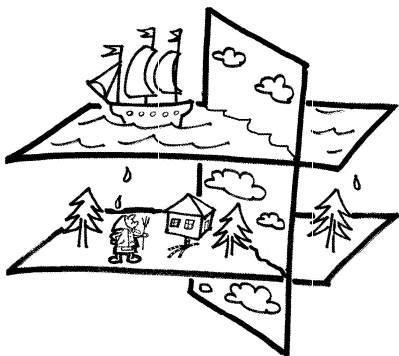


INFORMATIKA

Dimenze, algebra a geometrie

JANA KALOVÁ

Přírodovědecká fakulta JČU, České Budějovice



(Dokončení)

**Soustavy tří rovnic o třech
neznámých řešené ve 3D**

Příklad 6. Vyřešíme soustavu

$$x - 3z = -18,$$

$$6x + y + z = 30,$$

$$2x - 4y + 5z = 21.$$

Algebraické řešení

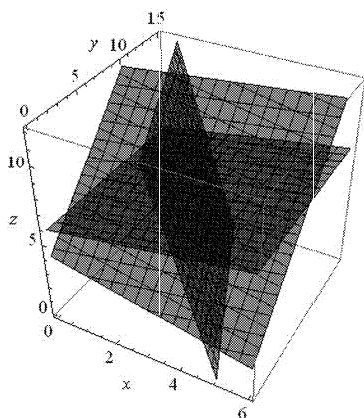
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -18 \\ 6 & 1 & 1 & | & 30 \\ 2 & -4 & 5 & | & 21 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -18 \\ 0 & 1 & 19 & | & 138 \\ 0 & -4 & 11 & | & 57 \end{pmatrix} \approx \\ \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -18 \\ 0 & 1 & 19 & | & 138 \\ 0 & 0 & 87 & | & 609 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -18 \\ 0 & 1 & 19 & | & 138 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \end{pmatrix}$$

dává jako výsledek jediné řešení [3; 5; 7]. Graficky představuje soustava zadaných rovnic tři různoběžné roviny, které se protínají v jediném bodě

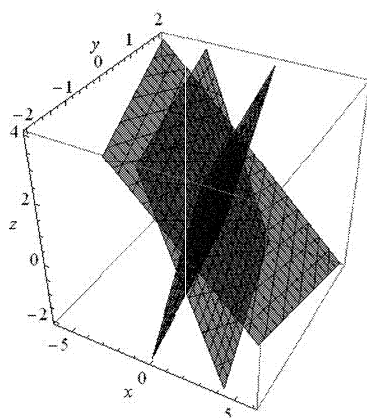
[3; 5; 7] (obr. 11), který je společným bodem průsečnic všech tří dvojic rovin zadané soustavy.

→ Zadání početního a grafického řešení v SW Mathematica:

```
Solve[{x-3z== -18, 6x+y+z==30, 2x-4y+5z==21}, {x, y, z}]
ContourPlot3D[{x-3z== -18, 6x+y+z==30, 2x-4y+5z==21},
{x, 0, 6}, {y, 0, 15}, {z, 0, 12}, AxesLabel->{x, y, z},
ContourStyle->Directive[Gray, Opacity[1]],
AxesStyle->Directive[18]]
```



Obr. 11 – Grafické řešení př. 6



Obr. 12 – Grafické řešení př. 7

Příklad 7. Vyřešíme soustavu

$$x + y + 2z - 4 = 0,$$

$$2x + y - z = 0,$$

$$4x + 3y + 3z = 5.$$

Algebraické řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -5 & -11 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ukazuje, že hodnost matice soustavy je 2, zatímco hodnost matice rozšířené je 3, takže daná soustava nemá žádné řešení. Grafickým znázorněním zadaných rovnic jsou tři různoběžné roviny, které se protínají v rovnoběžných průsečnicích (obr. 12) se směrovým vektorem $(3; -5; 1)$.

→ Zadání početního a grafického řešení v SW Mathematica:

```
Solve[{x+y+2z-4==0, 2x+y-z==0, 4x+3y+3z==5}, {x, y, z}]
ContourPlot3D[{2x+y-z==0, x+y+2z==4, 4x+3y+3z==5},
{x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -2, 3}, AxesLabel->{x, y, z},
ContourStyle->Directive[Gray, Opacity[0.6]],
AxesStyle->Directive[18]]
```

Příklad 8. Vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= -15, \\ -7x + 2y - z &= 2, \\ 3x + 4y - z &= 10. \end{aligned}$$

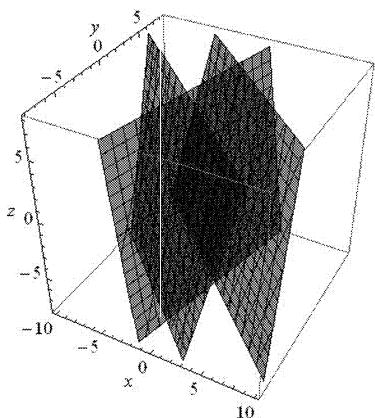
Algebraické řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & -15 \\ -7 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 10 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & -15 \\ 0 & 34 & -10 & -99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

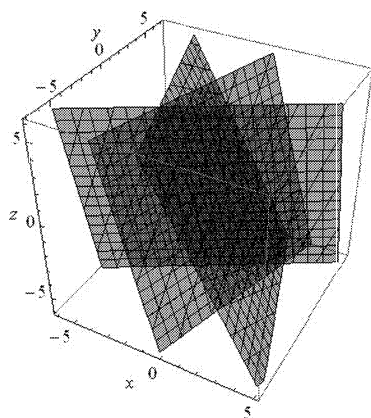
ukazuje, že hodnost matice soustavy je 2, zatímco hodnost matice rozšířené je 3, takže daná soustava nemá žádné řešení. Grafickým znázorněním zadaných rovnic jsou dvě rovnoběžné různé roviny, které třetí rovina protíná v rovnoběžných průsečnicích (obr. 13) se směrovým vektorem $(-1; 5; 17)$.

Zadání početního a grafického řešení v SW Mathematica:

```
Solve[{3x+4y+15==z, -7x+2y-2==z, 3x+4y-10==z}, {x, y, z}]
ContourPlot3D[{3x+4y+15==z, -7x+2y-2==z, 3x+4y-10==z},
{x, -8, 8}, {y, -8, 8}, {z, -6, 6},
AxesLabel->{x, y, z},
AxesStyle->Directive[18],
ContourStyle->Directive[Black, Opacity[0.3]]]
```



Obr. 13 – Grafické řešení př. 8



Obr. 14 – Grafické řešení př. 9

Příklad 9. Vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned} 4x + y + 2z &= 2, \\ -3x + 4y + z &= 3, \\ 2413x - 570y + 589z &= 95. \end{aligned}$$

Algebraické řešení

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 3 \\ 2413 & -570 & 589 & 95 \end{array} \right) &\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 19 & 10 & 18 \\ 0 & 4693 & 2470 & 4446 \end{array} \right) \approx \\ &\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 19 & 10 & 18 \\ 0 & 19 & 10 & 18 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ukazuje, že hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice je 2, takže daná soustava má řešení a to dokonce nekonečně mnoho, protože hodnost je 2, ale neznámé jsou 3. Graficky daná soustava rovnic představuje tři různoběžné roviny, které se protínají ve společné přímce (obr. 14) se směrnici $(7; 10; -19)$ a s parametrickým vyjádřením např.

$$x = 5/19 + 7t, \quad y = 18/19 + 10t, \quad z = -19t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

→ Zadání početního a grafického řešení v SW Mathematica: :

```
Solve[{4x+y+2z==2,-3x+4y+z==3,2413x-570y+589z-95==0},{x,y,z]}
ContourPlot3D[{4x+y+2z==2,-3x+4y+z==3,2413x-570y+589z-95==0},
{x,-10,10},{y,-10,10},{z,-6,6},
AxesLabel->{x,y,z},AxesStyle->Directive[18],
ContourStyle->Directive[Gray,Opacity[0.7]]]
```

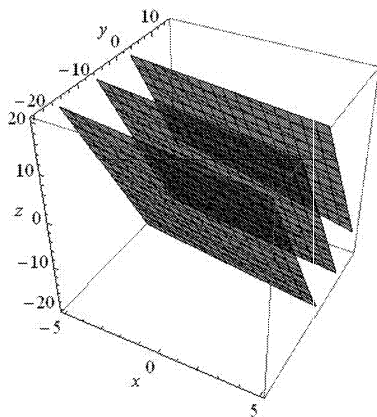
Příklad 10. Je dána soustava

$$x + 2y + z = 2,$$

$$x + 2y + z = -16,$$

$$x + 2y + z = 20.$$

Již bez počítání konstatujeme, že daná soustava nemá žádné řešení. Graficky jde o tři rovnoběžné různé roviny (obr. 15).



Obr. 15 – Grafické řešení př. 10

→ Zadání grafického řešení v SW Mathematica:

```
ContourPlot3D[{x+2y+z==2,x+2y+z==-16,x+2y+z==20}},
{x,-5,5},{y,-20,15},{z,-20,20},AxesLabel->{x,y,z},
AxesStyle->Directive[18],ContourStyle->{Gray}]
```

Závěr

Propojení více oblastí středoškolské matematiky patří mezi zajímavé, ale pro některé žáky náročnější partie výuky. V každém případě je však grafická vizualizace vhodnou součástí výuky o lineárních rovnicích a soustavách. V tomto článku byl k prezentaci zejména grafického řešení použit SW Mathematica, ale lze také použít jiný dostupný SW, např. svobodný CAS Maxima nebo (zejména pro grafickou vizualizaci) populární volně dostupný SW GeoGebra.

Poznámka redakce

V úvodu tohoto článku jsme četli poznámku, že ve Flatlandu byly ženy jako úsečky z jedné strany prakticky neviditelné. To však neplatí jen o Flatlandu a o Viktoriánské Anglii, ale podle autorky se s tím sekáváme i v podmínkách naší společnosti, např. když jde o obsazování vyšších funkcí.

Literatura

- [1] *Abbot, E. A.*: Flatland: A Romance of Many Dimensions. E.Reader Kindle Edition, Amazon.

Možnosti aktivizace studentů v webcastingovém prostředí

MILAN NOVÁK

Pedagogická fakulta JČU České Budějovice

Úvod

Jedním z novějších nástrojů, které za přispění informačních a komunikačních technologií (ICT) vedou k nalezení nových didaktických prostředků uspokojujících individuální výukové potřeby studentů, jsou webcastingové systémy. Zde již nejde o využití jednotlivých technických prostředků ICT, ale o integrované multimediální výukové útvary, v nichž se

tyto technické prostředky používají pro dosažení optimálního průběhu a výsledků výuky při plné aktivitě studentů právě zapojených do dané „výukové události“. Ve webcastingovém systému mohou spolupracovat všechny prostředky ICT, kterými lze prezentovat učivo a komunikovat s ostatními účastníky této výukové události, tj. též tištěné materiály, magnetofonové záznamy, počítačové programy na disketách, CD či v sítích, internetové informace, videokonference, telefonická či faxová spojení, e-mail a případně televizní či rozhlasové přenosy [4].

Webcastingové výukové útvary jsou složeny ze dvou paralelních částí. První část obsahuje audiovizuální záznamy, v druhé části dochází k zobrazování z doprovodných médií v podobě statických obrazů, animací či textů popřípadě dalších výukových objektů. Aktivizace druhé části je přímo spjata s aktuální pozicí přehrávaného audiovizuálního záznamu v části první a umožňuje tak poskytnutí detailnějšího výkladu vyučovaného tématu.

Takto koncipovaný didaktický prostředek v podobě webcastingového systému rozšiřuje možnosti výuky zejména v předmětech jakými je fyzika nebo technická výchova. Umožňuje například přivést k žákům obtížně realizovatelné simulace nebo pokusy fyzikálních jevů s možností jejich detailnějšího popisu v podobě definicí, vzorců doplněné o interaktivní prvky. Aby webcastingový systém přinesl opravdu nové a efektivní možnosti do výuky uvedených předmětů, musí splňovat důležité požadavky, které lze charakterizovat jako soubor nástrojů a jejich vlastností, které vedou nebo zvyšují aktivizaci žáků.

Na trhu lze využívat několik takovýchto systémů, které více či méně následovně uvedenými prvky aktivizace studentů disponují. Jedná se především o systémy Adobe Connect, Accordent Media Management System (AMMS) nebo WVC vyvíjený na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích.

Webcastingové systémy – nositelé audiovizuálního sdělení

Aktivita a komunikace studenta, jako subjektu vzdělávacího procesu, je základní tezí pedagogické psychologie a pedagogiky a také jednou ze základních podmínek rozvoje osobnosti. Běžná audiovizuální projekce však aktivitu diváka a posluchače nepodporuje. Informace jsou vysílány pouze jedním směrem, bez možnosti kontroly a diagnózy studentova učení a tím i bez možnosti nějaké regulace učení. Navíc toto učení probíhá v konstantním tempu, které může být pro někoho pomalé, pro jiného zase rychlé, což

částečně znehodnocuje jeho účinek a navíc klade vyšší nároky na předvídavost tvůrců programů [2].

Webcastingové systémy řeší oba tyto problémy, aktivizaci studentů zapojením zpětnovazební komunikace i nastavení tempa učení podle individuálních potřeb každého účastníka akce.

Aktivizační prvky

Základními aktivizačními prvky webcastingového prostředí mohou být interaktivní komunikační nástroje v podobě jednoduchého chatu, aktivních internetových odkazů, interaktivních animací nebo jejich vzájemných kombinací. Přestože tyto různorodé možnosti v kombinaci výukových objektů zvyšují efektivitu výukového materiálu, důležitou roli hraje interaktivita komunikačních nástrojů. To lze ve webcastingových výukových dokumentech přirovnat k realizaci interaktivní zpětné vazby. Již ze samotné technologické podstaty webcastingových systémů vyplývá, že lze realizovat jak vnější zpětnou vazbu, tak i vnitřní zpětnou vazbu.

Realizaci vnější zpětné vazby lze docílit prostřednictvím interaktivních nástrojů webcastingového systému, které umožňují překonání lidských limitů v rychlosti předávání a zpracování velkého množství zpětnovazebních informací současně se zajištěním odpovídající kvality a frekvence.

Vnitřní zpětná vazba představuje základní prostředky autokontroly a autoregulace při učení. Jejím prostřednictvím dostává žák informace o průběhu své učební činnosti a jejích výsledcích, které mají významný vliv na kvalitu procesu osvojování poznatků a činností i na vytvoření motivačních stimulů a hodnotících vztahů. Tato zpětná vazba je významným prostředkem autokontroly, zejména při asynchronní podobě výukové události. Hovoří se také o poskytování výukových materiálů na vyžádání.

Nástrojem zajišťujícím možnost vnitřní zpětné vazby ve webcastingovém prostředí je především oblast doplňkových médií, která je určená k zobrazování výukových objektů. Výukovými objekty jsou obrázky, text, odkazy, animace atd. Dochází zde k přímému působení na tyto objekty a tím i k aktivizaci žáka zejména při jeho samostudiu. Důležitými aktivizujícími objekty jsou interaktivní odkazy, které umožňují řízení toku audiovizuálních informací v závislosti na adekvátní reakci žáka. Možnost rychlého posunu v audiovizuálním záznamu prostřednictvím odkazů lze z historického hlediska přirovnat k tzv. alternativním videoprogramům. Ty vycházejí z předpokladu, že aktivitu diváka je nutné rozvinout formou zpětnovazebné komunikace percipienta s programem (1, s. 227). Hovoří

se o koncepci audiovizuálního programu ve stylu programovaného učení a existence zpětné vazby se řeší speciální funkcí technického prostředku, kterým byl videomagnetofon, umožňující automatické vyhledávání předvolených bloků záznamu.

Jak z uvedeného vyplývá druh zpětné vazby je přímo vázán na to, zda se jedná o synchronní nebo asynchronní výukové události. U asynchronních událostí se může jednat především o nejrůznější záznamy složitých pokusů a simulací fyzikálních jevů. Žák má tyto výukové materiály k dispozici na vyžádání, kdekoliv má přístup k počítači s internetovým připojením. V opačném případě, tj. při živé výuce, jsou aktivizační prvky omezeny na přímou zpětnou vazbu ve formě interaktivní komunikace prostřednictvím komunikačních nástrojů nebo přímou reakcí učitele, který je součástí audiovizuálního přenosu. Tato forma se shoduje s aktivizačními metodami klasické výuky.

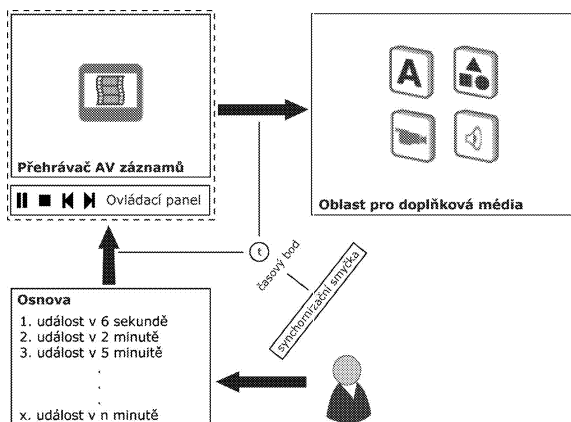
Silným prvkem aktivizace je samotný výukový styl, který je podporován dalšími multimediálními výukovými objekty. Učitel přímo vlastním působením ovlivňuje aktivitu diváka společně za podpory zpětnovazebné komunikace se žákem.

Inovativní řešení webcastingu

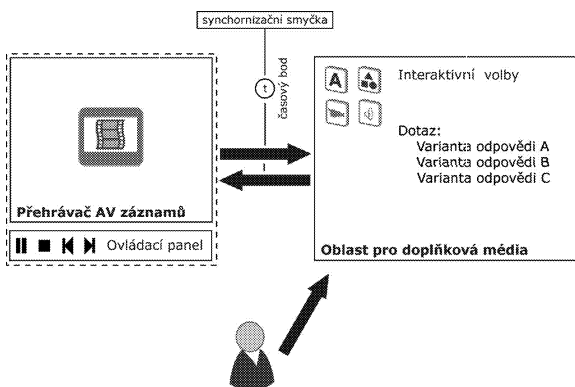
Jak již bylo naznačeno v předchozí kapitole, v rámci vnější zpětné vazby webcastingový systém přináší inovativní řešení zejména v rychlosti, flexibilitě a jednoduchosti zpracování audiovizuálních dat. Nabízí se minimálně dvě základní formy, jak více aktivizovat žáka při výuce s využitím webcastingového systému:

- Forma *rychlého* průchodu webcastingovým výukovým materiálem.
- Forma *interaktivního* průchodu webcastingovým výukovým materiálem.

Na obrázku (obr. 1) je ilustrován první uvedený způsob. Této formy lze dosáhnout prostřednictvím tzv. scénáře, který představuje osnovu reprezentovanou základními časovými body, které odpovídají zvolené události v audiovizuálním záznamu. Může se jednat zejména o důležité pasáže výuky. Například při klasické přednášce jsou tyto body osnovy vytvářeny v momentě přechodu na nový snímek prezentace v MS PowerPoint. Přechod na konkrétní bod v daném čase, se uskutečňuje na základě interaktivní volby, což není nic jiného než kliknutí na konkrétní bod osnovy. Tím dojde k okamžitému přesunutí na požadovaný časový bod synchronizační



Obr. 1



Obr. 2

smyčky přehrávače AV záznamů. S přesunem v audiovizuálním záznamu se zobrazí odpovídající materiály v oblasti doplňkových médií.

Druhý způsob (obr. 2) využívá interaktivních prvků doplňkových materiálů umístěných v oblasti pro doplňková média. Tato varianta nabízí dvě možnosti uplatnění, které vycházejí ze dvou typů interaktivity.

První typ je založený na *sociální podstatě interakce*. Hovoří se o mezilidské interakci prostřednictvím technologií. Označuje se také jako počítačem

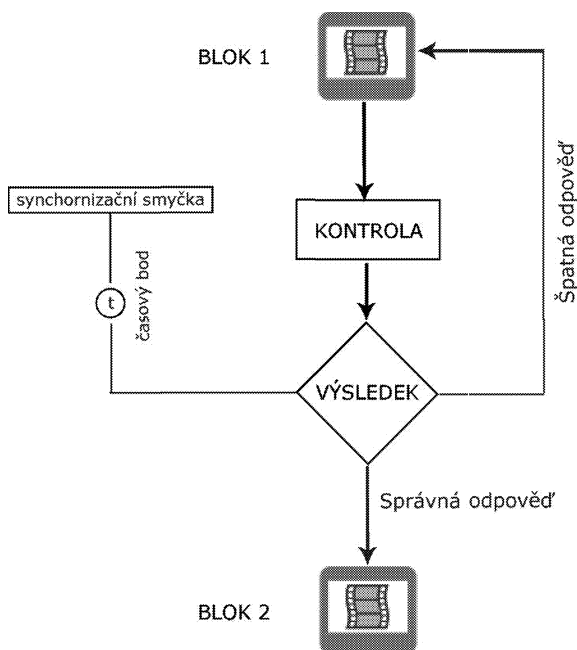
zprostředkovaná komunikace. Příkladem tohoto typu jsou chatovací nebo videokonferenční místnosti, diskusní fóra nebo sdílené aplikace. Tato forma interakce je realizována hlavními komunikačními nástroji, které jsou součástí webcastingových systémů. Tento přístup lze využít při synchronní výukové události, kdy vyučující přímo klade respondentům otázku, na kterou reagují formou interaktivní volby v oblasti doplňkových materiálů. Výsledkem je zobrazení adekvátního ohodnocení, které provádí samotný systém na základě vytvořeného scénáře.

Druhý typ interakce je založený na *technické podstatě interakce*, která je představována komunikací člověka s technickým prostředkem, což je v tomto případě počítač. Příkladem je vzdělávací software, virtuální mikrosvět, simulace atd. Tato forma interakce nelze přímo realizovat webcastingovým systémem, ale vyžaduje promyšlené výsledné zpracování záznamu výukové události. O tomto způsobu se hovoří také jako o tzv. *simulované komunikaci* s divákem [2, s. 55] a lze jej využít i v asynchronní podobě výukové události.

Simulovaná komunikace ve webcastingových materiálech na vyžádání umožňuje rozšíření možností aktivizace. Jedná se především o přímý posun v audiovizuálním záznamu podle odpovědi studenta, které automaticky vyhodnotí systém. Dochází k aktivizaci žáka na základě otázek, které klade vyučující přímo v audiovizuálním záznamu popřípadě v jejich textovém přepisu v oblasti doprovodných médií. V původním pojetí simulované komunikace byl vždy ponechán časový prostor pro zodpovězení kladených otázek. U starších audiovizuálních výukových prostředků mohla být tato volba hodnocena velmi omezeně, protože se jednalo pouze o studentovu sebereflexi a autoregulaci [4]. Webcastingový systém v této aktivizující alternativě nabízí rozšiřující možnost v podobě přímého ovládání audiovizuálního záznamu v závislosti na druhu odpovědi.

Nedochází zde k pouhému zobrazení správné odpovědi ve vymezeném časovém prostoru, ale k přímé reakci systému v závislosti na vědomostech žáka, které se snaží uplatnit. Tato varianta bere ohled na skutečné výsledky činnosti žáka. Uyučující položí otázku, na kterou student musí reagovat prostřednictvím interaktivní volby. Dokud žák nezvolí libovolnou variantu nebo jejich kombinaci, je audiovizuální záznam pozastaven, čímž se vytváří libovolně dlouhá pauza pro adekvátní reakci. V závislosti na výsledku zvolené varianty může dojít k individuálnímu rozhodnutí systému o dalším postupu v průchodu výukovým materiálem. Dochází k podsunutí adekvátní alternativy a tento způsob umožňuje individuální tempo

při průchodu výukovým materiálem každého jedince. V nejjednodušším modelovém příkladu může systém reagovat následovně (obr. 3).



Obr. 3

- *Správná odpověď* – dojde k pokračování prezentace výukového materiálu, audiovizuální záznam se automaticky spustí, popřípadě dojde k přesunutí na pozici danou časovým bodem a nadále probíhá synchronizace s doplňkovými materiály.
- *Špatná odpověď* – dojde k automatickému přesunutí výukového materiálu zpět na pozici určenou časovým bodem a blok prezentace bude probíhat opakovaně až po dosažení kontrolního testu.

Pokud webcastingový systém umožňuje realizovat tento přístup, průchod webcastingovým materiálem se děje podle úrovně vědomostí a tím potvrzuje teoretické předpoklady, že možnost volby a existence vnitřní zpětné vazby významně přispívá k aktivizaci studenta [1, s. 241].

Velmi důležitou součástí webcastingového systému je vyhledávání konkrétních částí záznamu v závislosti na zadání vyhledávaného slova či slovního spojení. Tato možnost poskytuje rychlý přístup ke konkrétním informacím, které představují jednak část doplňkových materiálů, ale také samotný audiovizuální záznam. Silnou stránkou tohoto nástroje je to, že na základě výsledku zadaného vyhledávacího výrazu dojde k vyhledání konkrétního bloku audiovizuálního záznamu a po kliknutí na vyhledaný odkaz dojde k přesunutí na tento konkrétní blok. K vyhledávání dochází jednak v rámci konkrétního výukového webcastingového materiálu nebo v celém nabízeném seznamu webcastingového systému.

Závěr

Uvedené aktivizační mechanismy ve webcastingových systémech jsou důležitým kritériem při jejich výběru a následné implementaci do širokého spektra vzdělávacích institucí. Jejich splnění přispívá k efektivnímu nasazení a využívání ve výuce. Naopak jejich absence může vést k pouhému vynaložení finančních prostředků bez náležité návratnosti, protože výrazně výuku neobohatí. Pro vlastní odzkoušení funkčnosti webcastingového systému lze využít systém WVC provozovaný na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. (<http://wvc.pf.jcu.cz/wvcone/>) Nebo lze také využít bezplatné zkušební verzi systému Adobe Connect. (<http://www.adobe.com/products/adobeconnect.html>)

L i t e r a t u r a

- [1] *Macek, Z.*: Alternativní videoprogramy. Vysoká škola, 1.1.1986, roč. 34, č. 5.
- [2] *Mašek, J.*: Videotechnika ve výuce. 1. vyd., Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň 1993.
- [3] *Šimek, J.*: Konstrukce výukového videoprogramu typu interaktivní přednáška. Ústav rozvoje vysokých škol MŠ ČSR, Praha 1988.
- [4] *Zlámalová, H.*: Principy distanční vzdělávací technologie a možnosti jejího využití v pedagogické praxi na technických vysokých školách. Centrum distančního vzdělávání, 2002. Dostupný z WWW: <<http://icosym.cvut.cz/telel/zlamalova.html>>.