

Mezinárodně povinné úlohy v národním kole soutěže Bobřík informatiky 2010

JIRÍ VANÍČEK

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

(Dokončení)



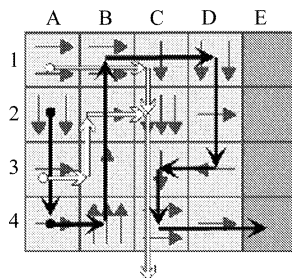
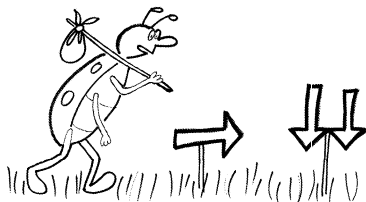
Řešení úloh

V článku jsme představili 12 úloh; všech devět, které všechny pořádačské státy povinně zařadily do svých testů, a navíc tři z úloh, které jsme vybrali do českého národního kola.

Některé z hypotéz zde uveřejněných chceme zkoumat i v následujících ročnících soutěže. Mezi ně patří, zda nejtěžšími úlohami jsou ty, u nichž je k řešení potřeba porozumět symbolickému zápisu, a zda s věkem roste úspěšnost v řešení téže úlohy. Věříme, že tyto poznatky by mohly pomoci při inovaci národního kurikula předmětu informatika a ICT. Hlavním naším cílem však je, aby se žáci dobře bavili nad chytrými úlohami a zdravě si zasoutěžili.

Brouk a jeho pouť

Z pole A1 se brouk do cíle nedostane: $A1 \rightarrow C1 \rightarrow C2 \rightarrow C5$ mimo tabulku (viz obrázek). Odpovědi, v nichž je A1, jsou tedy špatné. Zbývají možnosti A2, A4 a A2, A3, A4. Ty se liší políčkem A3, zkontrolujeme tedy start v políčku A3: $A3 \rightarrow B3 \rightarrow B2 \rightarrow C2 \rightarrow C5$ mimo tabulku. Z A3 se nelze dostat do cíle. Správná odpověď je A2, A4 (kontrola: vycházíme



Obr. 1R Brouk a jeho pouť

z $A4 \rightarrow B4 \rightarrow B1 \rightarrow D1 \rightarrow D3 \rightarrow C3 \rightarrow C4 \rightarrow E4$; vycházíme-li z $A2 \rightarrow A4$ a dál je to stejné).

$0X$

Podle první instrukce má kurzor dojet až před **X** a místo mezer psát **0**. Po vykonání první instrukce bude řádek vypadat:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |X -----

Podle druhé instrukce má kurzor jet zpět na začátek řádku. Přitom má vždy nahradit **0** za **X** (přitom poskočí o 1 místo vpravo) a poskočit o 2 místa vlevo. To znamená, že při každém kroku se vymění **0** za **X** a kurzor se posune o 1 místo doleva. Nahradí tak všechny **0** znaky **X** (kromě první nuly zleva, tu již nahradit nestihne), správná je tedy odpověď D.

Natírání dveří

Dveře na poli (4, 3) jsou tmavé. Natěrač je obarví na bílo a má obarvit všechny 4 sousední dveře (oboje vedlejší a dveře pod a nad), pokud jsou tmavé. Okolo dveří (4, 3) jsou jen jedny tmavé dveře – nalevo: (4, 2). Natěrač obarví tyto dveře a má obarvit 4 okolní.

Okolo dveří (4, 2) jsou dvojce tmavé dveře – nalevo (4, 1) a nahoře (5, 2). Má tedy vykonat dvě procedury: Natři(4, 1) a Natři(5, 2).

Natěrač obarví dveře (4, 1). Okolo těchto dveří již nejsou žádné tmavé dveře, takže Natři(4, 1) skončí. Natěrač obarví dveře (5, 2) a také skončí (okolo také nejsou tmavé dveře). Celkem natěrač obarvil čtvery dveře: (4, 3), (4, 2), (4, 1), (5, 2). Správně je C.

Kdo snědl džem?

Kuba a Mates tvrdí opak: Kuba říká, že džem nesnědl, Mates říká, že Kuba džem snědl. To znamená, že pouze jeden z nich mohl mít pravdu. Protože pouze jedno tvrzení smí být pravdivé, Pavel musel lhát. Protože tvrdil, že je nevinný, ve skutečnosti **džem snědl Pavel**.

(Zkouška: Potom Kuba nemohl džem sníst, je nevinný a mluvil tedy pravdu. Mates tedy lhal, Kuba džem nesnědl. Pouze Kubova odpověď je pravdivá, Pavel a Mates lhali.)

Ke správnému řešení se lze dobrat i jinou cestou – tím, že projdeme všechny možnosti (jsou jen tři):

1. Jestliže džem snědl Mates, Pavel i Kuba mluvili pravdu, že jsou nevinní, ale pravdu směl mít pouze jeden. Je tu rozpor, Mates džem nesnědl.
2. Snědl-li džem Kuba, měl pravdu Pavel (že je nevinný) i Mates (že džem snědl Kuba). Jsou zde dvě pravdivé odpovědi a to je rozpor se zadáním.
3. Pokud džem snědl Pavel, mluvil pravdu pouze Kuba (totiž že je nevinný). Mates lhal, že Kuba snědl džem, a Pavel lhal o své nevině. Jedna odpověď je správná, toto je správné řešení.

Funkce KDYŽ

Ptáme se na hodnotu funkce $\mathbf{KDYŽ}(A > B; A; \mathbf{KDYŽ}(B < C; C; B))$. Neplatí $A > B$, takže funkce $\mathbf{KDYŽ}$ vybírá druhou hodnotu (podtrženou). Tato hodnota je hodnotou funkce $\mathbf{KDYŽ}(B < C; C; B)$. Platí $B < C$, funkce vybírá první hodnotu a tou je hodnota C . Protože $C = 5$, správný výsledek je 5.

Dlaždění

Podle grafu má mít každá dlaždice 6 sousedů. Správná odpověď je B. Na této fotografii mají dlaždice pouze 4 sousedy (pokud bychom brali dotyk i ve vrcholu, pak mají 8 sousedů). Na ostatních mají dlaždice po šesti sousedech.

Zavlažovací systém

Strom může být zalit vodou z levé nebo z pravé nádrže. Aby se strom zalil vodou z pravé nádrže, musí být oba kohouty **C** i **D** otevřeny. Ani v jedné nabízené odpovědi nejsou otevřeny oba kohouty **C** i **D**, z pravé nádrže tak nemůže být strom zalit.

Aby se strom napojil vodou z levé nádrže, musí být otevřen kohout **B** a zavřen **A** (jinak jím voda z prostřední nádrže vyteče pryč). Správně je C.

Řazení karet

Je třeba pěti tahů. Představujeme jedno z možných řešení, tahy v daných krocích jsou vyznačeny tučně:

4 2 6 5 3 $\rightarrow$ **2 4 6 5 3** $\rightarrow$ **2 4 6 3 5** $\rightarrow$ **2 4 3 6 5** $\rightarrow$ **2 3 4 6 5** $\rightarrow$ **2 3 4 5 6**

K přesunutí **2** z druhého na první místo je třeba 1 tah, k přesunutí **3** z pátého na druhé místo 3 tahy. Pak je nutno přehodit pořadí **5** a **6**, což je další 1 tah.

Sloupec talířů

U řešení C jsou talíře položeny tak, jako by fronta žáků stála obráceně.

Kanoie na jezeře

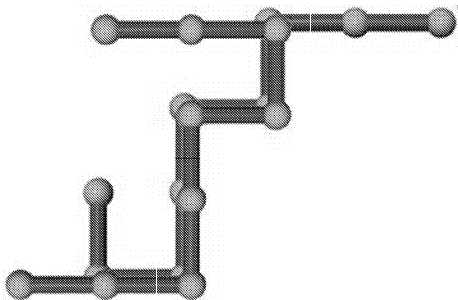
Správně je A. Odpověď B ukazuje na chybu, kdy kanoista přeskočil 2. pravidlo. Odpověď C by byla správně, kdyby kanoista podle 1. pravidla odbočoval vpravo. Odpověď D ukazuje na průchod po řádcích, po úrovních (nejprve projel nejbližší jezera).

Ranní běh

Mirek uběhne $3 \cdot 4 \cdot 100 = 1200$ kroků.

Potrubí

Správně je 5 (viz obrázek).



Obr. 8R Potrubí

Závěrečná poznámka redakce MFI

Recenzenti měli připomínky k formulaci zadání některých úloh, ostatně i naši čtenáři měli možnost se nad nimi zamýšlet. Po dohodě s autorem

jsme však úlohy otiskli v autentickém znění tak, jak je čeští soutěžící ze základních a středních škol dostali, protože soutěž již proběhla. Vznikla jen otázka, nemělo-li u následujících úloh ne právě zcela jasné zadání vliv na úspěšnost našich soutěžících.

0X

- 1) Pod „před X“ se, jak patrně z řešení, ve skutečnosti míní „bezprostředně před X“.
- 2) V kontextu úlohy, kde se manipuluje s kurzorem, není samozřejmé, že po zapsání znaku se kurzor automaticky posune o jedno místo za zapsaný znak.

Natírání dveří

Pokoj je zprvu určen dvojicí (*patro, dveře*), takže není jasné, co se později míní pod „pokoj –1“, resp. „pokoj +1“. Z řešení se zdá, že *pokoj* pak splývá s *dveřmi*.

Ranní běh

Zde mohlo řešitele mást, že aktivitou *Přeběhni_ulici* se nemíní přechod přes ulici. (Možná se tu projevil vliv slovenštiny, česky by lépe znělo *proved aktivitu Přeběhni_ulicí*.)

L i t e r a t u r a

- [1] *Vaníček, J.*: Bobřík informatiky – soutěž žáků a studentů v informatice. MFI, r. 18 (2008/09), č. 9, s. 548–558.
- [2] *International Bebras Committee*: Participating countries [online]. In: Bebras, International Contest on Informatics and Computer Fluency Web [cit. 2011-05-20]. Dostupné na [www: <http://www.bebas.org/en/countries>](http://www.bebas.org/en/countries)
- [3] *Jonaityte, I.*: Statistics of Bebras 2010 Mandatory Tasks. Informatics Fundamentals and Computer Fluency Conference. Druskininkai, Litva, 12. 5. 2011.
- [4] *Tomcsányi, P.* – *Vaníček, J.*: International comparison of problems from an informatics contest. In: Mechlová, E., Valchař, A. (eds.): Information and communication technology in education '09. Ostrava: Ostravská univerzita, 2008. s. 219–223.
- [5] Bobřík informatiky, web soutěže [online]. Dostupné na [www: <http://www.ibobr.cz>](http://www.ibobr.cz)

(Autorkou ilustrace je Mgr. Jaroslava Čermáková)

Úpravy goniometrických výrazů v programu Jasympca

MICHAL ČIHÁK

Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta

1. Úvod

V současné době existuje poměrně velké množství počítačových programů pro symbolické výpočty v matematice, které jsou označovány jako *Computer Algebra Systems (CAS)*. Z celosvětově nejznámějších jmenujme například systémy *Mathematica*, *Maple*, *Mathcad* a *Symbolic Math Toolbox for Matlab* (dříve *MuPAD* – více viz [1]). Jedná se o profesionální komerční programy, které využívají vědecké a vzdělávací instituce po celém světě. Mnohé jejich funkce lze využít i ve výuce matematiky a fyziky na střední škole. Problémem ale mohou být poměrně vysoké finanční náklady na pořízení tohoto druhu software, které se pohybují zhruba od 2 000 Kč výše za jednu studentskou licenci, až po několik desítek tisíc korun za licenci profesionální. I vzhledem k ceně jsou v našich podmínkách běžnější systémy *Derive* a *TI-InterActive*, které byly v minulých letech zakupovány, resp. doporučovány pro střední školy.

Jinou možností může být využití některého z nekomerčních systémů. I zde je z čeho vybírat, je ale třeba vzít v úvahu, že jednotlivé programy se často výrazně liší množstvím zabudovaných funkcí, propracovaností uživatelského rozhraní a možnostmi grafického výstupu. Například systémy *Reduce*, *Maxima* a *Axiom* za sebou mají již přibližně 40 let vývoje, což je znát zejména na množství jimi nabízených knihoven funkcí. Tyto programy ale mohou být pro začátečníka (studenta střední školy) trochu nepřehledné. Pro potřeby výuky matematiky na střední škole lze dobře využít i jednodušší systémy. Mě osobně se osvědčil program *Jasympca*. Domácí stránky projektu lze nalézt na internetové adrese:¹

<http://webuser.hs-furtwangen.de/~dersch/jasympca2/>

¹ Pokud se vám nechce opisovat adresu webových stránek do prohlížeče, zkuste je vyhledat pomocí některého z internetových vyhledávačů (například Google) zadáním hesla *Jasympca*.

Jsou k dispozici v německé a anglické verzi. Samotná aplikace je vytvořena v programovacím jazyce Java, v čemž spatřuji jednu z jejich největších výhod. Lze s ní totiž pracovat všude tam, kde je k dispozici prostředí pro spouštění Java aplikací (přesněji Java-Runtime prostředí verze 1.5 a novější). V praxi to znamená, že ji můžete spustit například online v běžných internetových prohlížečích v podobě Java Appletu bez nutnosti jakékoliv instalace. Příznivci přenosných zařízení (PDA, Smartphone a další) si mohou aplikaci stáhnout na své zařízení a zde ji plnohodnotným způsobem provozovat. V současné době, kdy má různá mobilní zařízení k dispozici mnoho studentů, se jedná o velmi zajímavou a užitečnou možnost jejich využití.

Podívejme se nyní, jak vypadá běžná práce s aplikací Jasymca. Vyzkoušet si ji můžete nejnázne přímo na domácích stránkách projektu (viz výše). Ihned po zobrazení stránek se automaticky načte Java applet a zobrazí se uživatelské rozhraní aplikace. Rozhraní je velmi jednoduché, v jeho dolní části se nachází vstupní řádek pro zadávání příkazů a dvě tlačítka pro pohyb dozadu a dopředu v historii dříve zadaných příkazů. Zkuste do vstupního řádku zapsat například výraz `factorial(100)` a potvrďte klávesou Enter. V hlavním okně programu se vám zobrazí následující text:

```
>> factorial(100)
ans = 9.3326E157
```

Na prvním řádku vidíte výraz $100!$, který jste zadali. Na druhém řádku je tento výraz vyjádřený v exponenciálním tvaru $9,3326 \cdot 10^{157}$ s přesností na 5 platných číslic. Zkuste pro srovnání určit hodnotu stejného výrazu pomocí některého z běžných kapesních kalkulátorů. Většina z nich si s ním neporadí a ohlásí chybu.

Pokud se vám zdá přesnost výpočtu na 5 platných číslic malá, můžete ji zvětšit na 16 platných číslic příkazem `format(long)`, který zapíšete opět do vstupního řádku ve spodní části aplikace (nezapomeňte potvrdit klávesou Enter). Poté můžete zkusit znovu zadat výraz `factorial(100)`:

```
>> factorial(100)
ans = 9.332621544394418E157
```

Poznamenejme, že výraz `factorial(100)` nemusíte znovu opisovat do vstupního řádku, stačí když se k němu vrátíte v historii dříve zapsaných

příkazů několikanásobným kliknutím na tlačítko se symbolem <, které se nachází vpravo vedle vstupního řádku. Podobně se můžete vrátit ke kterémukoliv z dříve zadaných příkazů, podle potřeby jej upravit a pak potvrdit klávesou Enter. Zkuste si takto spočítat například přibližnou hodnotu výrazu $1000!$. Pokud chcete nastavit přesnost zobrazení reálných čísel na původních 5 platných číslic, použijte příkaz `format(short)`.

Možná vás napadlo, zda by bylo možné určit hodnotu výrazu $100!$ ještě přesněji. Zkuste zadat výraz `factorial(rat(100))` a výsledek vás možná překvapí:

```
>> factorial(rat(100))
ans = 933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929
638952175999932299156089414639761565182862536979208272237582511852
1091686400000000000000000000000000000000
```

Program určil hodnotu výrazu $100!$ zcela přesně. Výsledné číslo má 158 cifer. Funkce `rat()`, použitá v předchozím příkladu, způsobila změnu formátu, ve kterém je číslo 100 uloženo v paměti programu Jasympca, na *exact rational*. Výsledky výpočtů s takto uloženými čísly nejsou zaokrouhlovány, ani vyjadřovány v exponenciálním tvaru. Zkuste podobným způsobem vypočítat například hodnotu výrazu $1000!$.

Předchozí krátká ukázka měla posloužit pro naznačení možností, kterými program disponuje. Kromě počítání s velkými čísly² nabízí i výpočty s komplexními čísly, vektory a maticemi, dále symbolické výpočty s polynomy, řešení různých typů lineárních i nelineárních rovnic a jejich soustav, derivování, hledání primitivních funkcí, výpočty určitých integrálů a řešení některých typů diferenciálních rovnic. Zajímavé jsou i grafické možnosti programu, které, mimo jiné, zahrnují vykreslování grafů funkcí. Pro zkušenější uživatele může být velkým přínosem, že Jasympca má i svůj vlastní zabudovaný programovací jazyk s velmi jednoduchou syntaxí.

Mnohé funkce programu se přímo nabízí pro využití při výuce matematiky na střední škole. Mě osobně zaujala možnost úprav a zjednodušování algebraických výrazů, výrazů s exponenciálními a logaritmickými funk-

²Samozřejmě i počítání s čísly ve formátu *exact rational* má své hranice, které jsou dány hlavně množstvím operační paměti, které má program Jasympca k dispozici. Nicméně jeho možnosti výrazně překračují hranice, kterých dosahují běžné kapesní kalkulatory.

cemi a goniometrických výrazů. A právě schopnosti programu v poslední jmenované oblasti jsem se rozhodl trochu podrobněji prověřit.

2. Jasymca a goniometrické výrazy

Z vlastní praxe vím, že úpravy goniometrických výrazů činí studentům středních škol často poměrně značné problémy. Ty jsou dány hlavně velkým množstvím vzorců, které se při jejich úpravách užívají. S tím samozřejmě souvisí problém, že je pro studenty často těžké při pohledu na zadaný výraz dopředu odhadnout vzorec, který povede k jeho zjednodušení. Mám v živé paměti, jak moji studenti „bojovali“ například s některými goniometrickými výrazy ze známé sbírky úloh [3]. Na straně 45 této sbírky jsou v úlohách 46 a 47 zadány různé goniometrické výrazy ke zjednodušení. Postupně jsem zkusil jednotlivé výrazy zjednodušit pomocí funkce `trigrat()`, která je pro tento účel k dispozici v programu Jasymca. Většinu zadaných výrazů funkce zjednodušila tak, jak bychom to na střední škole očekávali od studentů. Níže uvádím několik vybraných příkladů.

Úloha 1: Zjednodušte následující výrazy:

$$\begin{array}{ll} \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x & (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x \\ \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} & \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\ \sin^2 x \cdot \cot g^2 x + \sin^2 x - 1 & \end{array}$$

Řešení této úlohy v programu Jasymca může vypadat například takto:

```
>> syms x
>> trigrat(sin(x)*cos(x)^2 + sin(x)^3)
ans = sin(x)
>> trigrat((sin(x)+cos(x))^2 - 2*sin(x)*cos(x))
ans = 1
>> trigrat(cos(x)/(1-sin(x)) + cos(x)/(1+sin(x)))
ans = 2/cos(x)
>> trigrat(tan(x)/(1+tan(x)^2))
ans = 1/2*sin(2*x)
>> trigrat(sin(x)^2/tan(x)^2 + sin(x)^2 - 1)
ans = 0.0
```

V předchozím výpisu jsou vždy za znaky `>>` uvedeny příkazy, které jsem postupně zadával do vstupního řádku aplikace. Výsledné výrazy (po zjednodušení) jsou uvedeny vždy za sekvencí `ans =`. Prvním příkazem `syms x`

sdělíme programu, že písmenem x budeme označovat symbolickou proměnnou. Dále již následují jednotlivé příklady. Všimněte si, jakým způsobem se zapisují operace násobení, dělení a umocňování – podobnou syntaxi jako Jasmca používají i jiné programy pro symbolické matematické výpočty. Také jste si asi všimli, že ve výpisu není nikde použita funkce $\cotg x$. Je to proto, že tato funkce není v systému Jasmca vůbec definována. To však nepřináší žádné funkční omezení, pouze trochu krkolomnější zápis, neboť ji samozřejmě můžeme nahradit funkcí $1/\operatorname{tg} x$.

Dále jsem zkusil pomocí programu Jasmca zjednodušit výrazy uvedené v úlohách 56 a 57 na straně 47 sbírky [3]. Při zjednodušování těchto výrazů je studentům doporučeno využít součtové vzorce nebo vzorce pro součet a rozdíl hodnot goniometrických funkcí. Níže opět uvádím několik příkladů na ukázkou.

Úloha 2: Zjednodušte následující výrazy:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

```
>> trigrat(cos(pi/2-x))
ans = sin(x)
>> trigrat(sin(x+pi/4))
ans = 1/2*Root([-2 0 1], 0)*sin(x)+1/2*Root([-2 0 1],0)*cos(x)
>> trigrat(sin(x+pi/6)-sin(x-pi/6))
ans = cos(x)
```

Trochu mě zarazil výsledek zjednodušení výrazu $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, který na první pohled vypadá dosti nesrozumitelně. Pokud si ale na místě výrazu $\operatorname{Root}([-2 \ 0 \ 1], 0)$ představíme výraz $\sqrt{2}/2$, získáme výsledek $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$, který je správný. Trochu záhadný výraz $\operatorname{Root}([-2 \ 0 \ 1], 0)$ zřejmě vyjadřuje Jasmcou používaný zápis úlohy určit kořeny kvadratické rovnice $-2x^2 + 0x + 1 = 0$.

Nakonec jsem zkusil zjednodušit ještě výrazy z úlohy 52 na straně 46 a z úlohy 69 na straně 48 sbírky [3]. Při zjednodušování těchto výrazů se nabízí využití vzorců pro dvojnásobné nebo poloviční argumenty goniometrických funkcí. Zde je několik příkladů na ukázkou.

Úloha 3: Zjednodušte následující výrazy:

$$\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} \qquad \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \qquad 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \qquad \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

```
>> trigrat((1+cos(2*x)) / sin(2*x))
ans = cos(x)/sin(x)
>> trigrat((1-tan(x)^2)/(1+tan(x)^2))
ans = cos(2*x)
>> trigrat((1-2*sin(x/2)^2))
ans = cos(x)
>> trigrat((2*tan(x/2))/(1+tan(x/2)^2))
ans = sin(x)
```

V předchozích ukázkách jsem uvedl příklady výrazů, které Jasymca zjednodušila na tvar, který se přesně shoduje s výsledkem uvedeným ve sbírce [3]. Objevil jsem ale i několik výrazů (ze zmíněných úloh jen velmi málo), u kterých Jasymca dospěla k jinému (ale také správnému) tvaru zjednodušeného výrazu.

Úloha 4: Zjednodušte výraz $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$.

```
>> trigrat((1+cos(x)) * (1-cos(x)))
ans = -1/2*cos(2*x)+1/2
```

Výrazy $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ a $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$ jsou si samozřejmě rovny, člověk by ale spíše očekával zjednodušení na tvar $\sin^2 x$ (který je uveden i ve výsledcích sbírky [3]). Ovšem lidský pohled na úlohy typu „zjednodušte výraz ...“ je značně subjektivní. Lidé raději volí tvary výrazů, které jsou co nejkratší a vypadají „hezky“. Navíc různí lidé se často ani neshodnou na tom, který z výrazů je jednodušší, každý může preferovat jiný tvar. Počítač naproti tomu pracuje na základě algoritmů, které toto lidské subjektivní hledisko mohou jen těžko zohledňovat.

Hlubavější studenti by předchozí příklad neměl zaskočit. Naopak, mohou si zkusit upravit zadaný výraz tak, aby po zjednodušení došli ke stejnému tvaru jako Jasymca. Zjištěný problém pro ně dokonce může být i zajímavým námětem na další procvičování. Studenti se mohou snažit hledat v různých sbírkách úloh výrazy, které Jasymca upraví na jiný tvar než ten, který je uveden ve výsledcích dané úlohy. Zvědaví studenti by ale mohli učitele zaskočit otázkou, jak vlastně Jasymca (a jiné programy pro symbolické výpočty) postupují při úpravách goniometrických výrazů.

V manuálu [2] se lze dočíst, že funkce `trigrat()` provádí postupně tyto kroky:

1. Jednotlivé goniometrické funkce vyjádří pomocí výrazů s exponenciálními funkcemi v komplexním oboru.
2. Výrazy s exponenciálními funkcemi upraví v komplexním oboru (například s využitím vzorce $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, který platí pro všechna komplexní čísla a, b).
3. Exponenciální funkce komplexní proměnné obsažené ve výsledném výrazu převede zpět na goniometrické funkce.

Z předchozího postupu by čtenář mohl nabýt dojmu, že pro jeho pochopení jsou nutné hlubší znalosti z oblasti komplexní analýzy. To je částečně pravda, nicméně přijmeme-li jako fakt, že exponenciální funkce se pro libovolné komplexní číslo $z = x + yi$, kde x, y jsou libovolná reálná čísla, dá definovat

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

můžeme si způsobem přístupným i nadanějším středoškolákům ukázat, jak přibližně Jasymla při zjednodušování goniometrických výrazů postupuje.

Nejprve si všimněte, že je-li číslo z ryze imaginární (jeho reálná část je nulová) je $e^z = e^{yi}$ a z výše uvedené definice dostaneme

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

Podobně, je-li číslo $z = -yi$ dostáváme

$$e^{-yi} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y,$$

neboť funkce kosinus je sudá a funkce sinus je lichá. Sečteme-li předchozí dvě rovnosti, zjistíme že platí

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2},$$

kde y je libovolné reálné číslo. Podobně odečtením těchto rovností získáme vztah

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

platný opět pro libovolné reálné číslo y . Konečně z definice funkce tangens dostaneme

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} = -i \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}}$$

Vraťme se nyní k úloze 4 a pokusme se ji vyřešit s využitím právě odvozených vzorců.

Řešení úlohy 4:

$$\begin{aligned}(1 + \cos x)(1 - \cos x) &= \left(1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \left(1 - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \\&= 1 - \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(e^{ix})^2 + 2 e^{ix} e^{-ix} + (e^{-ix})^2}{4} \\&= 1 - \frac{e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\end{aligned}$$

Uvedený postup zjednodušení výrazu $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$ vede ke stejnému výsledku, k jakému dospěla i Jasymlca. Samozřejmě jsme mohli získaný výraz ještě dále upravovat třeba takto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{4} &= -\frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{4} = \frac{e^{i2x} - 2 e^{ix} e^{-ix} + e^{-i2x}}{-4} \\&= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \sin^2 x\end{aligned}$$

Tím jsme získali výraz, který je uveden ve výsledcích sbírky [3]. Předchozí úpravy (například nahrazení -2 výrazem $-2 e^{ix} e^{-ix}$) jsou však již trochu „trikové“ a nedá se předpokládat, že by takto postupovala Jasymlca.

3. Využití ve výuce

Úpravy goniometrických výrazů s využitím exponenciální funkce komplexní proměnné mohou být dobrým námětem na procvičování s nadanějšími studenty (například v rámci matematického semináře na střední škole). Na následujících dvou úlohách si ukážeme, jak může takové procvičování probíhat.

Úloha 5: Zjednodušte výraz $1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

- využitím exponenciální funkce komplexní proměnné,
- obvyklým způsobem pomocí goniometrických vzorců.

Získané výsledky porovnejte a zkontrolujte pomocí programu Jasymlca.

Řešení a):

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} &= 1 - 2 \left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} \right)^2 = 1 - 2 \frac{(e^{i\frac{x}{2}})^2 - 2 e^{i\frac{x}{2}} e^{-i\frac{x}{2}} + (e^{-i\frac{x}{2}})^2}{-4} \\ &= 1 - 2 \frac{e^{ix} - 2 + e^{-ix}}{-4} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \end{aligned}$$

Řešení b):

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \right)^2 = \cos x$$

V řešení části b) jsme využili vzorec $\sin^2 \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$. Studenti mohou samozřejmě postupovat i jinak, například využít vzorec $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Většina z nich by ale měla dospět k témuž výsledku. Ten si ještě mohou ověřit pomocí programu Jasymlca:

```
>> trigrat((1-2*sin(x/2)^2))
ans = cos(x)
```

Úloha 6: Zjednodušte výraz $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

- a) využitím exponenciální funkce komplexní proměnné,
- b) obvyklým způsobem pomocí goniometrických vzorců.

Získané výsledky porovnejte a zkontrolujte pomocí programu Jasymlca.

Řešení a):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} &= \frac{-i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}}{1 + \left(-i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \right)^2} = \frac{-i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}}{\frac{(e^{ix} + e^{-ix})^2 - (e^{ix} - e^{-ix})^2}{(e^{ix} + e^{-ix})^2}} \\ &= -i \frac{(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})}{(e^{ix} + e^{-ix})^2 - (e^{ix} - e^{-ix})^2} = -i \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4 e^{ix} e^{-ix}} \\ &= \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i} = \frac{1}{2} \sin 2x \end{aligned}$$

Řešení b):

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin x \cos x$$

Výsledné výrazy jsou si rovny, neboť $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Pro zajímavost se můžeme ještě podívat, jaký výsledek vrátí Jasympca:

```
>> trigrat(tan(x)/(1+tan(x)^2))  
ans = 1/2*sin(2*x)
```

Podobným způsobem (oběma metodami a) i b)) si mohou studenti zkusit zjednodušit všechny výrazy uvedené úlohách 1, 2 a 3 v tomto článku, případně i v dalších podobných úlohách ze sbírky [3]. Získané výsledky mohou ještě zkontrolovat pomocí programu Jasympca.

Závěr

Náměty pro výuku zmíněné v článku vychází z autorových zkušeností s prací s talentovanými studenty na gymnáziu F. M. Pelcla v Rychnově nad Kněžnou v rámci semináře pro řešitele matematické olympiády. Výše popsané metody úprav goniometrických výrazů jsou vhodné k rozvíjení dovedností nadanějších studentů 3. a 4. ročníku středních škol. Studenti si současně procvičí úpravy goniometrických i exponenciálních výrazů a výrazů s komplexními čísly. Přitom si vytvoří ucelenější pohled na tyto tři oblasti, které jsou ve středoškolském učivu vyučovány tradičně odděleně. Dobrou motivací pro studenty je i snaha porozumět tomu, jakým způsobem pracují počítačové programy pro symbolické matematické výpočty. Ty totiž úpravy goniometrických výrazů provádějí právě převodem na exponenciální funkce komplexní proměnné. V tomto smyslu se autorovi osvědčil program Jasympca pro svoji jednoduchost a dostupnost zdarma.

Literatura

- [1] Čihák, M.: MuPAD aneb zdatný matematik ve vašem počítači. Matematika – fyzika – informatika, **12** (2002), č. 2, 3.
- [2] Dersch, H.: Jasympca 2.0 – Symbolic Calculator for Java.
<http://webuser.fh-furtwangen.de/~dersch/jasympca2/Jasympca2en.pdf>
- [3] Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, Praha, 1998.