

Výsledky českých žáků ve výzkumu PISA 2009 – zhoršení v matematice i přírodních vědách

DANA MANDÍKOVÁ – JANA PALEČKOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha – ÚIV Praha

1. Úvod

PISA (*Programme for International Student Assessment*) je mezinárodním výzkumem čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti patnáctiletých žáků. Pořádá ho Organizace pro hospodářskou spolupráci (OECD). Hlavním cílem výzkumu je zjistit, zda si žáci na konci povinné školní docházky osvojili vědomosti a dovednosti, které jsou nezbytné pro úspěšné uplatnění v reálném životě. Předmětem zkoumání není to, jak žáci dokáží nabyté vědomosti reprodukovat, ale to, jak je dovedou využít v různých situacích z běžného života.

V tomto článku chceme podat základní informaci o celkových výsledcích českých žáků a jejich vývoji.

2. Výzkum PISA

Cykly výzkumu

Výzkum probíhá ve tříletých cyklech, v každém z nich je jedné ze tří sledovaných oblastí věnována zvýšená pozornost. V roce 2000 výzkum zjišťoval především čtenářskou gramotnost ([7]), v roce 2003 matematickou gramotnost ([5]) a v roce 2006 přírodovědnou gramotnost ([4], [1]). V roce 2009 byla hlavní sledovanou oblastí opět čtenářská gramotnost.

Zúčastněné země a vzorek

Počet zemí, které se výzkumu účastní, stále roste. V roce 2009 se za-

pojilo 34 zemí OECD a 31 dalších zemí (jejich seznam lze nalézt např. v [3]).

Vzorek pro mezinárodní srovnání v roce 2009 tvořili žáci narození v roce 1993. V České republice to bylo 7 500 žáků z 290 škol.

Testy a dotazníky

Úroveň gramotnosti žáků ve všech sledovaných oblastech se zjišťovala stejně jako v minulých cyklech písemným testem, na jehož vyplnění měli žáci dvě hodiny. V testu byly zastoupeny jak úlohy s výběrem odpovědi, tak úlohy, kde žáci formulují vlastní odpověď.

Všichni testovaní žáci vyplňovali také dotazník, kde odpovídali na otázky týkající se jejich rodinného zázemí, prostředí, ve kterém žijí, jejich názorů a postojů, školy i vyučovacích metod, s nimiž se setkávají.

Ředitelé všech zúčastněných škol vyplňovali dotazník mapující situaci ve školách. Krátký dotazník o výuce čtení vyplňovali i učitelé českého jazyka na zúčastněných školách.

Prezentace výsledků

Ve výzkumu PISA jsou výsledky jednotlivých zemí prezentovány dvěma různými způsoby:

- pomocí skóre (počtu bodů) na škálách výsledků, které vyjadřují úspěšnost žáků při řešení testových úloh;

Uvádí se jednak průměrné výsledky zemí na třech celkových škálách pro čtenářskou, matematickou a přírodovědnou gramotnost. Pro blíže zkoumanou oblast čtenářské gramotnosti pak byly vytvořeny ještě dílčí škály zaměřené na tři okruhy sledovaných kompetencí (získávání informací, zpracování informací, zhodnocení textu) a dva typy textů (souvislý, nesouvislý).

- pomocí šesti úrovní způsobilosti, na nichž se žáci mohou nacházet.

Rozdělení žáků podle úrovní způsobilosti poskytuje informaci o tom, s jakým úspěchem si žáci osvojili příslušné kompetence a vědomosti. Podle toho, jakého skóre žák v testu dosáhl, je mu přiřazena jedna ze šesti úrovní způsobilosti. Žáci na první úrovni způsobilosti dosahují nejnižších výsledků a ovládají pouze nejjednodušší kompetence, šestá úroveň odpovídá nejlepším výsledkům a nejsložitějším kompetencím. V rámci výzkumu PISA byla za základní stanovena druhá úroveň. Žáci, kteří této úrovni nedosáhnou, mohou mít problémy v dalším studiu a s uplatněním na trhu práce. (Podrobné vymezení toho, co by měli žáci na jednotlivých úrovních umět, lze nalézt pro oblast čtení v [3], s. 43, pro matematiku v [5], s. 17, pro přírodní vědy v [4], s. 22).

3. Celkové výsledky a jejich vývoj

I když je tento časopis zaměřen na oblast matematiky a fyziky, zmíníme stručně i výsledky českých žáků v oblasti čtení. Jednotlivé oblasti gramotnosti jsou mezi sebou provázané a žák jistě potřebuje k porozumění textu matematické či přírodovědné úlohy i gramotnost čtenářskou. Naopak úroveň matematické či přírodovědné gramotnosti žáka může ovlivnit jeho výsledek v úlohách zařazených do testu čtenářské gramotnosti, které pracují např. s tabulkami či grafy.

Čtenářská gramotnost

Vymezení čtenářské gramotnosti ve výzkumu PISA:

Čtenářská gramotnost je schopnost porozumět psanému textu, zabývat se jím, přemýšlet o něm a používat ho k dosažení vlastních cílů, k rozvoji vlastních vědomostí a potenciálu a k aktivní účasti ve společnosti.

Čeští žáci dosáhli v testu čtenářské gramotnosti jen podprůměrného výsledku. Srovnatelného výsledku ze zemí OECD dosáhli např. žáci na Slovensku, v Itálii a Španělsku. Horší výsledek měli jen žáci Turecka, Chile a Mexika.

Podíváme-li se na srovnání výsledků s rokem 2000, kdy bylo čtení též hlavní testovanou oblastí, došlo k významnému zhoršení ve čtyřech zemích. Bohužel mezi ně patří i Česká republika (spolu se Švédskem, Irskem a Austrálií). V sedmi zemích se výsledky naopak výrazně zlepšily, řadí se k nim také Polsko, Maďarsko a Německo.

V České republice významně vzrostlo i procento žáků, kteří se nacházejí pod druhou, základní, úrovní způsobilosti, a to z 17,5 % na 23,1 %. Téměř čtvrtina českých žáků by tedy mohla mít díky nedostatečným čtenářským kompetencím problémy při uplatnění v dalším životě.

Na zhoršení našich výsledků se podílejí zejména chlapci, zhoršení dívek bylo nevýznamné. Druhé úrovně způsobilosti nedosáhlo 30,8 % českých chlapců (dívek 14,3 %). Snížilo se také zastoupení českých chlapců na dvou nejvyšších úrovních způsobilosti.

Co se týče sledovaných kompetencí, měli čeští žáci největší problémy se zhodnocením textu, Poněkud lépe si pak vedli při práci se souvislými texty, což je změna oproti roku 2000, kdy byli naopak úspěšnější v úlohách s texty nesouvislými.

Matematická gramotnost

Vymezení matematické gramotnosti ve výzkumu PISA:

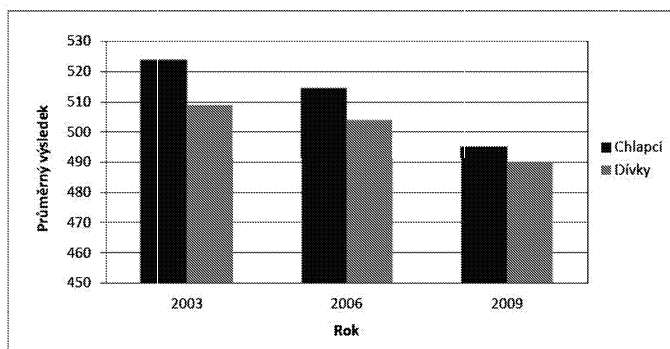
Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, jakou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.

V oblasti matematické gramotnosti byl výsledek českých žáků na úrovni průměru, posunuli jsme se ale do „spodní části“ průměrných zemí. Srovnatelného výsledku dosáhli např. žáci Slovenska, Polska, Maďarska. Nejlepší byli žáci Koreje a Finska.

Oproti roku 2003, kdy byla matematika hlavní testovanou oblastí, se výsledky českých žáků výrazně zhoršily. Jde bohužel o největší zhoršení ze všech 40 zemí, které se obou cyklů zúčastnily.

S poklesem výsledků českých žáků vzrostlo i procento těch, kteří nedosáhli druhé, základní, úrovně způsobilosti, na které mají mít žáci osvojeny základní matematické znalosti a dovednosti. V roce 2009 to bylo 22,3 % žáků, což je výrazně více než 16,6 % v roce 2003. Podíl českých žáků na dvou nejvyšších úrovních se snížil z 18,3 % v roce 2003 na 11,7 % v roce 2009.

Rovněž v matematice se zhoršili čeští chlapci více než dívky (viz obr. 1). Rozdíl ve výsledku mezi chlapci a dívkami tak již není statisticky významný, zatímco v roce 2003 ještě byl, a to ve prospěch chlapců.



Obr. 1 Výsledky českých chlapců a dívek v matematice v letech 2003, 2006, 2009

Přírodovědná gramotnost

Vymezení přírodovědné gramotnosti ve výzkumu PISA:

Přírodovědná gramotnost je schopnost využívat přírodovědné vědomosti, klást otázky a z daných skutečností vyvozovat závěry, které vedou k porozumění světu přírody a pomáhají v rozhodování o něm a o změnách působených lidskou činností.

Ve všech dosavadních mezinárodních šetřeních jak výzkumu PISA, tak výzkumu TIMSS dosahovali čeští žáci v přírodních vědách nadprůměrných výsledků. Ve výzkumu PISA 2009 poprvé klesli do oblasti průměru, jejich výsledek odpovídá průměru zemí OECD. Srovnatelného výsledku dosáhli z okolních zemí žáci Maďarska. Nejlepší výsledek měli žáci Finska.

Od roku 2006, kdy byly přírodní vědy hlavní testovanou oblastí, se výsledek českých žáků významně zhoršil. Z 56 zemí, které se obou cyklů zúčastnily, se jednalo o největší propad.

Spolu se zhoršením výsledků se zvětšil (z 15,5 % na 17,3 %) i podíl českých žáků pod druhou, základní úroveň způsobilosti a poklesl jejich podíl na dvou nejvyšších úrovních (z 11,6 % na 8,4 %).

Rozdíly ve výsledcích chlapců a dívek jsou v přírodních vědách v zemích OECD všeobecně malé ve srovnání se čtením a matematikou. I v České republice byl tento rozdíl nevýznamný, přičemž dívky měly výsledek nepatrně lepší než chlapci.

4. Rozdíly ve výsledcích českých žáků různých typů škol

Vzorek žáků v České republice byl vybrán tak, aby bylo možné porovnat mezi sebou výsledky žáků navštěvujících různé druhy škol. V tabulkách 1 – 3 jsou uvedeny průměrné výsledky žáků různých škol v jednotlivých oblastech gramotnosti. Vývoj výsledků čtenářské gramotnosti lze sledovat od roku 2000, kdy byla hlavní testovanou oblastí; výsledky v matematice lze takto sledovat od roku 2003 a v přírodních vědách až od roku 2006.

Ve čtenářské gramotnosti (tab. 1) se od roku 2000 do roku 2009 významně zhoršili žáci základních škol a středních odborných škol (s maturitou i bez). Výsledky žáků gymnázií se prakticky nezměnily. Žáci speciálních škol se v uvedeném období významně zlepšili.

V matematické gramotnosti (tab. 2) se v období mezi roky 2003 a 2009 zhoršily výsledky žáků všech druhů škol s výjimkou škol speciálních, které zůstaly zhruba na stejné úrovni.

Změny ve výsledcích v přírodovědné gramotnosti (tab. 3) lze sledovat jen v období od roku 2006 do roku 2009. Ke zhoršení výsledků došlo ve všech druzích škol kromě středních odborných bez maturity, kde se téměř nezměnily.

Tabulka 1: Výsledky podle typů škol – čtení

Čtenářská gramotnost	Průměrný výsledek			
	2000	2003	2006	2009
Základní škola	474	469	457	449
Víceleté gymnázium	592	593	609	587
Čtyřleté gymnázium	582	584	603	581
SOŠ, SOU s maturitou	525	517	522	502
SOŠ, SOU bez maturity	436	433	386	414
Speciální škola	267	300	314	338
ČR	492	489	483	478

Tabulka 2: Výsledky podle typů škol – matematika

Matematická gramotnost	Průměrný výsledek		
	2003	2006	2009
Základní škola	495	482	460
Víceleté gymnázium	631	635	614
Čtyřleté gymnázium	610	614	583
SOŠ, SOU s maturitou	541	542	515
SOŠ, SOU bez maturity	458	440	438
Speciální škola	369	363	372
ČR	516	510	493

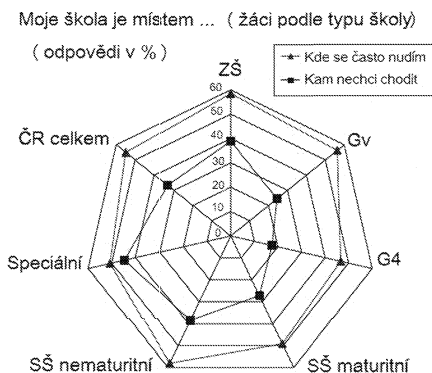
Tabulka 3: Výsledky podle typů škol – přírodní vědy

Přírodovědná gramotnost	Průměrný výsledek	
	2006	2009
Základní škola	488	473
Víceleté gymnázium	628	613
Čtyřleté gymnázium	613	596
SOŠ, SOU s maturitou	542	521
SOŠ, SOU bez maturity	443	448
Speciální škola	375	314
ČR	513	501

5. Závěr

Výsledky výzkumu PISA 2009 potvrdily klesající trend ve výsledcích, které dosahují čeští žáci v mezinárodních výzkumech matematického a přírodovědného vzdělávání a čtenářské gramotnosti. Propad byl zaznamenán již v roce 2007 ve výzkumu TIMSS [2], který je zaměřen více na školní vědomosti a dovednosti dané učebními osnovami. Zde se zhoršily výsledky v matematice, jak u žáků čtvrtých, tak osmých ročníků. V přírodních vědách se zhoršili žáci čtvrtých tříd. Je vidět, že v mezinárodním srovnání se čeští žáci zhoršují jak ve zvládnání školního učiva, tak ve schopnostech používat získané vědomosti a dovednosti v praktických životních situacích.

Výsledky mezinárodních srovnávacích šetření jistě nejsou jediným měřítkem kvality vzdělávacího systému. Stejně tak by reakcí na uvedené výsledky nemělo být trénování žáků na testy TIMSS a PISA za účelem vylepšeného pořadí v žebříčcích. Na druhé straně setrvalý propad ve výsledcích o něčem nedobřím svědčí. Určitě proto stojí za to výsledky hlouběji analyzovat a hledat příčiny neúspěchu. Podrobnější pohled na jednotlivé úlohy může ukázat např. to, že se znalostmi potřebnými k řešení dané úlohy se čeští žáci na dané věkové úrovni ve škole běžně nesetkají. Pak je otázkou, zda to tak má být či ne. Jinde se může ukázat, že ač se dané učivo ve škole probírá, žáci ho přesto nezvládají a neumí ho aplikovat. Pak můžeme hledat cesty, jak to učit lépe.



Obr. 2 Vztah žáků ke škole v různých druzích škol (jde o procento žáků, kteří odpověděli „rozhodně souhlasím“, „spíše souhlasím“)

Předpokladem pro to, aby se výsledky žáků zlepšovaly, je, že se žáci sami také vzdělávat chtějí. Dotazníková šetření bohužel ukázala na nepříliš dobrý vztah českých žáků ke škole (viz obr. 2). Více než polovina všech českých patnáctiletých žáků se ve škole často nudí a třetina do školy nechce chodit. Nejlepší vztah ke škole mají žáci čtyřletých gymnázií (G4), přesto i zde téměř polovina z nich uvádí, že se ve škole nudí.

L i t e r a t u r a

- [1] *Mandíková, D. – Palečková, J.*: Přírodovědná gramotnost českých žáků – výsledky výzkumu PISA 2006 MFI 18, č. 4, Prometheus, Praha 2008. s. 214–229.
- [2] *Mandíková, D. – Tomášek, V.*: Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2007. MFI, 19, č. 5, Prometheus, Praha 2010. s. 275–291.
- [3] *Palečková, J. – Tomášek, V. – Basl. J.*: Umíme ještě číst? Hlavní zjištění výzkumu PISA 2009. ÚIV, Praha 2010.
- [4] *Palečková, J. a kol.*: Hlavní zjištění výzkumu PISA 2006. Poradí si žáci s přírodními vědami? ÚIV, Praha 2007.
- [5] *Palečková, J. – Tomášek, V.*: Učení pro zítřek. Praha, ÚIV, 2005.
- [6] *Palečková, J. – Frýzková, M.*: Přírodovědné úlohy výzkumu PISA. ÚIV, Praha 2007.
- [7] *Straková, J. a kol.*: Vědomosti a dovednosti pro život. Čtenářská, matematická a přírodovědná gramotnost patnáctiletých žáků. Praha, ÚIV, 2002.
- [8] *Tomášek, V. – Frýzková, M. – Potužníková, E.*: Netradiční úlohy. Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA. Praha, ÚIV 2006.

Další informace a materiály k výzkumu PISA lze nalézt na adresách:

Mezinárodní stránky: <http://www.pisa.oecd.org>

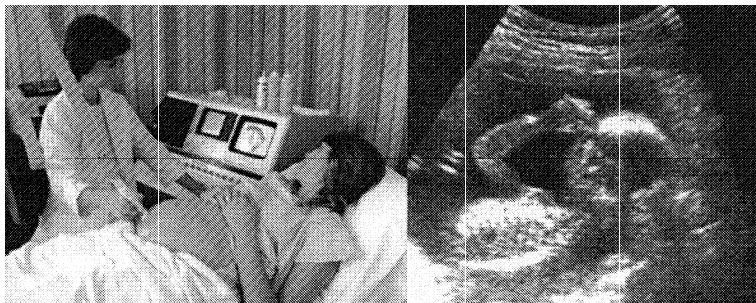
Národní stránky: <http://www.uiv.cz/rubrika/18>

Příloha: Ukázka úloh

Pro představu o charakteru přírodovědných a matematických úloh používaných ve výzkumu PISA uvádíme ukázkou několika otázek z úloh uvolněných v dřívějších letech. Po šetření v roce 2009 žádná z matematických ani přírodovědných úloh uvolněna nebyla. Další úlohy naleznete např. v publikaci [6] a [8].

Přírodovědná úloha 1

ULTRAZVUK



V mnoha zemích je možné zobrazit plod (vyvíjející se dítě) ultrazvukovým snímáním (echografie). Ultrazvuk je považován za bezpečný pro matku i dítě.

Lékařka drží sondu a pohybuje s ní po břiše matky. Ultrazvukové vlny se přenášejí do břicha.

Uvnitř břicha se odrážejí od povrchu plodu. Takto odražené vlny zachycuje opět sonda a předává je do přístroje, který vytvoří obraz.

Otázka 1: ULTRAZVUK

Aby mohl ultrazvukový přístroj vytvořit obraz, potřebuje spočítat **vzdálenost** mezi plodem a sondou.

Ultrazvukové vlny se v břiše pohybují rychlostí 1540 m/s . Jaké měření musí přístroj provést, aby mohl spočítat vzdálenost?

Otázka 2: ULTRAZVUK

Obraz plodu lze získat také pomocí rentgenových paprsků. Ženám se však doporučuje, aby se během těhotenství rentgenování břicha vyhýbaly.

Proč by se měly ženy během těhotenství vyhýbat rentgenování břicha?

Otázka 3: ULTRAZVUK

Může dát ultrazvukové vyšetření nastávajících matek odpověď na následující otázky? V každém řádku zakroužkuj „Ano“ nebo „Ne“.

Může dát ultrazvukové vyšetření odpověď na tuto otázku?	Ano nebo ne?
Je v břiše více než jedno dítě?	Ano / Ne
Jakou barvu mají oči dítěte?	Ano / Ne
Jaké je pohlaví dítěte?	Ano / Ne
Má dítě správnou velikost?	Ano / Ne

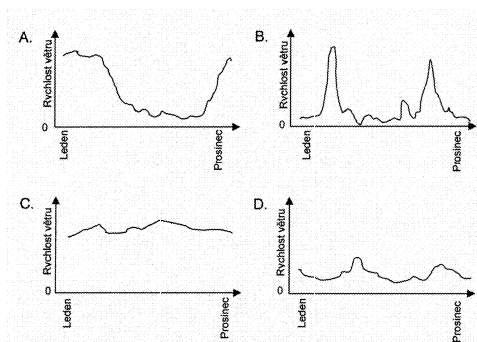
Přírodovědná úloha 2

VĚTRNÉ ELEKTRÁRNY



Větrná energie je obecně považována za zdroj energie, který může nahradit výrobu elektřiny spalováním uhlí a ropy. Stavby na obrázku jsou větrné elektrárny, jejichž lopatkami otáčí vítr. Lopatky roztáčí generátory, které vyrábějí elektřinu.

Otázka 1: VĚTRNÉ ELEKTRÁRNY



Grafy zobrazují průměrnou rychlost větru během roku na čtyřech různých místech. Který z následujících grafů znázorňuje nejvhodnější místo pro stavbu větrné elektrárny?

Otázka 2: VĚTRNÉ ELEKTRÁRNY

Napiš jednu konkrétní výhodu a jednu konkrétní nevýhodu výroby energie ve větrných elektrárnách ve srovnání s výrobou energie, při které se využívají fosilní paliva jako uhlí a ropa.

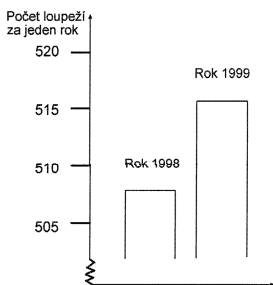
Výhoda

Nevýhoda

Matematická úloha 1

LOUPEŽE

Otázka 1: LOUPEŽE



Televizní reportér ukázal tento graf a řekl:

„Z grafu je patrný prudký nárůst počtu loupeží v roce 1999 oproti roku 1998.“

Považuješ reportérovo tvrzení za odpovídající vysvětlení grafu? Zdůvodni svou odpověď.

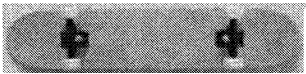
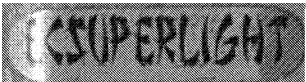
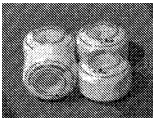
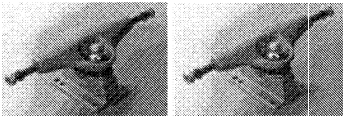
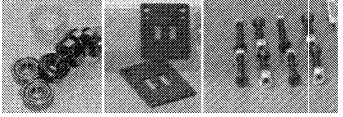
Matematická úloha 2

SKATEBOARD

Emil rád jezdí na skateboardu. Zašel do obchodu RÁJ SKATERŮ, aby zjistil ceny.

V tomto obchodě je k dostání kompletní skateboard. Nebo se tam dá koupit prkno, sada 4 koleček, sada 2 závěsů a sada spojovacích prvků a pak si můžeš sestavit svůj vlastní skateboard.

Ceny zboží v obchodě jsou:

Zboží	Ceny v zedech	
kompletní skateboard	82 nebo 84	
prkno	45, 60 nebo 65	
sada 4 koleček	14 nebo 36	
sada 2 závěsů	16	
sada spojovacích prvků (ložiska, gumové podložky, šrouby a matky)	10 nebo 20	

Otázka 1: SKATEBOARD

Emil si chce svůj skateboard sestavit sám. Jaká je v tomto obchodě nejnižší cena a nejvyšší cena za skateboard v dílech?

- (a) Nejnižší cena: zedů
(b) Nejvyšší cena: zedů

Otázka 2: SKATEBOARD

M520Q02

V obchodě mají tři typy prken, dva typy koleček a dva typy spojovacích prvků. Závěsy jsou jen jednoho druhu.

Kolik různých skateboardů může Emil sestavit?

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

Emil má 120 zedů a chce si koupit ten nejdražší skateboard, na který mu stačí peníze.

Kolik si může dovolit utratit Emil za každý ze 4 dílů? Doplň odpovědi do tabulky.

Díl	Částka (v zedech)
prkno	
kolečka	
závěsy	
spojovací prvky	

Reklamní balón

MIROSLAVA JAREŠOVÁ – IVO VOLF

SŠPST a VOŠ Chrudim, Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V běžném životě se velmi často můžeme setkat s tzv. *reklamními balóny*. Podívejme se na takový balón z fyzikálního hlediska a zkusme vyřešit několik dílčích úloh s tím souvisejících.

Uvažujme, že máme reklamní balón tvaru koule o průměru 5 m a hmotnosti 19 kg (když je prázdný). Balón naplníme heliem tak, že uvnitř je přetlak $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa. Teplota vzduchu u povrchu Země je 15°C , relativní molekulová hmotnost vzduchu je $M_r = 29$, pro helium je $M_{\text{rHe}} = 4$, $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. V našem modelu budeme dále uvažovat, že balón je vyroben z neroztažitelného materiálu, vzduch i helium budeme považovat za ideální plyn a teplota helia uvnitř balónu je stejná jako teplota okolního vzduchu. Za těchto předpokladů nyní vyřešíme několik dílčích, vzájemně na sebe navazujících problémů, jejichž zadání je níže zformulováno.

- a) Určete hmotnost helia potřebného k naplnění balónu.
- b) Po naplnění heliem je balón pomocí lana přivázán k Zemi. Vypočtete, jak velkou silou je napínáno lano.
- c) Lano nyní uvolníme, takže balón začne stoupat zrychleným pohybem směrem vzhůru. Určete velikost zrychlení pohybu v okamžiku uvolnění lana.
- d) Balón pak stoupá do výšky. S rostoucí výškou klesá tlak nad povrchem podle vztahu

$$p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}, \quad (1)$$

kde $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa je tlak u povrchu Země, $\varrho_0 = 1,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota u povrchu Země při teplotě 15°C . Tento vztah platí za předpokladu, že teplota je ve všech místech atmosféry stálá. S rostoucí výškou se také mění hustota plynu. Odvoďte vztah (1) pro tlak. Pomocí vztahu (1) pak odvoďte vztah pro změnu hustoty s rostoucí výškou za výše uvedených předpokladů.

e) Určete největší výšku, do které by balón vystoupil, pokud bychom uvažovali, že teplota vzduchu se s rostoucí výškou nemění.

f) Vzhledem k tomu, že balón vystoupil do výšky $h < 11$ km, můžeme uvažovat, že pokles teploty je lineární s rostoucí výškou, a to podle vztahu

$$t = t_0 - 0,0065h, \quad (2)$$

kde za h je třeba dosazovat hodnoty v metrech. Teplota pak vyjde ve stupních Celsia (viz [1]). Určete přibližnou teplotu ve výšce, do které balón vystoupil.

g) Uvažujme dále, že teplota se mění lineárně podle vztahu (2). Hustota suchého vzduchu ϱ při tlaku p a teplotě t se určí pomocí výrazu

$$\varrho = \frac{1,276}{1 + 0,00366t} \frac{p}{p_0}.$$

Tlak se v tomto případě mění podle vztahu

$$p = p_0 \left(1 - 0,0065 \cdot \frac{h}{273,15 + t} \right)^{5,225}.$$

(Výše uvedené vztahy je možno nalézt v [1] na str. 157.)

Určete, do jaké největší výšky balón vystoupil za těchto předpokladů.

Řešení

a) Pro výpočet hmotnosti helia v balónu použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m}RT,$$

z čehož

$$m = \frac{pV \cdot M_m}{RT} = \frac{2p_0 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot M_m}{RT} = \frac{p_0 \pi d^3 \cdot M_m}{3RT}.$$

Pro dané hodnoty $m = \frac{1,0 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 5^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 8,31 \cdot 288}$ kg ≈ 22 kg.

b) Hmotnost balónu naplněného heliem je $M \approx (19 + 22)$ kg = 41 kg. Je-li balón naplněn heliem, je velikost výslednice vztahové a tíhové síly rovna síle, kterou je napínáno lano. Platí

$$F = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \varrho_0 g - Mg = \frac{1}{6}\pi d^3 \varrho_0 g - Mg.$$

Pro dané hodnoty $F = \left(\frac{1}{6}\pi \cdot 5^3 \cdot 1,21 \cdot 9,81 - 41 \cdot 9,81\right)$ N ≈ 375 N.

c) Podle 2. Newtonova pohybového zákona se balón v okamžiku uvolnění lana pohybuje se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F}{m} \approx \frac{375}{41} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 9,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

d) Při odvození vztahu (1) si vrstvu vzduchu rozdělíme na tenké vrstvičky o tloušťce Δh , přičemž budeme uvažovat, že ve vrstvě o tloušťce Δh platí podle vzorce pro hydrostatický tlak

$$\Delta p = -\varrho g \Delta h, \quad (3)$$

kde ϱ je hustota vzduchu.

Znaménko minus je zde proto, že narozdíl od kapalin měříme výšku od povrchu Země směrem svisle vzhůru, u kapalin jsme výšku měřili od hladiny kapaliny směrem svisle dolů. S rostoucí výškou tedy tlak vzduchu klesá.

Dále použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_m}RT,$$

z čehož pro hustotu ϱ ve výšce, kde je tlak p , vyplývá

$$\varrho = \frac{p \cdot M_{\text{m}}}{RT}.$$

Obdobně také u povrchu Země platí

$$\varrho_0 = \frac{p_0 \cdot M_{\text{m}}}{RT}.$$

Potom platí $\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}$, z čehož

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{p}{p_0}. \quad (4)$$

Vztah (4) nyní dosadíme do vztahu (3). Dostaneme

$$\Delta p = -\frac{\varrho_0}{p_0} p g \Delta h.$$

Budeme-li tloušťku vrstvy o výšce Δh čím dál více zmenšovat, můžeme přejít k vyjádření pomocí diferenciálů, tj.

$$dp = -\frac{\varrho_0}{p_0} p g dh.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici, kterou budeme řešit separací proměnných, tj.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g dh.$$

Po integraci obdržíme

$$\ln p = -\frac{\varrho_0}{p_0} g h + C.$$

Integrační konstantu C stanovíme z počátečních podmínek: ve výšce $h = 0$ je $p = p_0$, a tedy $C = \ln p_0$.

Po dosazení dostaneme

$$\ln p = -\frac{\varrho_0}{p_0} g h + \ln p_0. \quad (5)$$

Rovnici (5) můžeme přepsat do tvaru

$$\ln p = \ln e^{-\frac{\varrho_0}{p_0}gh} + \ln p_0.$$

Po odlogaritmování již dostaneme hledaný vztah (1) pro tlak

$$p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}}.$$

Dosadíme-li vztah (1) do vztahu (4), dostaneme vztah pro závislost hustoty na výšce:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}}.$$

e) V největší výšce H platí $F_{vz} = F_G$ a tedy

$$V \varrho g = Mg.$$

Po dosazení za V dostaneme

$$\frac{1}{6} \pi d^3 \cdot \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 gH}{p_0}} = M,$$

z čehož

$$H = \frac{p_0}{\varrho_0 g} \ln \frac{\pi d^3 \varrho_0}{6M}.$$

Pro dané hodnoty: $H = \frac{1,0 \cdot 10^5}{1,21 \cdot 9,81} \ln \frac{\pi \cdot 5^3 \cdot 1,21}{6 \cdot 41} \text{ m} \approx 5\,550 \text{ m}.$

Poznámka: Přesvědčte se, že v této výšce je možno ještě považovat gravitační pole za homogenní.

f) Teplotu ve výšce H dostaneme dosazením do vztahu (2), tj.

$$t \approx (15 - 0,006\,5 \cdot 5\,550) \text{ }^\circ\text{C} \approx -21 \text{ }^\circ\text{C}.$$

g) Opět vyjdeme z rovnosti $F_{vz} = F_G$, z čehož $\frac{M}{V} = \frac{6M}{\pi d^3} = \varrho$. Podle zadání je možno pro hustotu ϱ psát

$$\varrho = \frac{1,276}{1 + 0,003\,66\,t\,p_0} \frac{p}{p_0} = \frac{1,276}{1 + 0,003\,66\,t} \left(1 - 0,006\,5 \cdot \frac{h}{273,15 + t} \right)^{5,225}.$$

Po dosazení za $t = t_0 - 0,0065 h = 15 - 0,0065 h$ a za $\varrho = \frac{6M}{\pi d^3}$ dostaneme

$$\frac{6M}{\pi d^3} = \frac{1,276}{1,0549 - 2,379 \cdot 10^{-5} h} \left(1 - 0,0065 \cdot \frac{h}{288,15 - 0,0065 h} \right)^{5,225}.$$

Tuto rovnici budeme řešit přibližnou metodou pomocí Excelu.

$$\text{Označme } A = \frac{6M}{\pi d^3} \cdot \frac{1,0549 - 2,379 \cdot 10^{-5} h}{1,276},$$

$$B = \left(1 - 0,0065 \cdot \frac{h}{288,15 - 0,0065 h} \right)^{5,225}.$$

Budeme hledat, pro jakou hodnotu h nastane situace, že $A = B$, což je možno sledovat v níže uvedené tabulce.

h	A	B
0	0,490 936	1,000 000
1 000	0,479 256	0,879 022
2 000	0,467 577	0,765 023
3 000	0,455 898	0,658 385
4 000	0,444 218	0,559 461
5 000	0,432 539	0,468 571
5 495	0,426 758	0,426 638
5 500	0,426 699	0,426 225

Z tabulky v Excelu je zřejmé, že balón by v tomto případě vystoupil do výšky přibližně 5 500 m.

Shrnutí

Při řešení problémů spojených s reklamním balónem jsme se omezili na modelovou situaci, že materiál balónu je pevný a balón nemění svůj objem při tlakových změnách. V části f) jsme dále neuvažovali teplotní změny při stoupání balónu, což ale v praxi nenastává. Přesto nám tento model dal výsledek srovnatelný se situací g), kdy již změnu teploty uvažujeme, ale jen pro výšky do 11 km nad povrchem Země, kdy je pokles teploty lineární.

Část g) opět představuje určitý model dané situace, při níž využíváme vztahy uvedené v [1] na str. 157, které jsou opět určitými aproximacemi. Ve výrazu, který jsme používali pro odhad výšky výstupu balónu, se vyskytuje

celková hmotnost naplněného balónu. Celkovou hmotnost balónu ovlivňuje množství helia (a tedy tlak, na který je balón naplněn). Lze tedy říci, že pokud bychom naplnili balón větším množstvím helia, vystoupil by do menší výšky.

Závěrem je možno konstatovat, že problém výšky výstupu balónu naplněného heliem lze řešit z různých hledisek. Další řešení tohoto problému je možno nalézt např. na stránkách MFO <http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/>, kde je možno vyhledat informaci, že v roce 2004 na Mezinárodní fyzikální olympiádě v Koreji byla tato úloha zadána jako 2. soutěžní úloha. Zde byl také vytvořen model řešení tohoto problému, ale jiný, tentokrát se uvažovalo i se změnou objemu balónu při změně tlaku uvnitř balónu i vně balónu.

L i t e r a t u r a

- [1] *Mikulčák, J. a kol.:* Matematické, fyzikální a chemické tabulky. Praha: Prometheus, 2009. 4. vydání.

(Pokračování ze s. 256)

Svoje knižní díla napsal latinsky (*Institutiones physicae, Experimentalis Compendium physicae, Tentamina Experimentorum* aj.). Spis *Elementa Physica* (1726) byl přeložen do pěti jazyků a sehrál významnou úlohu při rozšiřování Newtonových filozofických názorů po Evropě.

P. van Musschenbroek byl členem Královské vědecké společnosti v Londýně (1734) a francouzské Akademie věd, členem společností věd v Montepellier, Berlíně a Stockholmu. V roce 1754 byl jmenován čestným profesorem na ruské imperiální akademii věd v St. Petersburgu (Petrohradu).

L i t e r a t u r a

- [1] *Mayer, D.:* Pohledy do minulosti elektrotechniky. Nakladatelství Kopp, České Budějovice 1999.
- [2] *Heřman, J.:* Od jantaru k tranzistoru. Vydavatelství FCC PUBLIC, Praha 2006.
- [3] *Heřman, J.:* Vývoj názorů na podstatu elektřiny. ELEKTRO, 2000–2006.
- [4] *Štoll, I.:* Dějiny Fyziky. Prometheus, Praha 2009.
- [5] *Jarolímková, S.:* Láhev zvaná leydenská. ELEKTRO, 1994, č. 2, s. 81.
- [6] *Ottův slovník naučný.* Vyd. a nakl. J. Otta, Praha 1888.
- [7] *Kronika techniky.* Fortuna Print, Praha 1993.

Bohumil Tesařík