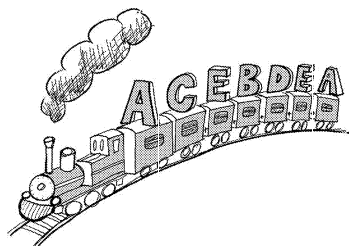


Vlak

(Úlohy z MO – kategorie P, 27. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha



Nedávno jsme si v článku [1] ukázali, jak lze v zadané posloupnosti čísel určit délku co nejdelšího souvislého symetrického úseku, tzv. palindromu. Pro řešení této úlohy jsme našli překvapivě efektivní řešení s lineární časovou složitostí. Tentokrát se budeme věnovat na pohled velmi podobnému,

ale o něco obtížnějšímu úkolu: V zadané posloupnosti čísel chceme určit délku co nejdelší *vybrané podposloupnosti*, která je palindromem. Připomeňme, že vybraná podposloupnost je tvořena některými prvky původní posloupnosti, přičemž musí zůstat zachováno jejich vzájemné pořadí.

Úloha založená na řešení uvedeného problému byla zadána v krajském kole 60. ročníku MO (školní rok 2010/2011) – kategorie P. Nejprve se seznámíme s úplným zadáním, které si pro potřeby našeho článku vhodně zkrátíme a upravíme, aniž bychom tím ovšem změnili smysl původní úlohy.

Soutěžní úloha

Na vstupu dostanete posloupnost písmen. Každé z těchto písmen představuje jeden vagon vlaku. Různá písmena odlišují různé typy vagónů. Výstupem programu bude výpis pozic vagónů (písmen), které musí být

odstraněny, aby byl výsledný vlak (posloupnost písmen) po jejich odstranění stejný při čtení zepředu i zezadu (tedy aby výsledný řetězec písmen byl palindromem). Pokud existuje více možností, nalezněte a vypište tu, kde je třeba odstranit nejmenší možný počet vagónů. Pokud je takových možností více, můžete vypsát jednu libovolnou z nich.

Formát vstupu

Vstup programu je tvořen dvěma řádky. První řádek obsahuje jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 50\,000$), které určuje původní počet vagónů vlaku. Druhý řádek obsahuje posloupnost N znaků, které popisují jednotlivé typy vagónů.

Formát výstupu

Výstup programu je tvořen dvěma řádky. První obsahuje jediné číslo K ($0 \leq K \leq N - 1$), které udává, kolik vagónů je potřeba z vlaku odstranit, aby vlak vypadal stejně z obou směrů. Druhý řádek obsahuje K různých čísel z rozmezí od 1 do N určujících pořadová čísla těch vagónů, které mají být z vlaku odstraněny. Pokud je posloupnost znaků zadaná na vstupu stejná při čtení zepředu i zezadu, pak na první řádek vypište číslo 0 a druhý řádek zůstane prázdný.

Příklady:

Vstup:

6
ABCDBA

Výstup:

1
3

Odstraněním třetího písmene vznikne vlak s vagóny ABDBA. Jiným správným řešením je odstranit čtvrté písmeno, kdy vznikne vlak s vagóny ABCBA.

Vstup:

7
ABECEDA

Výstup:

2

2 6

Odstraněním druhého a šestého písmene vznikne vlak s vagóny AECEA.

Vstup:

7

ABECADA

Výstup:

4

3 4 6 7

Odstraněním třetího, čtvrtého, šestého a sedmého písmene vznikne vlak s vagóny ABA. V tomto případě existuje více různých optimálních řešení.

Problematicke vybraných podposloupností jsme se v našem seriálu úloh z MO kategorie P věnovali v minulosti již vícekrát, v poslední době například v článcích [2] a [3]. Každou z těchto úloh bylo možné řešit triviálním způsobem zkoušením všech možných vybraných podposloupností, kterých je však exponenciálně mnoho a takové řešení je tudíž velmi neefektivní. Naproti tomu se nám zatím vždy podařilo nalézt efektivní řešení založené na myšlence dynamického programování. Stejně tomu bude i tentokrát.

Zadaný vlak V je tvořen vagóny $a_1, a_2, \dots, a_N$. Jako „podvlak“ $V_{i,j}$ si označíme jeho souvislou část tvořenou vagóny $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$. Budeme zkoumat, jak nalézt optimální řešení naší úlohy pro určitý podvlak, když už známe řešení pro všechny podvlaky kratší. Zajímá nás tedy, jakou maximální symetrickou podposloupnost je možné vybrat z podvlaku $V_{i,j}$. Jestliže $a_i = a_j$, pak můžeme předpokládat, že jsou oba tyto krajní vagóny zařazeny v optimálním řešení pro podvlak $V_{i,j}$ a mezi nimi se nachází optimální řešení o dva vagóny kratšího podvlaku $V_{i+1,j-1}$. Pokud neplatí $a_i = a_j$, nemohou být oba tyto vagóny zároveň zařazeny v řešení úlohy pro $V_{i,j}$. V takovém případě je tedy optimální řešení pro podvlak $V_{i,j}$ rovno buď optimálnímu řešení pro $V_{i,j-1}$, nebo optimálnímu řešení pro $V_{i+1,j}$ (podle toho, které z nich bude výhodnější). Vidíme tedy, že řešení pro každý podvlak $V_{i,j}$ dokážeme snadno spočítat v konstantním čase, pokud již známe řešení pro podvlaky o jeden a o dva vagóny kratší.

Vyřešení zadané úlohy dynamickým programováním je přímou implementací právě popsané myšlenky. Začneme od úseků délky 1, které jsou

tvořeny jediným vagónem a jsou tedy zřejmě všechny symetrické. Řešení všech úseků délky 2 je rovněž triviální – je určeno tím, zda jsou oba po sobě jdoucí vagóny vlaku stejné, nebo ne. Dále postupně počítáme řešení pro všechny úseky délky 3, 4, 5, atd., až nakonec najdeme řešení pro celý vlak délky N . Počet všech postupně řešených souvislých úseků (tzn. podvlaků) je $N + (N - 1) + (N - 2) + \dots + 1$, tedy řádově N^2 , každé řešení určíme výše uvedeným postupem v konstantním čase. Algoritmus má tedy kvadratickou časovou složitost vzhledem k délce posloupnosti N .

Pokud bude naším úkolem určit pouze délku maximální vybrané symetrické podposloupnosti (resp. minimální počet vagónů, které je třeba z vlaku vypustit, aby byl výsledný vlak symetrický), jsme v tuto chvíli s řešením hotovi a můžeme si předvést, jak by ho bylo možné naprogramovat. V následující programové ukázce postupně počítáme hodnoty prvků dvou-rozměrného pole V tak, že číslo $V[i, j]$ představuje délku maximální symetrické podposloupnosti vybrané z úseku $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$. Hodnoty ukládané do pole V počítáme v pořadí podle rostoucí délky úseku. Jako poslední se spočítá číslo $V[1, N]$, které určuje délku výsledného upraveného vlaku, tzn. hledané řešení. Jelikož v úloze požadujeme vypsát nikoliv délku výsledného vlaku, ale minimální počet vypuštěných vagónů, program vypíše na výstup údaj $N - V[1, N]$.

```
program Vlak_1;
{určení délky maximální symetrické vybrané podposloupnosti}

const MaxN = 50000;
var A: array[1..MaxN] of char; {zadaná posloupnost = vlak}
    V: array[1..MaxN, 1..MaxN] of integer;
    {délky max. symetrických vybraných podposloupností}
    N: integer; {délka posloupnosti}
    i, j, Delka: integer;
    {vymezení rozsahu a délka zvoleného úseku posloupnosti}

begin
readln(N); {délka posloupnosti}
for i:=1 to N do
    read(A[i]); {prvky posloupnosti}
for i:=2 to N do
    V[i,i-1]:=0; {prázdný úsek}
```

```

for i:=1 to N do
  V[i,i]:=1;                                {jednoprvkový úsek}
for Delka:=2 to N do                        {délka úseku}
  for i:=1 to N-Delka+1 do                  {začátek úseku}
    begin
      j:=i+Delka-1;                          {konec úseku}
      if A[i] = A[j] then
        V[i,j]:=V[i+1,j-1]+2
      else if V[i+1,j] > V[i,j-1] then
        V[i,j]:=V[i+1,j]
      else
        V[i,j]:=V[i,j-1]
      end;
    end;

{V[1,N] je délka maximální vybrané symetrické
podposloupnosti}
writeln(N-V[1,N])      {minimální počet vypuštěných znaků}
end.

```

Tato jednoduchá implementace využívá paměť kvadratické velikosti (vzhledem k N). Ve skutečnosti ale vystačíme dokonce s pamětí lineární. Nemusíme si totiž během výpočtu stále pamatovat všech až N^2 dříve spočítaných hodnot $V[i, j]$ pro úseky kratší délky, k vyřešení určitého podvlaku nám přece stačí znát pouze řešení pro podvlaky kratší o jeden nebo o dva vagóny. Budeme si tedy udržovat v paměti pouze spočítaná řešení vždy pro poslední dvě délky úseků a na jejich základě spočítáme řešení pro úseky bezprostředně následující délky. Počet všech hodnot $V[i, j]$ uložených v jednom okamžiku výpočtu v paměti bude tedy jistě vždy menší než $3N$.

V naší původní úloze z MO máme však za úkol určit nejen minimální počet, ale také seznam čísel těch vagónů, které je třeba z vlaku vypustit. Řešení bude proto třeba ještě doplnit o evidenci vypuštěných vagónů. S lineární pamětí pak již nevystačíme a budeme potřebovat paměť kvadratické velikosti. Do programu přidáme pole X , jehož hodnoty $X[i, j]$ budeme počítat souběžně s výpočtem hodnot $V[i, j]$. Číslo $X[i, j]$ udává pořadové číslo jednoho vagónu, který je třeba vypustit z úseku vlaku $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$, abychom postupně získali maximální vybranou symetrickou podposloupnost délky $V[i, j]$. Toto pole si musíme uchovávat celé a na jeho

základě pak dokážeme zpětně zrekonstruovat seznam všech vypuštěných vagonů pro získání výsledného symetrického vlaku délky $V[1, N]$.

Výsledný program vychází z předchozího řešení jednodušší úlohy, do něhož jsme pouze doplnili práci se zmíněným polem X a výpis čísel vypouštěných vagonů.

```
program Vlak_2;
{určení délky maximální symetrické vybrané podposloupnosti
a nalezení jedné takové symetrické podposloupnosti max.
délky;
výstupem je seznam pozic znaků, které je třeba vynechat}

const MaxN = 50000;
var A: array[1..MaxN] of char;      {zadaná posloupnost = vlak}
    V: array[1..MaxN, 1..MaxN] of integer;
        {délky max. symetrických vybraných podposloupností}
    X: array[1..MaxN, 1..MaxN] of integer;
        {pořadové číslo znaku, který se má z úseku vypustit}
    N: integer;                      {délka posloupnosti}
    i, j, Delka: integer;
        {rozsah a délka zvoleného úseku posloupnosti}

begin
  readln(N);                          {délka posloupnosti}
  for i:=1 to N do
    read(A[i]);                        {prvky posloupnosti}
  for i:=2 to N do
    V[i,i-1]:=0;                       {prázdný úsek}
  for i:=1 to N do
    V[i,i]:=1;                         {jednoprvkový úsek}
  for Delka:=2 to N do
    {délka úseku}
    for i:=1 to N-Delka+1 do
      {začátek úseku}
      begin
        j:=i+Delka-1;                 {konec úseku}
        if A[i]=A[j] then
          begin
            V[i,j]:=V[i+1,j-1]+2; X[i,j]:=0 end
          {nic se nevypustí, oba krajní znaky úseku zůstávají}
```

```

else if V[i+1,j] > V[i,j-1] then
    begin V[i,j]:=V[i+1,j]; X[i,j]:=i end
                                {vypustí se první znak úseku}
else
    begin V[i,j]:=V[i,j-1]; X[i,j]:=j end
                                {vypustí se poslední znak úseku}
end;

{V[1,N] je délka maximální vybrané symetrické
                                podposloupnosti}
writeln(N-V[1,N]);           {minimální počet vypuštěných znaků}

{rekonstrukce seznamu všech vypuštěných znaků pro získání
maximální symetrické vybrané podposloupnosti délky V[1,N]:}
i:=1;
j:=N;
while i < j do                {zkoumaný úsek není triviální}
    if X[i,j] = 0 then
        begin inc(i); dec(j) end
    else
        begin
            write(X[i,j], ' ');    {pořadové číslo vypuštěného znaku}
            if X[i,j] = i then inc(i) else dec(j)
        end;
    writeln
end.

```

Literatura

- [1] *Töpfer, P:* Maximální palindrom (Úlohy z MO – kategorie P – 24. část). MFI, r. 19 (2009/10), č. 5 a 6.
- [2] *Töpfer, P:* Společná vybraná podposloupnost (Úlohy z MO – kategorie P – 17. část). MFI, r. 17 (2007/08), č. 2.
- [3] *Töpfer, P:* Pokleslá podposloupnost (Úlohy z MO – kategorie P – 20. část). MFI, r. 17 (2007/08), č. 9.

Může počítač rozvíjet kreativitu žáků?

HELENA BINTEROVÁ – EDUARD FUCHS

Pedagogická fakulta JČU České Budějovice,
Přírodovědecká fakulta MU Brno

V práci ukazujeme, jak lze počítač využít k řešení některých problémů, které mohou být jinak pro žáky jen velmi obtížně řešitelné. Současně ukazujeme, že využití počítače může přispět ke zvýšení zájmů žáků o teoretické zázemí řešení problematiky a podnítit tak žakovský zájem o hlubší pochopení probírané látky.

1. Úvod

Do všech oblastí našeho života, včetně vzdělávání, se stále intenzivněji promítají změny způsobené masivním nasazováním počítačů a dalších moderních technologií. I velmi konzervativní pedagogové jsou si dnes již vědomi toho, že tyto technologie a současná „informační exploze“ by se měly odrážet i ve školské praxi, zejména ve vyučovacích metodách (viz např. [1]). Vyvstává tu však řada problémů, jejichž podstatou jsou otázky, jakou roli mají hrát při výuce počítače a jak to udělat, aby bylo dosaženo proklamovaných moderních cílů výuky a aby přitom nedošlo k poklesu potřebných žakovských znalostí.

Odpovědi na tyto otázky nejsou jednoduché. K tomu, abychom kvalitně vzdělávali například žáky základní školy, nestačí zakoupit interaktivní tabule a příslušné matematické programy a přitom je využívat „po staru“. Především musíme mít ujasněno, jak dosáhneme účinného využití nových technologií v jednotlivých fázích pojmotvorného procesu, jak je tedy zapojit do výuky tak, aby se staly její organickou součástí a žáci je využívali aktivně a cíleně.

Samotné zapojení moderních technologií do výuky ji možná urychlí, avšak nez kvalitní. Cílem je naučit se využívat tyto prostředky k tomu, aby žáci uměli na odpovídající úrovni řešit problémy, aby uměli přemýšlet, třídit a vybírat nabízené informace a aby je dokázali samostatně používat a obhajovat v každodenním životě. O takové využití jsme se pokusili v následujícím experimentu.

2. Popis experimentu

V našich učebnicích *Aritmetiky* a *Geometrie* pro 6. – 9. třídu (viz např. [2]) se snažíme ve výše uvedených intencích pracovat. Jsme přesvědčeni, že experimentováním, porovnáváním situací, které znají z běžného života, hledáním skrytých zákonitostí, postupným vytvářením správné terminologie, nenásilným vedením ke správnému vyjadřování a označování věcí, jsou žáci vedeni k tomu, aby matematiku chápali jako mocný nástroj k poznávání světa. Tento přístup považujeme i za cestu k tomu, aby matematice dobře porozuměli a aby se matematika stala jedním z jejich oblíbených předmětů. Je nám však jasné, že tento postup je časově náročný a pro vyučujícího mnohem obtížnější než klasická „frontální“ výuka, kdy učitel v systematickém výkladu seznámí žáky s novým tématem a dbá pouze na to, aby mu žáci pokud možno dobře porozuměli.

Nyní stručně popíšeme jednu z možností, jak jsme testovali vhodnost využití informačních technologií při samostatné práci žáků. V učebnici [2] jsme v 9. třídě zařadili následující úlohu:

„Třídní učitelka dala Petrovi v 8. A úkol: *„Petře, zbylo mi v třídním fondu 240 Kč. Mohl bys mi spočítat, kolik bychom za tuto částku mohli koupit sešitů tak, aby žádné peníze nezbyly? Uvažuj sešit č. 445 (A4 – linkovaný), jehož cena je 16 Kč a sešit č. 540 (A5 – linkovaný), jehož cena je 8 Kč.“* Petr zjistil, že to bude možné a našel několik variant. Vytvořte návrh všech možných variant nákupu sešitů pro 8. A. Kolik jich je?“

Úloha se ukázala pro žáky základní školy obtížná, i když v podstatě jde o jednoduchou diofantovskou rovnici. Nalezení nějakého řešení je víceméně jednoduché, nalezení všech požadovaných řešení je už složitější a vyžaduje od žáků promyšlenou strategii a systematický přístup. Právě na této nestandardní úloze, která poměrně výrazně přesahuje „povinné“ učivo, jsme se rozhodli otestovat, jakou roli může sehrát počítač, pokud se žáci k jeho využití rozhodnou.

Na základní škole, kde probíhalo vyučování s naší lektorkou, jsme zadali uvedenou úlohu ve dvou paralelních a prospěchově srovnatelných třídách. Přitom jsme v jedné třídě žákům povolili využít pouze tužku a papír, ve druhé třídě mohli žáci pracovat na počítači, nedostali však žádný návod, jak pracovat, jaký software mohou využít apod. Poznamenejme ještě, že žáci devátých tříd na dané škole běžně pracovali s programy MS Excel, GeoGebra, Derive 6, Cabri II+ a Geonext.

Ke splnění daného úkolu žáci dostali čas 20 minut, poté jsme se věno-

vali rozboru úlohy a prošli jsme společně možné postupy vedoucí k vyřešení úlohy. Třídy byly průměrné a jak jsme již uvedli, byly jejich výkony v matematice srovnatelné. Ve třídách nebyl ani jeden výrazněji talentovaný žák, prospěchově lepší žáci odešli již dříve na víceletá gymnázia. Škola je typickou sídlištní školou a nemá žádnou specializaci. Řešený příklad byl běžnou součástí hodiny.

Nyní stručně okomentujme výsledky obou skupin. (Podrobnější popis některých žakovských strategií lze nalézt v práci [3]).

Výsledky první skupiny

V první skupině se výuky zúčastnilo 18 žáků. Sedm z nich nenalezlo ve stanoveném dvacetiminutovém limitu žádné řešení. Žáci, kteří alespoň jedno řešení našli, pracovali, až na jednu výjimku, metodou, kterou bychom mohli nazvat pokus – omyl. Všechna tato řešení byla náhodná, žáci se bez hlubšího zdůvodnění pokoušeli o nalezení **nějakého** řešení na základě vlastností zadaných číselných hodnot. Většina dětí našla jen některá ze 16 možných řešení. Pouze jeden žák na základě jednoho řešení dokázal nalézt systematický postup a našel řešení všechna.

Jediný žák nehledal řešení náhodně a pokoušel se sestavit rovnici, která by mu umožnila všechna řešení nalézt. Ačkoliv tuto rovnici správně sestavil, odvodil z ní pouze tři řešení.

Výsledky druhé skupiny

Výuky se zúčastnilo 15 žáků. Dva z nich nenalezli žádné řešení, dva další pracovali, stejně jako žáci v první skupině, pouze s tužkou a papírem, jedenáct žáků se rozhodlo využít počítač.

Zajímavé bylo, že oba žáci, kteří pracovali bez počítače, našli všechna řešení. Lze tedy dedukovat, že úloha pro ně nebyla natolik obtížná, aby považovali za nutné počítač využít.

Jak si počínali žáci, kteří se rozhodli využít počítač? Zajímaly nás dvě otázky: a) jaký software se rozhodnou využít, b) jak budou při řešení úlohy úspěšní. Nejčastěji využitým softwarem se stal, nikoliv překvapivě, Excel, který zvolilo sedm žáků. Tři žáci se rozhodli pro GeoGebru a jeden pro Derive. Potěšitelné bylo, že z jedenácti žáků, kteří počítač využili, jich deset našlo všech 16 řešení. Pro zajímavost uveďme řešení žačky, která našla pouze 15 řešení. Ta pracovala s Excelem a její řešení je na obr. 1. V popsaném řešení chybí případ $0 \cdot 8 + 15 \cdot 16$. Zajímavé bylo, že ani po

sešity za 8		sešity za 16		cena celkem
počet	cena	počet	cena	
1	8	14.5	232	240
2	16	14	224	240
3	24	13.5	216	240
4	32	13	208	240
5	40	12.5	200	240
6	48	12	192	240
7	56	11.5	184	240
8	64	11	176	240
9	72	10.5	168	240
10	80	10	160	240
11	88	9.5	152	240
12	96	9	144	240
13	104	8.5	136	240
14	112	8	128	240
15	120	7.5	120	240
16	128	7	112	240
17	136	6.5	104	240
18	144	6	96	240
19	152	5.5	88	240
20	160	5	80	240
21	168	4.5	72	240
22	176	4	64	240
23	184	3.5	56	240
24	192	3	48	240
25	200	2.5	40	240
26	208	2	32	240
27	216	1.5	24	240
28	224	1	16	240
29	232	0.5	8	240
30	240	0	0	240

Obr. 1

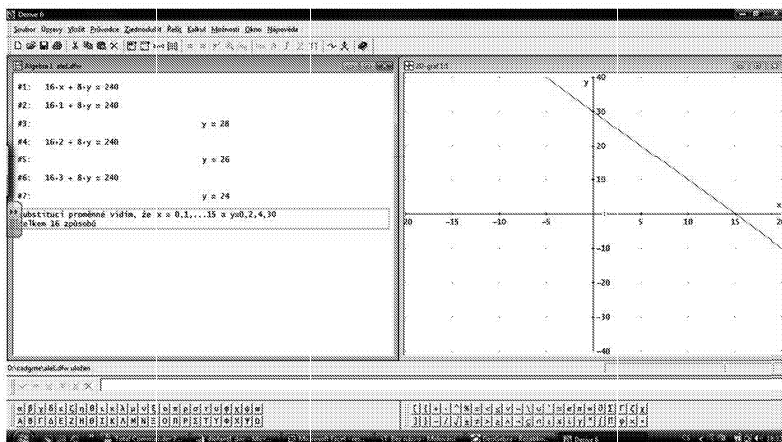
		za 8				za 16																	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15							
15	0	1	16	3	8	8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	240		
8	2	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240								
	3	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240									
	4	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240										
	5	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240											
	6	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240												
	7	112	128	144	160	176	192	208	224	240													
	8	128	144	160	176	192	208	224	240														
	9	144	160	176	192	208	224	240															
	10	160	176	192	208	224	240																
	11	176	192	208	224	240																	
	12	192	208	224	240																		
	13	208	224	240																			
	14	224	240																				
	15	240																					
	16		128	144	160	176	192	208	224	240													
	17		192	208	224	240																	
	18		256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544		
	19		272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544			
	20		288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544				
	21		304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544					
	22		320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544						
	23		336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544							
	24		352	368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544								
	25		368	384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544									
	26		384	400	416	432	448	464	480	496	512	528	544										
	27		400	416	432	448	464	480	496	512	528	544											
	28		416	432	448	464	480	496	512	528	544												
	29		432	448	464	480	496	512	528	544													
	30		448	464	480	496	512	528	544														

Obr. 2

následném dotazu učitelky, zda by nebylo možné nalézt ještě nějaké další řešení, na ně nepřišla. Na uvedeném řešení nám přitom přišlo pozoruhodné, že ve třetím sloupci žačka dopočítala rozdíl ceny po nákupu sešitů za 8 Kč a ten pak dělila 16, což naznačuje jistou strategickou manipulaci s výrazem.

Zajímavý a nestandardní byl Martinův postup, který našel všechna řešení pomocí tabulky na obr. 2. Martin si zřejmě nejprve vypočítal cenu nákupu obou druhů sešitů v takovém počtu, aby se vešel do částky 240 Kč a poté k cenám za daný počet levnějších sešitů dopočítával ceny sešitů za 16 Kč tak dlouho, až se dostal k cílové částce.

Stručně se ještě zmíníme o žákovi, který jako jediný použil Derive. Na jeho postupu bylo zajímavé, že neřešil primárně žádnou rovnici, ale sestavil odpovídající lineární funkci (viz obr. 3). Na otázku, jak na lineární funkci přišel, odpověděl, že „ji vidí“. Žák našel správně všechna řešení, z jeho postupu však bylo obtížné rekonstruovat, do jaké míry jednotlivá řešení tipoval a do jaké míry byl jeho postup vědomý.



Obr. 3

V každém případě však byly výsledky ve druhé skupině výrazně lepší než ve skupině první.

Stručné vyhodnocení

Čtenáře – stejně jako nás – jistě překvapuje vysoký počet dětí, které nenalezly žádné řešení. K tomu přece stačí v podstatě velmi jednoduchý

úsudek: protože $16 + 8 = 24$, je řešením například deset velkých a deset malých sešitů. Další řešení pak lze snadno nalézt tak, že velký sešit „vyměním“ za dva malé. Proč tedy tolik dětí vůbec neuspělo? Vysvětlením by mohl být fakt, že to bylo vůbec poprvé, kdy se žáci setkali s úlohou, kde k vyřešení nemají „dost“ údajů a úloha je zaskočila. Jsou většinou zvyklí sestavit rovnici, dosadit údaje a vyřešit rovnici na úrovni kalkulativní bez hlubšího porozumění. Počítač tak ve druhé skupině zpočátku suploval nedostatečnou úroveň žákovských úsudků, pramenící třeba i z malé zkušenosti s takovými úlohami. Postupně však počítač žákovský úsudek kultivoval a pozdvihl zvládnutí problematiky do vyšší úrovně.

3. Další postup

Další otázkou, na kterou jsme hledali odpověď, bylo to, zda má použití počítače vliv na strategii žáků při řešení podobných úloh. Proto jsme po skončení popisované úlohy v obou třídách zadání na první pohled nepatrně obměnili – změnili jsme cenu 16 Kč na 17 Kč. Výsledek v podstatě odpovídal naší hypotéze: v první skupině takto pozměněnou úlohu nevyřešil nikdo celou; pouze osm dětí si uvědomilo, že řešením je evidentně možnost $0 \cdot 17 + 30 \cdot 8$. Druhé řešení, tj. $8 \cdot 17 + 13 \cdot 8$, nenašel nikdo, protože metoda „pokus omyl“ z žákovského pohledu „dlouho“ nevedla k žádnému výsledku. Pouze jeden žák poté po vyučující chtěl, aby mu vysvětlila, jak by mohl postupovat obecně. Učitelčin výklad však zajímal evidentně pouze jeho, další žáci jeho úvahy a smysl jeho dotazů vůbec nechápali.

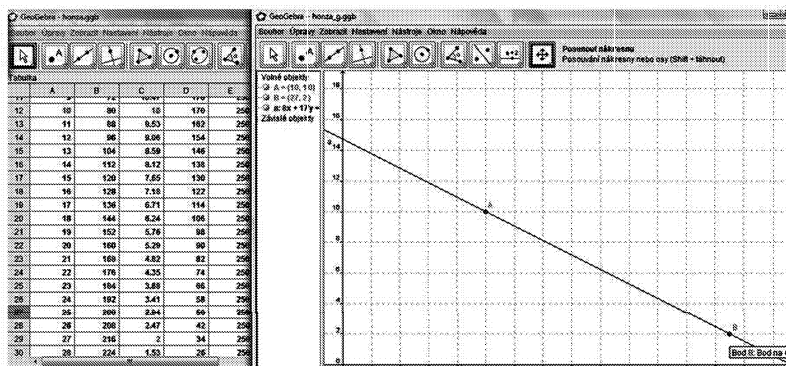
Ve druhé třídě byl výsledek diametrálně odlišný: jedenáct dětí, tedy naprostá většina, úlohu kompletně vyřešila. Všichni použili svá předchozí řešení, jen zaměnili číslo 16 za 17. Zejména nás však potěšila další skutečnost: šest žáků chtělo znát obecný postup při řešení takových úloh a výklad učitelky sledovali se zaujetím.

I na základě tohoto jediného experimentu si tak dovoluujeme tvrdit, že vhodné a ve správnou chvíli načasované využití počítače může přispět k prohloubení zájmu o teoretickou stránku problematiky a výrazně tak může přispět k hlubšímu vhledu žáků do probíraného učiva.

Analogické úlohy jsme poté řešili s žáky obou tříd ve výběrovém semináři, do něhož chodila přibližně polovina žáků z obou tříd. I žáci z té třídy, která ve výuce počítače neužívala, vcelku rychle pochopili přednost jejich využití a rychle se na příslušné postupy adaptovali. V jedné hodině pak žáci řešili úlohy vedoucí na rovnice $8x + 17y = 250$ a $8x + 15y = 250$. Žáci však i nyní pracovali v podstatě samostatně, mohli si zvolit software

dle vlastního výběru a vyučující jen korigovala případné nesrovnalosti. Ze zajímavých žákovských řešení uvádíme dvě následující.

Honza nejprve řešil rovnici $8x + 17y = 250$. Otevřel si GeoGebru a pomocí příkazového řádku na spodní části nákresny sestrojil příslušnou přímku. Poté si zapnul zobrazení mřížky a zjevně odhadl, že celočíselným řešením by mohlo být $x = 10$, $y = 10$. Jako druhé možné řešení se mu nabízel bod $x = 27$, $y = 2$, nebyl si však zřejmě jistý. Kliknutím na tento bod (na obr. 4 bod B) mu program ukázal, že by měl daný bod ležet na sestrojené přímce. Protože tento údaj nepovažoval za zcela hodnověrný, otevřel si tabulkový procesor skrytý v GeoGebře a pomocí tabulky, kterou si připravil podobně jako jiní žáci v Excelu, rychle zjistil, že našel řešení správně a jiná celočíselná řešení zde nejsou. Postupně takto pracoval i s dalšími rovnicemi a řešení vždy našel.



Obr. 4

Několik žáků v semináři však již nechtělo pouze experimentovat, ale chtěli vědět, jak by se takové rovnice daly řešit obecně. V deváté třídě samozřejmě nelze budovat teorii ani těch nejjednodušších diofantovských rovnic. Na druhé straně jsme však žákům chtěli poskytnout možnost do tématu, které je zaujalo, alespoň částečně proniknout. Proto jsme s nimi probrali postupy uvedené na webové stránce

<http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/linear.html>,
kde jsou řešeny diofantovské rovnice tvaru $ax + by = c$. Při studiu těchto stránek jsme se postupně zcela nenásilně dostali i k Eukleidovu algoritmu, k úloze parametru v obecném řešení a k další problematice.

Žáci měli posléze samostatně prokázat, jak řešení uvedenému na internetových stránkách rozumějí. Uvedme jako jeden za zajímavých příkladů postup Martina. Ten poté, co pro rovnici $8x + 15y = 250$ našel na webové stránce řešení $x_0 = 500 + 15n$, $y_0 = -250 - 8n$, vypočítal řešení v kladných celých číslech, které odpovídalo slovní úloze, pomocí Excelu, viz obr. 5. Na levé straně je uvedeno standardní řešení ve formě, v níž uváděl řešení dřívějších příkladů. Při odvozování těchto výsledků z obecného řešení diofantovské rovnice správně vyhodnotil, že musí volit záporné hodnoty parametru. Přestože věděl, že pro malé absolutní hodnoty parametru je hodnota y záporná a tedy neodpovídá slovní úloze, zahrnul do výsledné tabulky všechny hodnoty pro $n = -1, -2, \dots$, aby některé řešení nepřehlédl.

8x + 15y = 250			řešení diofantické rovnice		
8 kč	15 kč	celkem	n	y	x
x	y				
1	16,13333	250	-1	-242	485
2	15,6	250	-2	-234	470
3	15,06667	250	-3	-226	455
4	14,53333	250	-4	-218	440
5	14	250	-5	-210	425
6	13,46667	250	-6	-202	410
7	12,93333	250	-7	-194	395
8	12,4	250	-8	-186	380
9	11,86667	250	-9	-178	365
10	11,33333	250	-10	-170	350
11	10,8	250	-11	-162	335
12	10,26667	250	-12	-154	320
13	9,73333	250	-13	-146	305
14	9,2	250	-14	-138	290
15	8,66667	250	-15	-130	275
16	8,13333	250	-16	-122	260
17	7,6	250	-17	-114	245
18	7,06667	250	-18	-106	230
19	6,53333	250	-19	-98	215
20	6	250	-20	-90	200
21	5,46667	250	-21	-82	185
22	4,93333	250	-22	-74	170
23	4,4	250	-23	-66	155
24	3,86667	250	-24	-58	140
25	3,33333	250	-25	-50	125
26	2,8	250	-26	-42	110
27	2,26667	250	-27	-34	95
28	1,73333	250	-28	-26	80
29	1,2	250	-29	-18	65
30	0,66667	250	-30	-10	50
31	0,13333		-31	-2	35
			-32	6	20
			-33	14	5
			-34	22	-10

Obr. 5

Závěr

Naším záměrem samozřejmě nebylo probírat učivo o diofantovských rovnicích. Považovali jsme však tuto tematiku za vhodnou k ověření toho, do jaké míry žáci dovedou tvůrčím způsobem využít výpočetní techniku k řešení problémů, s nimiž se dosud nesetkali, a zda vůbec je v takové situaci využití počítače efektivní.

Obecně vzato je vždy nutno pečlivě zvažovat, kde leží hranice mezi smysluplným a nevhodným využitím počítačů, a samozřejmě jsme si vědomi řady problémů, které nevhodné využití počítačů přináší. Domníváme se však, že v tomto případě bylo využití počítačů efektivní a vhodné. Ačkoliv dvě studijní skupiny, v nichž jsme úlohy řešili, byly v podstatě prospěchově srovnatelné, dosáhli žáci využívající samostatně výpočetní techniku prokazatelně lepších výsledků. Za ještě cennější pak považujeme to, že skupina využívající počítače následně projevovala větší zájem o pochopení teoretického zázemí a jejich motivace ke zvládnutí podstaty problému byla na vyšší úrovni než u těch žáků, kteří se – většinou marně – o vyřešení úloh snažili bez počítače. Díky počítači tak žáci objevili v probírané látce matematickou „krásu“ tam, kde žáci bez počítače viděli jen „dřinu“ a úmorné bezvýsledné počítání.

Literatura

- [1] *Binterová, H. – Fuchs, E.*: Počítač, trojúhelník a kvadratická funkce. MFI, r. 19 (2009/10), č. 6.
- [2] *Binterová, H. – Fuchs, E. – Tlustý, P.*: Algebra 9. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. Plzeň: Fraus 2010.
- [3] *Binterová, H. – Fuchs, E.*: Nestandardní úlohy s počítačem v 9. třídě. In: Sborník 9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Plzeň, Vydavatelský servis, 2010, s. 63–67.
- [4] *Moss, G. – Jewitt, C. – Levačic, R. – Armstrong, V. – Cardini, A. – Castle, F.*: The Interactive Whiteboards. Pedagogy and Pupil Performance Evaluation: Evaluation of the Schools Whiteboard Expansion (SWE) Project: London Challenge, Institute of Education London, 2007.