

MATEMATIKA

Od sedminové elipsy k motýlím křídílům a rosetám v rovině a v prostoru

MILAN KOMAN

Praha

Po cestách pravidelností ke krásám matematiky

S pojmem sedminové elipsy¹⁾ se mohli naši čtenáři seznámit již v roce 2007 v autorově článku [1]. Připomeneme tento pojem, protože v tomto článku na něj budeme navazovat.

Vezměme nekonečný desetinný rozvoj zlomku $1/7$

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\,142857\ldots$$

Periodický rozvoj zlomku $1/7$ má šestimístnou periodu $P = 142857$, která má pro naše další vyšetřování jednu užitečnou vlastnost, tzv. *součtovou vlastnost*. Její první a čtvrtá číslice mají stejný součet jako druhá a pátá číslice a také jako třetí a šestá číslice:

$$1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 \tag{1}$$

Tato součtová vlastnost je základem celé teorie, již se náš příspěvek bude zabývat.

¹⁾ Obrázky, které jsou v tomto příspěvku černobílé, může najít čtenář v barevné verzi na webových stránkách MFI: <http://www.mfi.upol.cz>

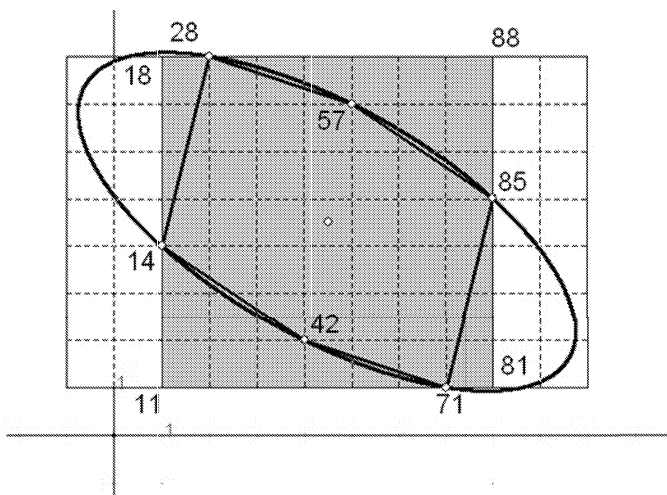
Sedminová elipsa v rovině

Seznam 1

14
42
28
85
57
71

Východiskem pro sedminovou elipsu je perioda $P = 142857$. Vezmeme v ní první a druhou číslic, to je 1 a 4, a pak všechny dvojice, které z ní vzniknou cyklickou záměnou. Sestavíme z nich šest dvojmístných čísel uvedených v Seznamu 1.

Nyní sestojíme v kartézské soustavě souřadnic šest bodů. Jejich x -ové souřadnice budou desítky čísel ze Seznamu 1 a y -ové souřadnice jednotky těchto čísel. Těchto šest bodů tvoří vrcholy středově souměrného šestiúhelníku. Skutečnost, že je tento šestiúhelník středově souměrný, vyplývá ze součtové vlastnosti (1). Vrcholy tohoto šestiúhelníku prochází jediná elipsa, kterou nazýváme sedminovou elipsou (obr. 1). Důkaz, že všech šest vrcholů šestiúhelníku opravdu leží na jediné elipse, nalezneme čtenář v [2].



Obr. 1

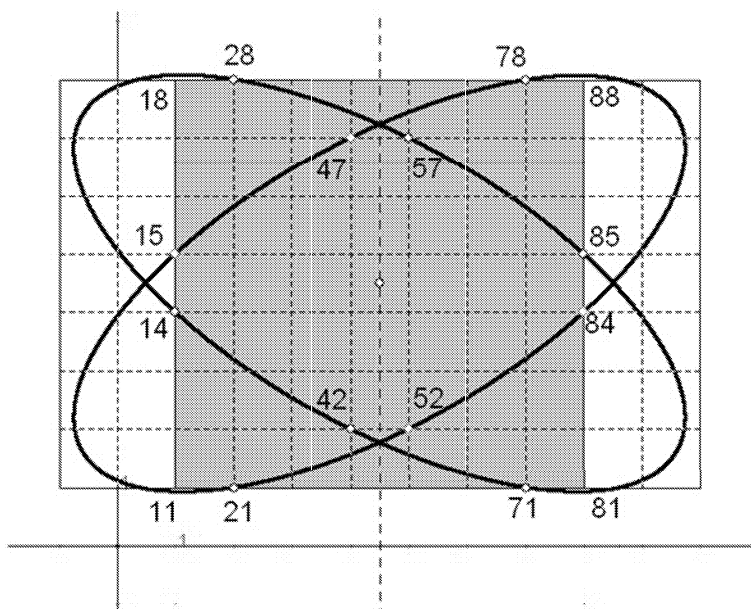
Za zmínku stojí to, že všechny vrcholy šestiúhelníku náleží šedivému čtverci s vrcholy 11, 18, 88, 81. To je tím, že nejmenší a největší číslice v periodě $P = 142857$ jsou číslice 1 a 8.

Sedminová motýlí křídla v rovině

Seznam 2

14	15
42	47
28	21
85	84
57	52
71	78

Seznam 1, pomocí kterého jsme dostali sedminovou elipsu, rozšíříme o druhý sloupec. Z periody $P = 142857$ vezmeme první a pátou číslici, tj. 1 a 5, a z nich dostaneme první číslo 15 v druhém sloupci nového Seznamu 2. Další čísla dostaneme, podobně jako v prvním sloupci, cyklickou záměnou. Jak již víme, čísla prvního sloupce udávají souřadnice šesti bodů, kterými prochází známá sedminová elipsa. Podobně pomocí čísel druhého sloupce sestojíme druhou elipsu. Dostaneme obr. 2, který trochu připomínat motýlí křídla a odtud název *sedminová motýlí křídla*.



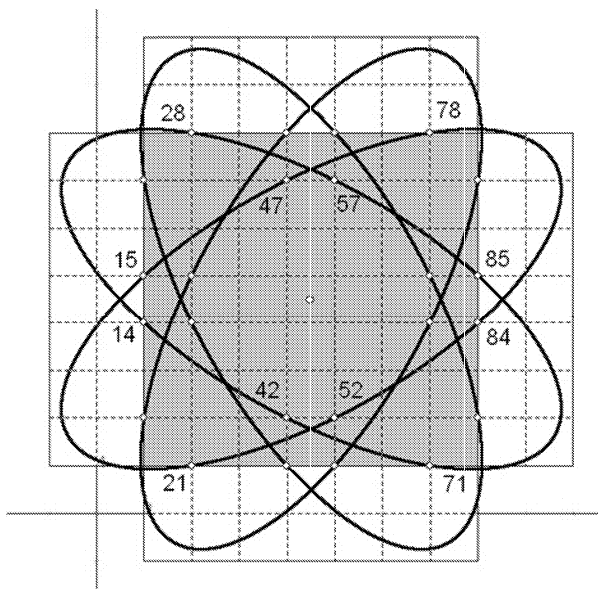
Obr. 2

Každá z elips na obrázku 2 je obrazem druhé elipsy v osové souměrnosti podle svislé ose procházející jejich společným středem.

Sedminová roseta v rovině

Seznam 3			
14	15	12	17
42	47	48	41
28	21	25	24
85	84	87	82
57	52	51	58
71	78	74	75

Seznam 2 doplníme ještě o dva další sloupce. Z periody $P = 142857$ vybereme dvojice číslic 1, 2 a 1, 7. Z nich sestavíme dvojčíferná čísla 12 a 17, a umístíme je na začátky třetího a čtvrtého sloupce. Ostatní čísla v těchto sloupcích dostaneme cyklickou záměnou. Vznikne tak Seznam 3. Pomocí čísel v těchto sloupcích sestojíme již známým postupem čtyři elipsy. První dvě tvoří již motýlí křídla. Čtveřice všech čtyř elips vytvoří čtyři „listy“ tzv. sedminové rosety (obr. 3).



Obr. 3

Z obr. 3 lze snadno nahlédnout, které shodnosti převádějí jednotlivé listy rosety na ostatní listy rosety. Je to celkem 8 shodných zobrazení, mezi nimiž je i identické zobrazení.

Pozornému čtenáři asi neušlo, že jsme jako výchozí dvojice číslic periody $P = 142857$ vynechali dvojici 1, 8. Doporučujeme, abyste si vypsali

všechny dvojice, které z dvojice 1, 8 dostaneme opět cyklickou záměnou a pak sestrojili příslušné body. Pak zjistíte, která elipsa, či jiná čára všemi těmito body prochází.

Sedminové elipsy v prostoru

Seznam 4

142
428
285
857
571
714

Při přechodu od rovinné geometrie k prostorové geometrii se často používá analogie. Ta se nám zde přímo nabízí. V rovině jsme elipsy ve všech dosavadních obrázcích sestrojovali pomocí dvojic číslic periody $P = 142857$. Analogie, která je nabílední, nás vede k vyšetřování trojic číslic vybraných opět z periody $P = 142857$ a k sestrojování příslušných bodů v prostoru a k sestrojování křivek, které těmito body procházejí.

Zvolme pro začátek trojici číslic 1, 4, 2. Pomocí nich sestrojíme trojicerné číslo 142 a všechna čísla, která z něj vzniknou cyklickou záměnou (Seznam 4).

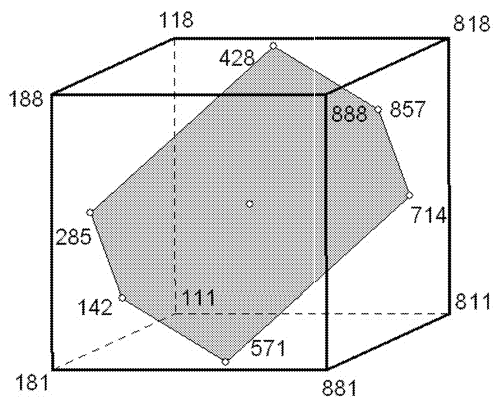
Odpovídající body v trojrozměrném prostoru znázorníme v kosoúhlém promítání. Počet stovek udává x -ovou souřadnici, počet desítek y -ovou souřadnici a počet jednotek z -ovou souřadnici. V případě sedminové elipsy náležely zobrazené body čtverci s vrcholy 11, 18, 88, 81. Analogicky budou nyní uvažované body náležet krychli s vrcholy 111, 181, 881, 811, 118, 188, 888, 818. V tomto případě dokonce každý z nich leží v jedné stěně krychle. V podstavách leží body 571 a 428. V levé a pravé boční stěně leží body 142 a 857. V přední a zadní stěně leží body 714 a 285, viz obr. 4. Všechny tři dvojice uvedených bodů jsou jak prostoru, tak na obr. 4, středově souměrné podle středu uvažované krychle.

Šestiúhelník, který vidíme na obrázku je opět díky součtové vlastnosti (1) středově souměrný. Můžeme proto sestrojit elipsu, která prochází všemi šesti body. Na obr. 5 vypadá skoro jako kružnice.

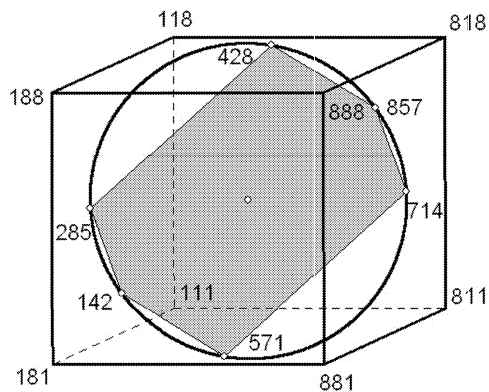
Ale musíme být opatrní. Musíme také zodpovědět otázku: Leží šestice sestrojených bodů v rovině? K našemu překvapení zjistíme, že tyto body v rovině neleží. Jimi tedy nemůže procházet žádná rovinná křivka a tedy ani elipsa. Můžeme se o tom přesvědčit dvěma postupy, početně a geometricky.

Početní postup:

Vypočítáme souřadnice vektorů určené dvojicemi středově souměrných bodů. Uspořádaná dvojice bodů 142 a 857 určuje vektor $(7; 1; 5)$. Uspořádaná dvojice bodů 428 a 571 určuje vektor $(1; 5, -7)$. A konečně uspořá-



Obr. 4



Obr. 5

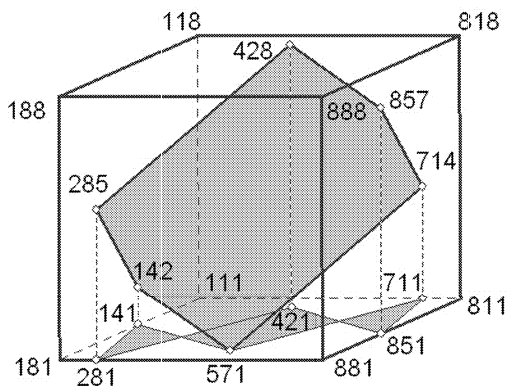
daná dvojice bodů 285 a 714 určuje vektor $(5; -7; -1)$. Nyní vypočítáme determinant Δ , jehož řádky jsou získané vektory:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -362$$

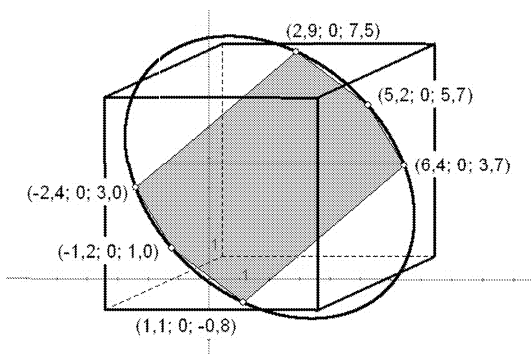
Protože je determinant $\Delta \neq 0$, jsou řádkové vektory lineárně nezávislé a tedy šesticí uvažovaných bodů neleží v rovině.

Geometrický postup:

Sestrojíme pravoúhlý průmět „šestiúhelníku“ z obr. 4 do podstavy znázorněné krychle (obr. 6).



Obr. 6



Obr. 7

A co vidíme? Pravoúhlý průmět je dvakrát zkřížený šestiúhelník a tedy „šestiúhelník“ z obrázku 4 nemůže být rovinný.

Ale přece jen má obrázek 5 reálný smysl. Sestrojená elipsa neprochází šesticí bodů na povrchu krychle, ale prochází šesticí bodů, které jsou jejich kosoúhlými průměty v rovině xz . Všechny tyto body mají proto y -ovou souřadnici rovnou 0. Samozřejmě také x -ové a y -ové souřadnice jsou jiné

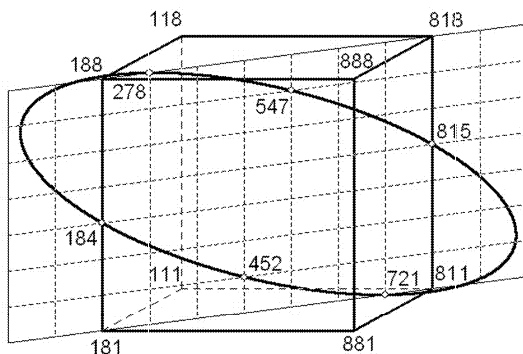
než souřadnice příslušných bodů v prostor, které mají stejný kosoúhlý průmět. Tyto souřadnice také nejsou celá čísla. Na obr. 7 jsou zaokrouhlena na 1 desetinné místo. Na obr. 5 pochopitelně průměty dvojic těchto bodů splývají.

Seznam 5

184
452
278
815
547
721

Z tohoto výsledku však nemusíme být zklamáni. Zvolíme jinou trojici číslic v periodě $P = 142857$. Zvolíme trojici 184 a najdeme všechny trojice číslic, které z ní vzniknou cyklickou záměnou a odpovídající trojiciferná čísla. Zapišeme je do Seznamu 5.

V krychli K s vrcholy 111, 181, 881, 811, 118, 188, 888, 818 vyznačíme opět šestici bodů ze Seznamu 5. Jimi pak již proložíme elipsu (obr. 8). Tentokrát všechny body leží v jedné rovině, a to v úhlopříčné rovině krychle procházející body 188, 181, 811, 818. Důvod je ten, že u všech šesti bodů ze Seznamu 5 splňují první a druhá souřadnice bodů (jsou vyznačeny tučně) součtovou vlastnost (1), jejich součet je roven 9.



Obr. 8

Promítneme-li pravoúhle tuto elipsu do zadní stěny krychle, dostaneme elipsu, která je shodná s elipsou na obrázku 1.²⁾ Elipsa na obrázku 8 je

²⁾ Další sedminové elipsy v prostoru můžeme získat tak, že z periody 142857 vybereme libovolnou trojici číslic, z nichž některé dvě splňují součtovou vlastnost (1). Z každé z nich vytvoříme všechny trojice užitím cyklické záměny. Pomocí takto vybraných trojic dostaneme jednu sedminovou elipsu. S některými možnostmi se setkáme ještě v dalším textu.

ovšem ve skutečnosti delší, než elipsa na obrázku 1. Snadno to lze nahlédnout porovnáním čtvercové sítě na obr. 1 s obdélníkovou sítí na obrázku 8.

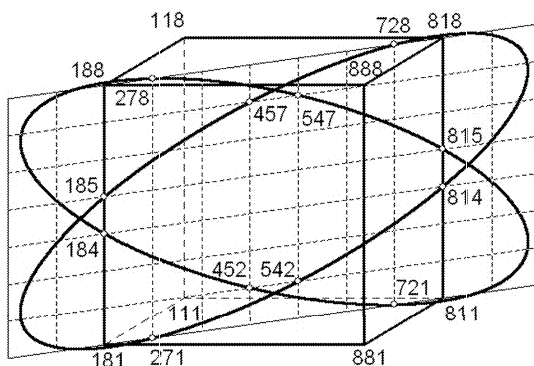
Sedminová motýlí křídla v prostoru

Seznam 6

184	185
452	457
278	271
815	814
547	542
721	728

Motýlí křídla v prostoru dostaneme podobně jako v rovině. Tam jsme Seznam 1 doplnili novým sloupcem, který byl určen dvojicí číslic 1 a 5 a další čísla jsme dostali cyklickou záměnou. Tím jsme dostali Seznam 2. Podobně nyní doplníme v Seznamu 5 nový sloupec, jehož první číslo bude určeno trojicí číslic 1, 8 a 5 vybraných zase v periodě $P = 142857$. Další čísla v tomto sloupci dostaneme opět cyklickou záměnou. Ukazuje to Seznam 6.

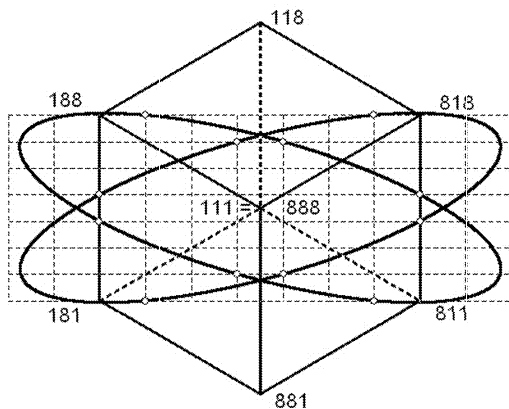
Dokreslíme do obr. 8 elipsu podle druhého sloupce Seznamu 6 a dostaneme motýlí křídla v prostoru. První číslice udává souřadnici x , druhá číslice souřadnici y a třetí číslice souřadnici z (obr. 9).



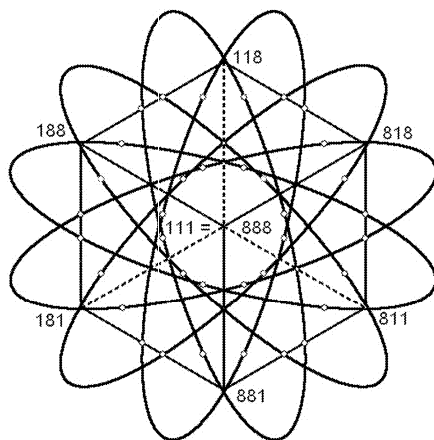
Obr. 9

Sedminová motýlí křídla na obr. 9 leží v úhlopříčné rovině krychle, která je rovnoběžná s osou z . Je to důsledkem toho, že v Seznamu 6 ve všech případech souřadnice x a y splňují součtovou vlastnost (1).

Než znázorníme další sedminová motýlí křídla v prostoru, zobrazíme motýlí křídla z obrázku 9 místo v kosoúhlém promítání v pravoúhlém promítání se směrem rovnoběžným s tělesovou úhlopříčkou krychle K procházející vrcholy 111 a 888. Výsledné zobrazení je na obr. 10.



Obr. 10



Obr. 11

Seznam 7

418	518
245	745
827	127
581	481
754	254
172	872

Seznam 8

841	851
524	574
782	712
158	148
475	425
217	287

Jiná dvě sedminová motýlí křídla můžeme v trojrozměrném prostoru sestavit ve dvou úhlopříčných rovinách krychle K , které jsou rovnoběžné s osou x nebo s osou y . V prvním případě, tato motýlí křídla popisuje Seznam 7, který dostaneme ze Seznamu 6 cyklickou záměnou číslic, při které přesuneme

třetí číslice na první místo. Ve druhém případě popisuje motýlí křídla Seznam 8. Ten dostaneme ze Seznamu 7 další cyklickou záměnou, kdy opět třetí číslice přesuneme na první místo.

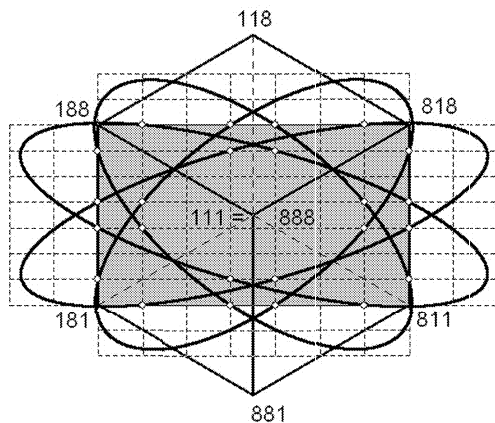
Všechna tři motýlí křídla popsaná v Seznamech 6, 7 a 8 zobrazíme podobně jako na obrázku 10 v pravoúhlém promítání se směrem rovnoběžným s tělesovou úhlopříčkou krychle K procházející vrcholem 111. Motýlí křídla popsaná v Seznamu 6 známe již z obrázku 10. Další dvě zbylá motýlí křídla z nich dostaneme na obr. 11 otočením kolem středu krychle K o úhel 120° a o úhel -120° .

Obr. 11 připomíná svým tvarem rosetu, ale nesmíme zapomenout, že tři zobrazená motýlí křídla leží ve třech různých rovinách.

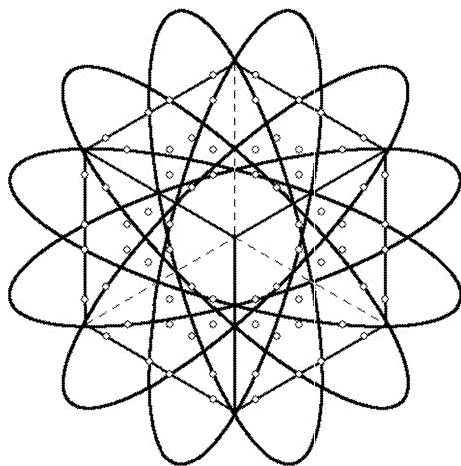
Sedminová roseta v prostoru

Seznam 9			
184	185	182	187
452	457	458	451
278	271	275	274
815	814	817	812
547	542	541	548
721	728	724	725

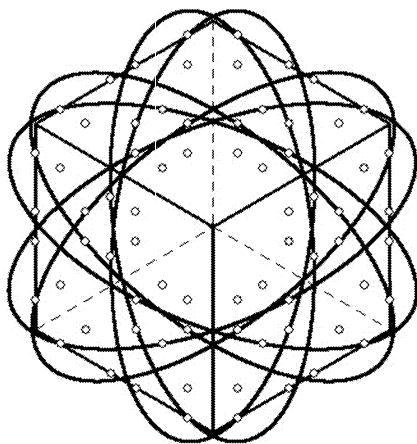
Sedminovou rosetu v prostoru, která leží v úhlopříčné rovině krychle K procházející body 188, 181, 811, 818 dostaneme doplněním motýlích křídel z obrázku 10 o další dvě elipsy. Rosetu znázorňuje obrázek 12, její popis udává Seznam 9. Tučné číslice opět zdůrazňují, že x -ové a y -ové souřadnice splňují součtovou vlastnost (1). Proto leží tato roseta v uvedené úhlopříčné rovině, která je rovnoběžná s osou z .



Obr. 12



Obr. 13a

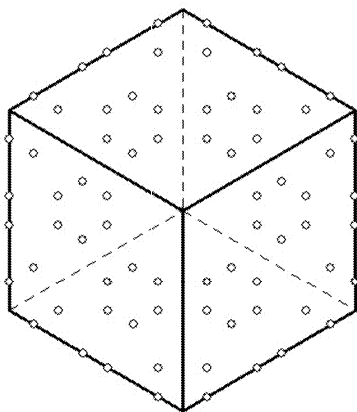


Obr. 13b

Podobně, jako jsou na obr. 9 motýlí křídla „roztažena“ ve směru stěnové úhlopříčky krychle K spojující body 188 a 818, je i prostorová roseta „roztažena“ v tomto směru. Proto jsou dvě přidané elipsy kratší a zároveň širší než elipsy tvořící motýlí křídla.

V rovině jsme znázornili motýlí křídla v jednom obrázku ve třech úhlopříčných rovinách (obr. 11). Kdybychom podobně chtěli zobrazit v jednom obrázku všechny tři rosety v prostoru, vznikl by velice nepřehledný obrázek. Proto zobrazíme tuto trojici roset „rozloženou“ do tří obrázků. Na obrázku 13a vidíme trojici motýlích křídel doplněnou o dalších 36 bodů, kterými procházejí nenakreslené přidané elipsy.

Na obr. 13b jsou naopak přidané elipsy a 36 bodů, kterými prochází elipsy motýlích křídel. Na obrázku 13c vidíme 72 bodů, kterými procházejí všechny elipsy z obr. 13a a 13b. Tvoří zajímavou, několikanásobně symetrickou bodovou mozaiku, kterou bychom mohli při trochu fantazie nazvat „padaající dešťové kapky“.



Obr. 13c

Tím končí v prostoru variace na sedminovou elipsu. Ale není to ještě konec. Viděli jsme, že v prostoru všechny sestrojené elipsy leží v úhlopříčných rovinách krychle K . To znamená, že leží vždy v rovinách, které jsou kolmé k některé průmětně. To je trochu zklamání. Očekávali bychom, že některé elipsy mohou ležet v rovinách, které nejsou kolmé k žádné průmětně. To je možné, ale musíme uvažovat jiné než sedminové elipsy. Tedy elipsy, které nejsou určeny zlomkem $1/7$, ale nějakým jiným vhodným zlomkem. Musí to být samozřejmě takový zlomek, jehož nekonečný desetinný rozvoj má šestimístnou periodu, která opět splňuje součtovou vlastnost (1). Ale to nestačí, perioda takového desetinného rozvoje musí být *palindrom*, tj.

symetrické číslo. Takových zlomků není mnoho a jejich jmenovatele jsou relativně dost velké. Nejmenším možným jmenovatelem těchto zlomků je číslo 273. Těmto podmínkám vyhovuje zlomek $172/273$, který má nekonečný desetinný rozvoj

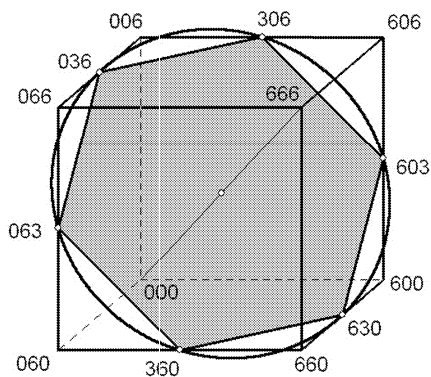
$$\frac{172}{273} = 0,630036630036630036. \quad (2)$$

Jeho perioda $P_s = 630036$ je skutečně palindrom.

Seznam 10

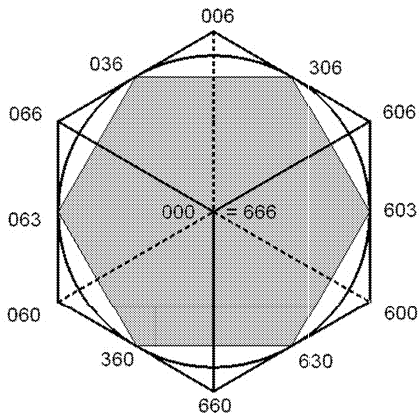
603
306
036
063
360
630

Při sestrovování elips odvozených z periody $P_s = 630036$ budeme postupovat známým způsobem. Vybereme vhodnou trojici číslic z periody P_s . Nejdříve to bude první, třetí a pátá číslice a z nich sestavíme číslo 603. K tomuto číslu přidáme všechna čísla, která vzniknou už známým způsobem, tj. cyklickou záměnou. Dostaneme Seznam 10. Čísla z tohoto Seznamu zobrazíme v prostoru, stejně jako jsme pracovali s čísly v Seznamu 4 a dalších seznamech. Sestrojených šest bodů leží na hranách krychle K' s vrcholy 000, 600, 060, 600, 660, 606, 066, 666 (obr. 14). Jsou to vrcholy pravidelného šestiúhelníku, který je řezem krychle K' s rovinou kolmou k úhlopříčce jdoucí body 000 a 666 procházející středem krychle. Těmito vrcholy proto prochází kružnice (jako speciální případ elipsy) odpovídající zlomku (2).



Obr. 14

Přejdeme-li od kosoúhlého promítání ke kolmému promítání ve směru úhlopříčky 000, 666 krychle K' dostaneme obr. 15.



Obr. 15

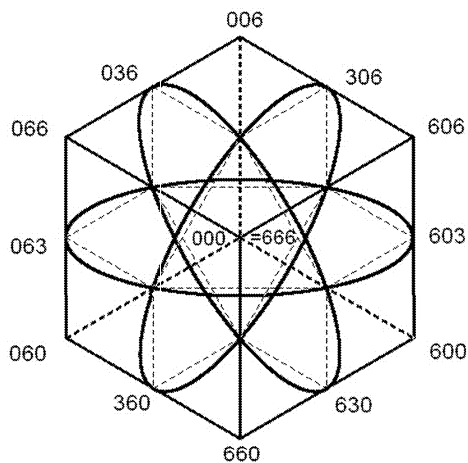
Seznam 11		
636	636	663
306	366	366
003	063	036
030	030	003
360	300	300
663	603	630

Stejným způsobem můžeme sestavit další tři kružnice, které procházejí středem krychle K' a leží v rovinách kolmých na její tělesové úhlopříčky. Jsou určeny čísla ze Seznamu 11. První číslo v prvním sloupci je složeno z první, druhé a šesté číslice periody $P_s = 630036$. První číslo ve druhém sloupci je složeno z první, páté a šesté číslice periody $P_s = 630036$. První číslo ve třetím sloupci je složeno z první, šesté a páté číslice periody $P_s = 630036$. Ostatní čísla ve sloupcích vzniknou cyklickou záměnou. Při stejném promítání jako na obr. 15 se zobrazí kružnice se Seznamu 11 jako elipsy (obr. 16).

Za zmínku stojí, že každé dvě z kružnic popsaných v Seznamech 10 a 11 mají společné právě dva body. Můžeme si to ověřit i pomocí Seznamů 10 a 11. Například kružnice dané prvním a druhým sloupce ze Seznamu 11 mají společné body 636 a 030.

Je přirozené, že bychom mohli sestavovat pomocí periody $P_s = 630036$ elipsy v úhlopříčných rovinách krychle K' . Tentokrát to budou skutečně elipsy a nikoliv kružnice, se kterými jsme se setkali na obrázcích 15 a 16.

Čtenářům, které tato problematika zaujala, lze doporučit autorovy práce [2], [3], [4] a [5].



Obr. 16

Literatura

- [1] *Koman, M.*: O sedminové ellipse a třináctinové hyperbole I a II Matematika-fyzika-informatika, Vol. 17 (2007), No 2, 3, s. 71-73, 140-144. ISSN 1210-1751.
- [2] *Koman, M.*: Variationen auf die Ein-Siebtel-Ellipse. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Vol. 63 (2010), No. 4, s. 200-202, ISSN 0025-5866.
- [3] *Koman, M.*: Variationen der Ein-Dreizehtel-Hyperbel. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Vol. 63 (2010), No. 7. S. 404-406, ISSN 0025-5866.
- [4] *Koman, M.*: O jedné sedminové a o dvou třináctinových rosetách. Učitel matematiky, 2011, Vol. 19 (2011), č. 3.
- [5] *Koman, M.*: Rosetten und Ketten von Bruch-Kegelschnitten Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Vol. 64 (2011), v tisku.

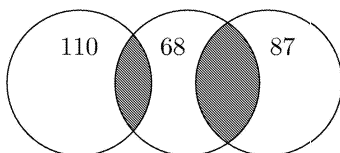
61. ročník Matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Na obrázku jsou tři stejně velké kruhy. Společné části sousedních kruhů jsme šedě vybarvili. Bílé části mají v obrázku zapsány své obsahy, a to v centimetrech čtverečních. Vypočítejte obsahy obou šedých částí.



(*L. Šimůnek*)

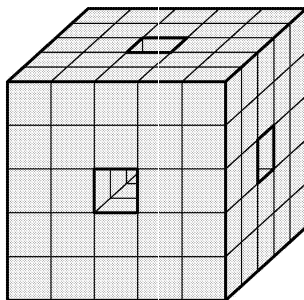
Z6–I–2

Do hračkářství přivezli nová plyšová zvířátka: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nohou a 4 křídla, každý pštros má 2 nohy a 2 křídla a každý krab má 8 nohou a 2 klepeta. Dohromady mají tyto přivezené hračky 118 nohou, 22 křídel a 22 klepet. Kolik mají dohromady hlav?

(*M. Petrová*)

Z6–I–3

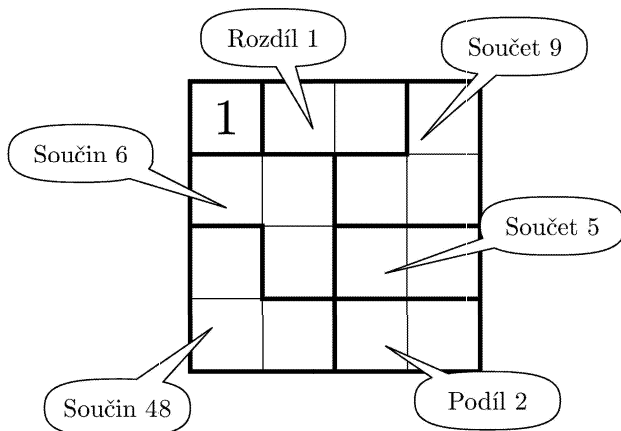
Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Hotovou stavbu jsme celou ponořili do barvy. Kolik kostiček má obarvenu aspoň jednu stěnu?



(M. Krejčová)

Z6–I–4

Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, 3, nebo 4 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.



(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.)

(S. Bednářová)

Z6–I–5

Ondra, Matěj a Kuba dostali k Vánocům od prarodičů každý jednu z následujících hraček: velké hasičské auto, žebříky aj.), vrtulník na dálkové ovládání a stavebnici Merkur. Bratranec Petr doma vyprávěl: „Ondra

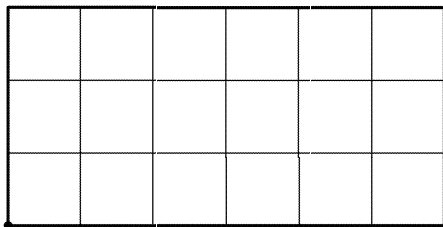
dostal to velké hasičské auto. Přál si ho sice Kuba, ale ten ho nedostal. Matěj nemá v oblibě stavebnice, takže Merkur nebyl pro něj.“

Ukázalo se, že ve sdělení, jaký dárek kdo dostal či nedostal, se Petr dvakrát mýlil a jen jednou vypovídal správně. Jak to tedy s dárky bylo?

(*M. Volfová*)

Z6–I–6

Marta, Libuše a Marie si vymyslely hru, kterou chtějí hrát na obdélníkovém hřišti složeném z 18 stejných čtverců, viz obrázek. Ke hře potřebují hřiště rozdělit dvěma rovnými čarami na tři stejně velké části. Navíc tyto čáry musejí obě procházet tím rohem hřiště, který je na obrázku vlevo dole. Poradte děvčatům, jak mají dokreslit čáry, aby si mohla začít hrát.

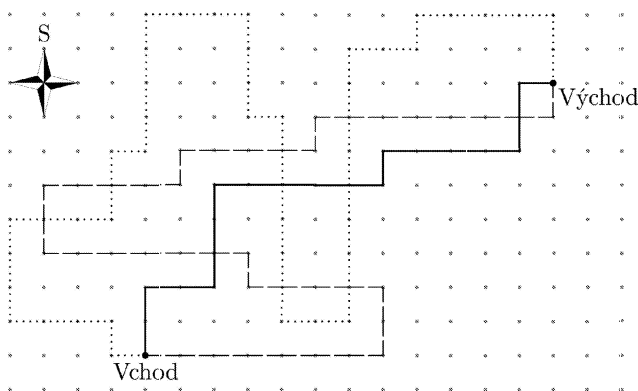


(*E. Trojáková*)

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

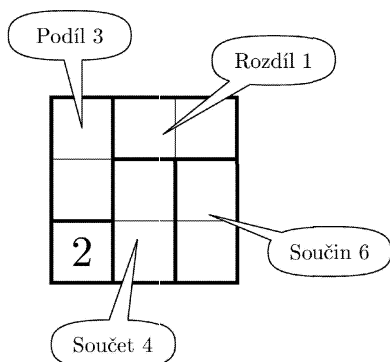
Tři kamarádi Pankrác, Servác a Bonifác šli o prázdninách na noční procházku přírodním labyrintem. U vstupu dostal každý svíčku a vydali se různými směry. Všichni labyrintem úspěšně prošli, ale každý šel jinou cestou. V následující čtvercové síti jsou vyznačeny jejich cesty. Víme, že Pankrác nikdy nešel na jih a že Servác nikdy nešel na západ. Kolik metrů ušel v labyrintu Bonifác, když Pankrác ušel přesně 500 m?



(M. Petrová)

Z5-I-2

Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, nebo 3 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.



(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.)

(S. Bednářová)

Z5-I-3

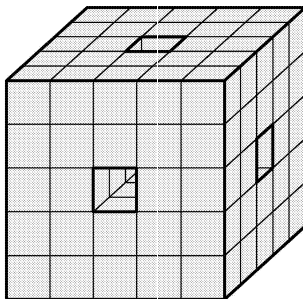
Jolana připravuje pro své kamarádky občerstvení — chlebičky. Namaže je bramborovým salátem a navrch chce dát ještě další přísady: šunku,

tvrdý sýr, plátek vajíčka a proužek nakládané papričky. Jenže nechce, aby některé dva její chlebičky obsahovaly úplně stejnou kombinaci přísad. Jaký největší počet navzájem různých chlebičků může vytvořit, jestliže žádný z nich nemá mít všechny čtyři přísady a žádný z nich není pouze se salátem (tj. bez dalších přísad)?

(*M. Petrová*)

Z5–I–4

Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Z kolika kostiček je stavba slepena?



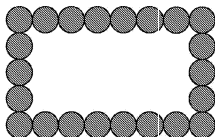
(*M. Krejčová*)

Z5–I–5

V pohádce o sedmero krkavcích bylo sedm bratrů, z nichž každý se narodil přesně rok a půl po předchozím. Když byl nejstarší z bratrů právě čtyřikrát starší než nejmladší, matka všechny zaklela. Kolik let bylo sedmero bratrům krkavcům, když je jejich matka zaklela?

(*M. Volfová*)

Z5–I–6



Janka a Hanka si rády hrají s modely zvířátek. Hanka pro své kavičky sestavila z uzávěrů od PET lahví obdélníkovou ohrádku, viz obrázek.

Janka ze všech svých uzávěrů složila pro ovečky ohrádku tvaru rovnostranného trojúhelníku. Poté ji rozebrala a postavila pro ně ohradu čtvercovou, rovněž ze všech svých uzávěrů. Kolik mohla mít Janka uzávěrů? Najděte aspoň 2 řešení.

(*M. Volfová*)

Zajímavé matematické úlohy

Otevíráme již 19. ročník naší pravidelné řešitelské rubriky „Zajímavé matematické úlohy“. V každém ročníku bylo dosud publikováno vždy deset úloh. V předchozích číslech našeho časopisu tak najdete již 180 zajímavých úloh. Upozorňujeme současně naše čtenáře, že kompletní soubor prvních 130 úloh této rubriky (včetně jejich úplných řešení) je možno nalézt v publikaci nakladatelství Prometheus „Sbírka netradičních matematických úloh“ autorů J. Švrčka a P. Calábka.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2011 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 181

Uvažujme trojúhelník ABC , v němž $|AB| = 5$ a $|BC| = 3$. Nechť ACD je rovnoramenný trojúhelník ACD vně připsaný straně AC trojúhelníku ABC , jehož velikost vnitřního úhlu proti základně AC je 40° . Určete velikost vnitřního úhlu β při vrcholu B v trojúhelníku ABC , pro niž má úsečka BD maximální délku.

Jožef Mészáros (Jelka)

Úloha 182

V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(z+x) = z^2x^2 + 1,$$

$$y(x+y) = x^2y^2 + 1,$$

$$z(y+z) = y^2z^2 + 1.$$

Jaroslav Švrček