ten jeden příklad ne, už měl výslednou známku 3.

Závěrečná poznámka o testech

V poslední době se k různému přezkušování nebo i jako písemná část maturity používají testy. Jejich výhoda spočívá v tom, že se velmi pohodlně vyhodnocují a že test z matematiky může správně vyhodnotit téměř kdokoli. Testy ovšem nejsou „bohatým zdrojem informací“, to není jejich úkol, protože prakticky jediným výstupem testu je počet bodů, resp. známka (platná s jistou pravděpodobností). To však může být pro daný účel, kdy jde *pouze* o body nebo známku, informace v podstatě dostačující. V procesu *výuky* má však test malou vypovídací hodnotu, pokud ovšem nejde jen o „trénink“, tedy o přípravu studentů na tento typ zkoušení při maturitní písemce.

Literatura

- [1] *Hejný, M. a kol.:* Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1990.
- [2] *Mikulčák, J.:* Didaktika matematiky. SPN Praha, 1982.
- [3] *Trávníček, S.:* Oprava písemek z matematiky. UP Olomouc, 2006.
- [4] *Trávníček, S.:* Příprava učitele k zadávání písemek. MFI, 18 (2008/09), č. 7, str. 385–396.
- [5] *Trávníček, S.:* Matematické úlohy jako součást literárních textů. MFI, 6 (1996/97), č. 3 a č. 4., s. 113–123 a s. 169–178.
- [6] *Trávníček, S.:* Pěstování samostatnosti v matematice. MFI, 17 (2007/08), č. 7, str. 385–402.
- [7] *Trávníček, S.:* Písemkové příklady na SŠ 1. MFI 3 (1993–94), č. 2, str. 68–70.
- [8] *Trávníček, S.:* Písemkové příklady na SŠ 30. MFI, 16 (2006/07), č. 7, str. 396–401.

Jak učit vlastnostem obvodových úhlů?

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Věta o obvodových úhlech je u nás tradičně odvozována podle Eukleidových Základů. Nabízí se otázka, zda lze považovat tento více než dva tisíce let starý postup stále za nejvhodnější. Kromě námětu, jak důkaz podat žákům názorněji pomocí dynamické geometrie, předložíme čtenáři dva alternativní způsoby výuky. Upozorníme též na pomůcky vytvořené v Cabri geometrii pro podporu všech tří postupů.

Ve všech situacích budeme uvažovat kružnici $k(O; r)$ s tětivou AB , která ji rozděluje na dva oblouky. Úhel AVB nazýváme obvodový úhel, právě když $V \in k$ a $V \notin \{A, B\}$. Říkáme, že obvodový úhel AVB (resp. středový úhel AOB) je příslušný tomu z oblouků AB , který je v něm obsažen. Velikost středového úhlu, který přísluší oblouku AB budeme stručně nazývat *úhlová velikost oblouku* AB .

Věta 1 (o obvodových úhlech)

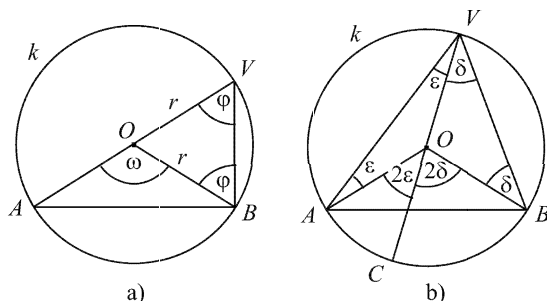
Všechny obvodové úhly příslušné danému oblouku kružnice mají velikost rovnu polovině úhlové velikosti oblouku.

Při označení podle obr. 2 můžeme větu 1 vyjádřit vztahem

$$\omega = 2\varphi. \quad (1)$$

1. Klasické odvození

Položme $\varphi = |\sphericalangle AVB|$ a $\omega = |\sphericalangle AOB|$ pro úhly příslušné témuž oblouku AB . Větu je snadné ověřit pro $0 < \varphi < \pi/2$, pokud střed kružnice leží na úsečce VA , obr. 1a). Z rovnoramenného trojúhelníku VOB totiž plyne $|\sphericalangle OBV| = |\sphericalangle OVB| = \varphi$ a podle věty o vnějším úhlu pro trojúhelník VOB dostaneme $\omega = |\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle OVB| + |\sphericalangle OBV| = 2\varphi$. Odtud plyne (1) a tedy i věta 1, která zřejmě platí i tehdy, když $O \in VB$.



Obr. 1 Klasické odvození věty o obvodových úhlech

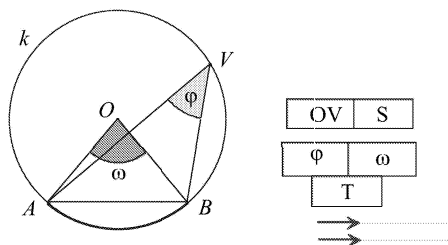
Situaci, kdy střed O leží uvnitř obvodového úhlu AVB , převedeme sestavením průměru CV na sjednocení dvou seskupení předchozího typu, jak je vidět na obr. 1b). Snadno ověříme, že

$$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle AVC| + |\sphericalangle CVB| = \varepsilon + \delta = \\ = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOC| + \frac{1}{2}|\sphericalangle COB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB|.$$

Jestliže bod O leží vně úhlu AVB , dokazujeme větu analogicky. Měli bychom se žáky ověřit větu i pro $\varphi > \pi/2$ a $\varphi = \pi/2$, třebaže v těchto případech žádné nové situace nenastanou.

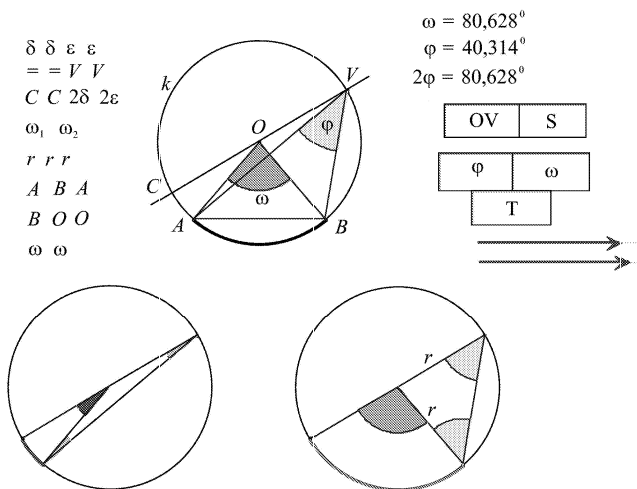
Při tradičním způsobu výuky (učitel kreslí nebo rýsuje na tabuli a žáci do sešitu) je celé odvození s vyšetřením všech situací časově náročné. Čas ušetříme, když v hodině probereme kompletní důkaz jen pro ostrý úhel, a zbytek žákům zadáme jako domácí úkol. Vypracováním úkolu si studenti důkaz zopakují a lépe mu porozumí.

Druhou nepříjemností je rozbor situace, kdy O leží vně úhlu AVB . Obrázek je nepřehledný a žáci se v něm těžko orientují.



Obr. 2 Soubor 01 Euklid.fig po otevření

Ke zkvalitnění výuky lze na webu nalézt různé dynamické pomůcky. Jedna z nich navazuje na tento článek. Obsahuje soubory v Cabri II+ a metodický návod. Můžete si ji zdarma stáhnout z adresy [3]. K podpoře výše uvedeného odvození v ní naleznete soubor 01 Euklid.fig. Situaci po otevření souboru vidíme na obr. 2. Klepnutím na tlačítka označená písmeny φ a ω zobrazujeme nebo skrýváme aktuální velikosti obvodového a středového úhlu. Přemísťováním bodů A , B po kružnici můžeme měnit polohu a velikost oblouku AB . Pohybem bodu V po oblouku a současným sledováním hodnot φ a ω lze dojít k hypotéze, že platí (1). Tlačítkem T zobrazíme aktuální hodnotu 2φ a tlačítkem OV zobrazíme přímkou OV , která vytíná na kružnici tětivu (průměr) OC . Pohybem koncových bodů vektorových ovladačů ve směru naznačeném šipkami vektorů přemístíme pod původní obrázek kopie jeho dvou částí (obr. 3). Každá z nich představuje situaci z obr. 1. Symboly, které vidíme v levé části obrázku, zobrazuje tlačítko S . Žák nebo učitel je může pomocí myši přemísťovat, doplnit jimi chybějící popis obrázků v dolní části monitoru a odvodit vztah (1) pro danou situaci. Můžeme se i přesvědčit, že dolní dva obrázky jsou věrným rozkreslením horního obrázku: Když posuneme koncové body vektorových ovladačů co nejvíce doprava, přemístíme dolní kružnice na sebe. Úchopem za jejich společný střed můžeme takto vzniklý obrázek přemístit a přesvědčit se, že se kryje s horním.



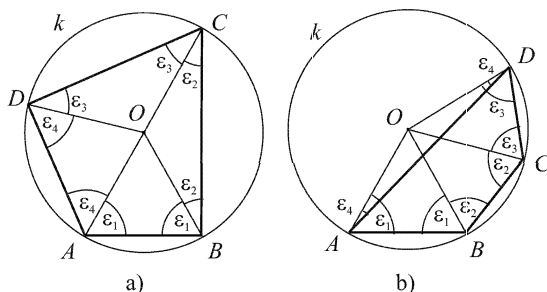
Obr. 3 Soubor 01 Euklid.fig v průběhu práce.

2. Odvození s využitím tětiového čtyřúhelníku

Na obr. 4a) je znázorněn tětiový čtyřúhelník $ABCD$, který obsahuje střed O opsané kružnice. Úsečky AO , BO , CO a DO jej rozdělují na čtyři rovnoramenné trojúhelníky s vyznačenými velikostmi shodných úhlů při základnách. Velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku nechť jsou $|\sphericalangle DAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle BCD| = \gamma$ a $|\sphericalangle CDA| = \delta$. Platí $\alpha = \varepsilon_4 + \varepsilon_1$, $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\gamma = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\delta = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$. Odtud zjistíme

$$\alpha + \gamma = (\varepsilon_4 + \varepsilon_1) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) = \beta + \delta = \pi, \quad (2)$$

neboť součet velikostí vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku je 2π .



Obr. 4 Ke větě o úhlech tětiového čtyřúhelníku

Vztah (2) platí, i když střed kružnice opsané leží vně čtyřúhelníku. Při označení podle obr. 4b) totiž dostáváme

$$\alpha + \gamma = (\varepsilon_1 - \varepsilon_4) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \beta + \delta.$$

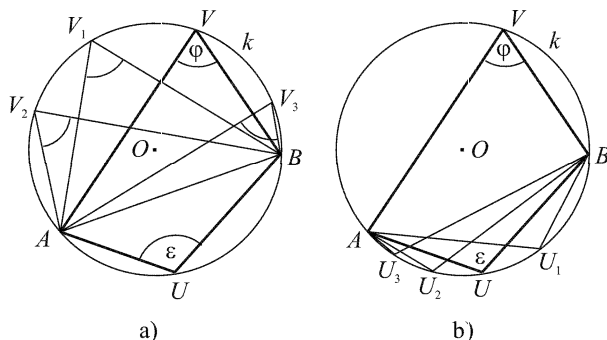
Tímto jsme odvodili známou větu o tětiovém čtyřúhelníku, která se obvykle uvádí jako důsledek věty 1.

Věta 2.

Součet velikostí protilehlých úhlů konvexního čtyřúhelníku je π .

Pomocí tohoto tvrzení nyní odvodíme větu 1. Na obr. 5 rozdělujeme tětivu AB kružnice k na dva oblouky. Když zvolíme uvnitř jednoho z nich bod U a uvnitř druhého bod V , obdržíme tětiový čtyřúhelník $AUBV$. Podle věty 2 mají všechny obvodové úhly AV_1B , AV_2B , $\dots$, jejichž vrcholy leží

uvnitř téhož oblouku jako bod V , velikost $\varphi = \pi - |\sphericalangle AUB|$, obr. 5a). Analogicky zjistíme, že i všechny obvodové úhly $AU_1B, AU_2B, \dots$, jejichž vrcholy leží uvnitř téhož oblouku jako bod U , mají velikost $\varepsilon = \pi - |\sphericalangle AVB|$, obr. 5b).



Obr. 5 Využití vlastností tětívového čtyřúhelníku

Odtud plyne, že jsou obvodové úhly příslušné témuž oblouku shodné. Nyní již stačí přemístit na obloucích body U a V tak, abychom mohli snadno vyjádřit velikosti středových úhlů AOB pomocí φ a ε . To mohou žáci provést sami. Jednu z možností představuje již známá situace z obr. 1a), jinou vhodnou možností je umístit U a V do středů oblouků AB .

Dynamické soubory k podpoře tohoto (i dalšího) odvození nalezneme opět na adrese [2].

3. Využití osových souměrností

Při odvození budeme uvažovat situaci na obr. 6 a kružnicové oblouky v polorovině ABV . Osa OC tětivy AV dělí oblouk AV na dva shodné oblouky AC a CV . Analogicky osa OD tětivy BV dělí oblouk BV na dva shodné oblouky BD a DV .

Odtud plyne, že délka oblouku CD je polovinou délky oblouku AB . Nezávisí na poloze bodu V uvnitř oblouku AB . Navíc přímky OC a OD svírají úhly stejné velikosti jako různoběžky AV a BV , $OC \perp AV$ a $OD \perp BV$. Při označení podle obrázku platí

$$\delta = |\sphericalangle BVM| = |\sphericalangle COD| = \frac{1}{2}(2\pi - \omega)$$

Literatura

- [1] *Kratz, J.*: Geometrie I. Bayerischer Schulbuch – Verlag, München 1973.
- [2] *Kuřina, F.*: 10 geometrických transformací. PROMETHEUS, Praha 2002.
- [3] *Leischner, P.*: Úhly v kružnici. (Soubor pomůcek pro výuku.)
<http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Coll_leischner/Uhlyvkruznici>
- [4] *Lietzmann, W.*: Altes und neues vom kreis. B. G. TEUBNER Verlagsgesellschaft, Leipzig 1935.
- [5] *Ernst, M.*: Einführung in die Geometrie auf abbildungsgeometrischer Grunagdlage, Teil 1. Ehrenwirth Verlag, München 1971.

O jednom využití stochastického grafu

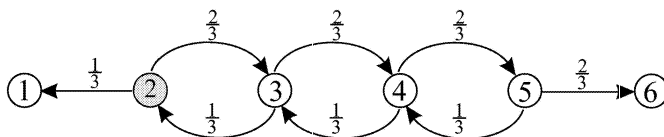
PAVEL TLUSTÝ – HELENA BINTEROVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

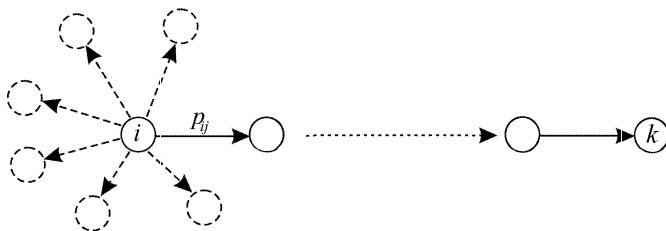
Nebývá obvyklé, aby se v úlohách matematické olympiády vyskytovaly příklady zahrnující tematiku teorie pravděpodobnosti. Výjimkou byl 52. ročník, kdy byla v domácím kole kategorie A předložena studentům jako šestá v pořadí následující úloha:

Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných $1, 2, \dots, 6$ následující hru. Na začátku je umístěna na pole s číslem 2 figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi, posune se figurka na pole s číslem o 1 menším, jinak na pole s číslem o 1 větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B, dostane-li se figurka na pole s číslem 1 resp. 6. S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A?

Graf na obr. 1 představuje hrací plátno ke hře popsané v úloze 6.



Obr. 1



Obr. 2

Na oficiálních webovských stránkách Ústřední komise MO ([3]) nalezneme podrobné řešení této úlohy, ze kterého se dozvíme, že uvedená hra je nespravedlivá, neboť pravděpodobnost, že zvítězí hráč A je rovna $\frac{15}{31}$, zatímco pravděpodobnost vítězství hráče B v této hře je $\frac{16}{31}$, pravděpodobnost remízy je tedy nulová. Z řešení je zřejmé, že se figurka dříve nebo později dostane buď do bodu ①, nebo do bodu ⑥.

Pro praktickou realizaci takové hry, tj. pokud bychom ji chtěli opravdu hrát je podstatná také skutečnost, zda-li se v nějakém reálném čase dočkáme konce hry. Tedy zajímá nás, jak dlouho budeme "v průměru" čekat než některý z hráčů vyhraje, tj. kolikrát musíme házet, než figurka přejde buď do bodu ① nebo do bodu ⑥. K nalezení odpovědi na tuto otázku využijeme některých vlastností stochastických grafů (viz [1], [2]).

Stochastickým grafem rozumíme orientovaný graf, kde je každé hraně přiřazeno kladné reálné číslo a součet čísel přiřazených hranám se společným počátečním uzlem je roven 1. Uzly typu ① nebo ⑥ označujeme jako koncové uzly, K označíme množinu všech koncových uzlů. Označme B_i náhodnou veličinu, která označuje počet kroků, které musíme udělat, než se z uzlu i dostaneme do některého z uzlů množiny K . Naším úkolem je určit střední hodnotu $EB_i = b_i$. Je zřejmé, že $b_i = 0$, pokud $i \in K$. Přitom

$$EB_i = \sum (\text{délka trasy}) \times (\text{pravděpodobnost této trasy}),$$

kde sčítáme přes všechny trasy vycházející z uzlu i a končící v některém z uzlů množiny K . Zabývejme se nyní jednou konkrétní takovou trasou viz obr. 2, kde p_{ij} je pravděpodobnost přechodu z bodu i do bodu j . Z vlastnosti stochastického grafu navíc plyne, že $\sum_n p_{in} = 1$. Na trasu přes bod j se dostaneme s pravděpodobností p_{ij} a z bodu j jsme udělali

do bodu j právě jeden krok. Očekávaná délka trasy z bodu j do některého z uzlů množiny K je b_j . Dostaneme tak

$$p_{ij} \cdot (1 + b_j).$$

Stejnou úvahu můžeme udělat pro všechny sousední vrcholy vrcholu i a po sečtení (přes všechny sousední vrcholy vrcholu i) dostaneme

$$b_i = \sum_n [p_{in} \cdot (1 + b_n)] = \sum_n p_{in} + \sum_n p_{in} b_n = 1 + \sum_n p_{in} b_n.$$

Aplikujeme-li uvedený vztah na naši úlohu, dostaneme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} b_2 &= 1 + \frac{2}{3}b_3, \\ b_3 &= 1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{2}{3}b_4, \\ b_4 &= 1 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{2}{3}b_5, \\ b_5 &= 1 + \frac{1}{3}b_4. \end{aligned}$$

Jiným vyřešením dostaneme $b_2 = \frac{147}{31}$, $b_3 = \frac{174}{31}$, $b_4 = \frac{141}{31}$, $b_5 = \frac{78}{31}$.

Vidíme tedy, že se jedná o reálnou hru, neboť v průměru po $\frac{147}{31} \doteq 5$ hodech hra skončí.

L i t e r a t u r a

- [1] *Tlustý, P. – Krech, I.*: Stochastické grafy jako nástroj řešení úloh, MFI, Vol. 19, 2009/2010, No. 5, str. 257–260.
- [2] *Płocki, A. – Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé, Prometheus, Praha, 2007.
- [3] <http://www.math.muni.cz/~rvmo/>

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 177 a 178, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 177

Nechť pro body D, E strany BC trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EAC| = \frac{1}{3}|\sphericalangle BAC|.$$

Dokažte nerovnost $|BD| + |EC| > \frac{2}{3}|BC|$.

Jozef Mészáros

Řešení.

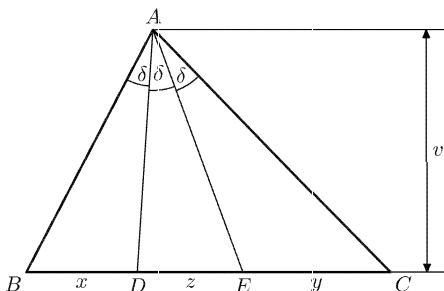
Zvolme následující označení (viz obr.): $|\sphericalangle BAC| = 3\delta$, $|BD| = x$, $|EC| = y$, $|DE| = z$ a označme v velikost výšky trojúhelníku ABC na stranu BC . Podle tohoto označení platí $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EAC| = \delta$, $|BC| = x + z + y$ a dle zadání máme dokázat nerovnost $x + y > \frac{2}{3}(x + z + y)$, která je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2}(x + y) > z. \quad (1)$$

Z konkávnosti funkce sinus na intervalu $(0; \pi)$ plyne pro δ ($0^\circ < \delta < 60^\circ$) nerovnost $3 \sin \delta > \sin 3\delta$, odtud

$$\frac{\sin \delta}{\sin 3\delta} > \frac{1}{3}. \quad (2)$$

(Tato nerovnost je také důsledkem vzorce $\sin 3\delta = 3 \sin \delta - 4 \sin^3 \delta < 3 \sin \delta$.)



Ze známého vzorce pro obsah trojúhelníku plyne

$$P_{ABD} \cdot P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \delta \cdot \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AC| \cdot \sin \delta = \\ = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin 3\delta \cdot \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \delta \cdot \frac{\sin \delta}{\sin 3\delta} = P_{ABC} \cdot P_{ADE} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin 3\delta},$$

kde P_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ . Užitím nerovnosti (2) obdržíme odhad

$$P_{ABD} \cdot P_{AEC} > \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot P_{ADE}$$

Podle jiného vzorce pro obsah trojúhelníku dále platí

$$\frac{1}{2}xv \cdot \frac{1}{2}yv = P_{ABD} \cdot P_{AEC} > \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot P_{ADE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x+z+y)v \cdot \frac{1}{2}zv.$$

Tento vztah upravíme a dostaneme

$$xy > \frac{1}{3}(x+z+y)z.$$

Důkaz nerovnosti (1) povedeme sporem. Předpokládejme, že existuje trojúhelník ABC , ve kterém platí $\frac{1}{2}(x+y) \leq z$. Potom užitím předcházející nerovnosti máme

$$xy > \frac{1}{3}(x+z+y)z \geq \frac{1}{3} \left[x + \frac{1}{2}(x+y) + y \right] \cdot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Tato nerovnost je ale ekvivalentní s nerovností $0 > (x-y)^2$, což je spor. Proto platí

$$\frac{1}{2}(x+y) > z,$$

což jsme chtěli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 178

Dokažte, že číslo $5^n + 7^n + 13^n$ je složené pro každé přirozené číslo n .

Martin Panák

Řešení.

Vypočteme několik prvních hodnot součtu $s_n = 5^n + 7^n + 13^n$:

n	1	2	3	4	5	6
s_n	25	243	2 665	31 587	391 225	4 960 083

Pomocí této tabulky můžeme vyslovit hypotézu, že $5 \mid s_n$ pro n liché a $3 \mid s_n$ pro n sudé. Tuto hypotézu nyní dokážeme.

Předpokládejme, že číslo n je sudé, tedy existuje přirozené číslo k tak, že platí $n = 2k$. Potom

$$s_{2k} = 25^k + 49^k + 169^k = (3 \cdot 8 + 1)^k + (3 \cdot 16 + 1)^k + (3 \cdot 56 + 1)^k.$$

Číslo s_{2k} má při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $1 + 1 + 1 = 3$, které je třemi dělitelné. Tím jsme naši hypotézu dokázali pro sudá čísla n .

Předpokládejme, že číslo n je liché, tedy existuje celé nezáporné číslo k tak, že platí $n = 2k + 1$. Potom

$$s_{2k+1} = 5 \cdot 25^k + 7 \cdot 49^k + 13 \cdot 169^k = 5 \cdot 25^k + 7 \cdot (5 \cdot 10 - 1)^k + 13 \cdot (5 \cdot 34 - 1)^k.$$

Číslo s_{2k+1} má tedy při dělení pěti stejný zbytek jako číslo $0 + 7 \cdot (-1)^k + 13 \cdot (-1)^k = -20$, které má při dělení pěti zbytek 0. Tím jsme naši hypotézu dokázali pro lichá čísla n .

Dále pro přirozená čísla n zřejmě platí $s_n \geq 5 + 7 + 13 = 20$. Z dokázané hypotézy plyne, že $5 \mid s_n$ pro n liché a $3 \mid s_n$ pro n sudé, tedy čísla s_n musí být nutně složená, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *György Oláh* z Komárna, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné a *Martin Raszyk* z G v Karviné,

Pavel Calábek