

MATEMATIKA

O teleskopických součtech a součinech

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Stanovení součtu (součinu) několika čísel (členů číselné posloupnosti) vyhovující danému předpisu) a řešení úloh, které s touto problematikou souvisejí, patří v oblasti školské matematiky mezi oblíbené celky jak pro žáky, tak i pro jejich učitele. Na druhé straně je třeba konstatovat, že se žáci při výuce matematiky hlouběji seznamují pouze se součty několika po sobě jdoucích členů aritmetické či geometrické posloupnosti, což představuje jen velmi omezený úsek znalostí z uvedené oblasti.

Tento článek je určen především těm učitelům matematiky, jejich žákům a dalším zájemcům, kteří se chtějí o uvedené problematice dovědět něco navíc. Cílem příspěvku je seznámit čtenáře s *metodou teleskopických součtů a součinů*.

Jak již název napovídá, princip této metody je založen na cíleném rozšíření („prodloužení“) daného součtu (součinu) několika čísel takovým způsobem, aby jej vzápětí bylo možno výrazně zjednodušit, tj. co nejvíce snížit počet jeho sčítanců (činitelů). Toho lze dosáhnout, pokud např. každý ze sčítanců lze vyjádřit ve tvaru vhodného rozdílu tak, že většina členů takto upraveného součtu se v závěru navzájem zruší. Takový postup představuje jistou analogii s činností velkého dalekohledu (teleskopu), který je potřeba před vlastním použitím zpravidla prodloužit o určitý počet článků tak, abychom s ním mohli efektivně pracovat (odtud název metody). Zájemcům o tuto problematiku lze doporučit také některé zahraniční zdroje, které jsou zaměřeny především na práci s matematicky talentovanými žáky. Patří mezi ně obě publikace uvedené na konci článku.

V první části příspěvku je prezentováno využití metody teleskopických součtů při řešení několika konkrétních úloh. Druhá část článku je pak věnována problematice teleskopických součinů.

1. Teleskopické součty

Uvedme nejprve několik snazších úloh.

Příklad 1

Určete hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Uvažujme k -tý sčítanec ($k = 1, 2, \dots, n$) daného součtu, pro který platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \quad (1)$$

V daném součtu nahradíme každý sčítanec rozdílem dvou zlomků podle (1). Dostaneme tak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ & = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že uvedené řešení je založeno na následující skutečnosti: Každý sčítanec je nahrazen rozdílem dvou zlomků (v podstatě jde o rozšíření daného součtu, přesněji zdvojnásobení počtu jeho členů, s cílem výrazně v závěru zjednodušit upravený tvar součtu).

Poznámka. K rozkladu (1) lze dospět také jinak – využitím *metody neurčitých koeficientů* při rozkladu k -tého sčítance na tzv. parciální zlomky. Jde o nalezení reálných čísel A a B , která pro každé přirozené číslo k vyhovují vztahu

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}. \quad (2)$$

Tato úloha vede na řešení snadné soustavy dvou lineárních rovnic $A + B = 0$ a $A = 1$ o neznámých A, B , kterou získáme z upravené rovnosti (2) mnohočlenů s proměnnou k . Její řešení $A = 1, B = -1$ odpovídá uvedenému rozkladu (1).

Podobným způsobem lze stanovit např. také hodnotu součtu

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Příklad 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Řešení. Pro každé k přirozené $k > 1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Využitím této nerovnosti pro $k = 2, 3, \dots, n$ a výsledku z příkladu 1 dostaneme postupně

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3

Dokažte, že pro každé přirozené n platí nerovnost

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} < 2.$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé přirozené číslo k platí

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

je daná nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} < 2.$$

Po snadné úpravě však dostáváme přímo nerovnost dokázanou v předešlém příkladu 2.

Příklad 4

Dokažte, že platí následující rovnost

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = 9.$$

Řešení. Usměrníme-li každý ze zlomků na levé straně rovnosti, získáme pouhým „teleskopickým zjednodušením“ celého výrazu na levé straně

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = \\ & = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9, \end{aligned}$$

což bylo třeba dokázat.

Příklad 5

Dokažte následující nerovnosti

a) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{2010}{2011!} < 1,$

b) $\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2011}{2009! + 2010! + 2011!} < \frac{1}{2}.$

Řešení.

a) Podobně jako v příkladu 1 upravíme k -tý sčítanec ($k = 1, 2, \dots, 2010$) na levé straně nerovnosti následujícím způsobem

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{99}{100!} &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2010!} - \frac{1}{2011!} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2011!} < 1, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

b) Jednotlivé sčítance na levé straně nerovnosti upravíme pomocí následující identity. Pro všechna $k = 3, 4, \dots, 2011$ platí

$$\begin{aligned}\frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} &= \frac{k}{k^2(k-2)!} = \frac{1}{k(k-2)!} = \frac{k-1}{k!} = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Pomocí ní upravíme každý sčítanec na levé straně nerovnosti a dostaneme tak

$$\begin{aligned}&\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2011}{2009! + 2010! + 2011!} = \\ &= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2010!} - \frac{1}{2011!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2011!} < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tím je důkaz i této nerovnosti uzavřen.

Analogickým způsobem (využitím metody teleskopických součtů) lze řešit také následující úlohy. U každé z nich je uveden stručný návod, pomocí něhož se každý ze zájemců o tuto problematiku může samostatně pokusit o její řešení.

Příklad 6

Určete hodnotu součtu

$$\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$

[*Návod:* Využijte rovnost

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2(k+1)^2}$$

a dále po úpravě jednotlivých sčítanců metodu teleskopických součtů.]

Příklad 7

Určete hodnotu součtu

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx.$$

[*Návod:* Pro využití metody teleskopických součtů vynásobte nejprve každý člen součtu výrazem $2 \sin \frac{x}{2}$ a dále využijte vzorec

$$2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{(2k-1)x}{2} - \cos \frac{(2k+1)x}{2}$$

pro $k = 1, 2, \dots, n$.]

Poznámka. Podobně lze stanovit také hodnotu součtu

$$C_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx.$$

Příklad 8 (21. USAMO, 1992)

Dokažte rovnost

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}.$$

[*Návod:* Obě strany dokazované rovnosti vynásobte výrazem $\sin 1^\circ$ a dále využijte následující rovnost (argumenty goniometrických funkcí uvažujte ve stupních)

$$\frac{\sin 1}{\cos k \cos(k+1)} = \frac{\sin(k+1) \cos k - \cos(k+1) \sin k}{\cos k \cos(k+1)}$$

pro $k = 0, 1, 2, \dots, 88$.]

Příklad 9 (25. USAMO, 1996)

Dokažte rovnost

$$2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ = 90 \cotg 1^\circ.$$

[*Návod:* Obě strany dokazované rovnosti vynásobte výrazem $\sin 1^\circ$ a dále využijte identitu (argumenty goniometrických funkcí uvažujte ve stupních)

$$2 \sin 2k \sin 1 = \cos(2k - 1) - \cos(2k + 1).$$

pro $k = 1, 2, \dots, 89$.]

2. Teleskopické součiny

Ve druhé části se zaměříme na prezentaci metody teleskopických součinů. S uvedenou problematikou se mj. mohli setkat již v roce 1972 řešitelé nejvyšší věkové kategorie naší Matematické olympiády (viz příklady 14 a 15, které ponecháváme čtenářům k samostatnému procvičení).

Příklad 10

Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Řešení. Označme

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \quad \text{a} \quad B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101}.$$

Protože pro všechna n přirozená platí očividně nerovnost

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2},$$

obdržíme využitím „teleskopického zkrácení“ většiny činitelů v čitateli a jmenovateli zlomku (součinu) $A \cdot B$ postupně následující odhady

$$A^2 < A \cdot B = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}, \quad \text{tj.} \quad A < \frac{1}{10},$$

což přímo dokazuje danou nerovnost.

Příklad 11

Dokažte nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2009 \cdot 2011}\right) < 2.$$

Řešení. Každý z činitelů na levé straně dokazované nerovnosti upravíme následujícím způsobem: Pro každé $k = 2, 3, \dots, 2010$ platí

$$1 + \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

Dále využijeme (stejně jako v předchozím případě) „teleskopické zkrácení“ celého výrazu. Dostaneme tak

$$\frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{2010^2}{2009 \cdot 2011} = 2 \cdot \frac{2010}{2011} < 2.$$

Tím je důkaz uzavřen.

Zcela analogicky lze postupovat také při důkazu následující identity. O její snadný důkaz se můžete pokusit samostatně.

Příklad 12

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí rovnost

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Příklad 13

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí nerovnost

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} < \frac{3}{2}.$$

Řešení. Využitím známých vzorců $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$, jež platí pro libovolná reálná čísla a, b , dostaneme speciální volbou $a = 2, 3, \dots, n$ a $b = 1$

$$\frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 13} \cdot \frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 21} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}.$$

Protože pro $k = 2, 3, \dots, n-1$ platí rovnost

$$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1,$$

lze poslední součin upravit (po teleskopickém zkrácení) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 13} \cdot \frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 21} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)(n^2 - n + 1)}{(n-1)(n^2 + n + 1)} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{n^2 + n + 1} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2 + n + 1} < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz nerovnosti uzavřen.

Závěrečné dvě (na sebe navazující úlohy) jsou určeny čtenářům k samostatnému procvičení problematiky této části příspěvku.

Příklad 14 (21. ročník MO, A–II–1a)

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) &= \\ &= \frac{(n+1)^2}{4n}. \end{aligned}$$

Příklad 15 (21. ročník MO, A–III–1)

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí nerovnost

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{27}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

Literatura

- [1] *Andreescu, T. – Gelca, R.*: Mathematical Olympiad Challenges. Birkäuser. Boston 2000.
- [2] *Larson, L. C.*: Metódy riešenia matematických problémov. Vyd. Alfa, Bratislava 1990.

Příspěvek vznikl za podpory projektu OPVK – CZ.1.07/1.2.12/01.0027.

Vyučování matematiky na gymnáziu ve Svobodném státě Sasko (SRN)

MIROSLAV BARTOŠEK

Praha

1. Úvod

Tento článek vznikl z podnětu vzešlého při náhodném setkání po mém návratu z téměř desetiletého působení v Sasku. I během pobytu v Německu jsem zůstal v kontaktu s děním ve školství v České republice a upozoroval, jak málo informací o dění ve školství v Německu je v České republice publikováno a pokud tyto informace proniknou do médií, jsou často mylně prezentovány, jako by se týkaly školství v celé Spolkové republice Německo, i když se týkají jen jedné ze spolkových zemí. Školské systémy i pracovní podmínky učitelů se mezi spolkovými zeměmi liší. Např. ve Svobodném státě Sasko (dále Sasko) je osmileté všeobecně vzdělávací gymnázium zakončeno maturitou po 12 letech školní docházky, ale v některých jiných spolkových zemích po 13 letech. Proto ke správné interpretaci informací o školství v Německu (o výuce některého předmětu) je třeba znát kontext, v němž výuka probíhá. Článek se zaměřuje na výuku matematiky na všeobecně vzdělávacím osmiletém gymnáziu ve Svobodném státě Sasko, ve spolkové zemi bezprostředně sousedící s Českou republikou.

2. Reakce na výzkumy PISA ve Spolkové republice Německo

Školství v Německu je v kompetenci jednotlivých spolkových zemí, není jednotné na celém území Spolkové republiky Německo. Jakkoli je školství v kompetenci jednotlivých spolkových zemí (a jim na roveň postavených hansovních měst), je výstupní úroveň žáků a certifikace dokumentů o dosaženém vzdělání předmětem celostátního – spolkového – zájmu. Školství je na spolkové (tj. celorepublikové) úrovni koordinováno spolkovým ministerstvem školství, u kterého je zřízena Konference ministrů školství spolkových zemí. Tento orgán také vydává spolkové Vzdělávací standardy, jakožto výsledek dohody zemských ministrů školství.

Výsledky německých žáků ve výzkumu PISA v r. 2003 byly přijaty v Německu se zklamáním. I když se ozvaly z odborných kruhů hlasy upo-

zornující na specifičnost výzkumů PISA a vnitroněmecká analýza ukázala rozdíly ve výsledcích jednotlivých spolkových zemí, bylo rozhodnuto iniciovat ve školství spolkových zemí změny vedoucí k zlepšení vzdělávacích výsledků žádoucím směrem. Změny se realizují v rámci kompetencí zemských vlád a parlamentů spolkových zemí postupně změnami v učebních plánech, organizaci maturit a v řízení školství,

Výsledky výzkumu PISA 2009 ukazují, že na rozdíl od České republiky, se výsledky německých žáků v matematické i přírodovědné gramotnosti zlepšily.

3. Svobodný stát Sasko

V Sasku byl ponechán systém základních škol (1. až 4. ročník), a všeobecně vzdělávacích gymnázií (5. až 12. ročník). Zachován zůstal i systém 21 vybraných gymnázií s prohloubenou výukou některého oboru vzdělávání, jakožto součást systému péče o talenty. S ohledem na klesající počty dětí v populačních ročnících se redukuje síť škol. Významné změny se udály ve vymezení cílů vzdělávání, s tím souvisejí i změny v obsahu a organizaci a metodiky výuky, v učebních plánech, změny v obsahu i organizaci maturit, zvýšil se podíl školy na vytváření školního kurikula, změny lze pozorovat oblasti evaluace škol, dalším vzdělávání učitelů a v řízení školství.

Pro rámcovou představu o výuce matematiky dle nových učebních plánů v čtyřleté základní škole: V základní škole (Grundschule) mají žáci matematiku v každém ročníku 5 hodin týdně. Součástí učebního plánu jsou osnovy výuky obsahující obecné pedagogické pokyny definující cíle vzdělávání, cíle výuky předmětu a specifické didaktické poznámky k jednotlivým tématům. Z obecných cílů matematiky kromě samozřejmých cílů jako počítání do milionu, znalosti základních matematických pojmů, schopnosti měřit a hodnotit, je pozoruhodné uvedení cíle: „Žáci rozvíjejí schopnost matematického modelování, exaktní způsob práce a radost z řešení matematických problémů a poznávání matematických souvislostí v každodenním životě.“

Ve 2. pololetí 4. ročníku se mohou žáci hlásit do 5. ročníku na gymnázium (tj. 1. ročníku osmiletého gymnázia). Žáci, kteří nebyli přijati ke studiu na gymnázium pokračují ve studiu na tzv. Mittelschule (střední škole), což je obdoba 2. stupně základní školy v České republice.

4. Všeobecně vzdělávací gymnázium v Sasku

Všeobecně vzdělávací gymnázium je osmileté a je členěno na 5. až 10. ročník školní docházky (Sekundarstufe I) a 11. až 12. ročník (Sekundarstufe II – Oberstufe).

Na tato gymnázia jsou žáci přijímáni po ukončení 4. ročníku základní školy (Grundschule). O přijetí rozhoduje ředitel gymnázia na základě přihlášky, prospěchu žáka a vyjádření základní školy. Pouze do 21 gymnázií s prohloubenou výukou konají uchazeči i přijímací zkoušky.

Na závěr studia žáci, kteří splnili předepsané podmínky (úspěšně zakončený závěrečný ročník, dosažení předepsaného počtu bodů v maturitních předmětech za poslední dva roky studia) konají maturitní zkoušku (Abiturprüfung). Matematika spolu s mateřským jazykem, tj. němčinou, jsou povinnými maturitními předměty, které mají písemnou, centrálně zadávanou část. Úspěšní absolventi zkoušky obdrží čtyřstránkové výstupní vysvědčení (Hochschulreifezeugnis – Vysvědčení o zralosti ke studiu na vysoké škole). Toto vysvědčení je opravňuje ucházet se o studium na kterékoli vysoké škole. Vysvědčení kromě výsledků centrálně zadávané maturitní zkoušky a školní ústní maturitní zkoušky zahrnuje i výsledky studia v posledních dvou ročnících. Do výsledku může být na přání žáka započítáno i hodnocení samostatné odborné práce (tzv. BeLL – Besondere Lernleistung), kterou žák vypracoval a úspěšně obhájil před odbornou porotou na veřejném kolokviu ve škole. BeLL je příležitostí pro talentované a odborně zaměřené žáky, jak svou profilaci promítnout do výsledného hodnocení na uvedeném vysvědčení. Z těchto výsledků se totiž stanoví dle předem známých, státem definovaných pravidel, průměrná známka uvedená na výstupním vysvědčení. Průměrná známka hraje důležitou roli při přijímání na vysokou školu, přijímací zkoušky na vysokou školu, tak jak je známe v České republice, se nekonají.

Byl vytvořen větší prostor pro iniciativy škol, každá škola dotváří stanovený učební plán ve formě školního programu, který uvádí na svých internetových stránkách. Školy aktivně organizují i vlastní vnitřní další vzdělávání svých pedagogů

Změnil se i systém hodnocení škol a kontroly výsledků vzdělávání. Školy provádějí autoevaluace. Předmětové komise školy sjednocují pravidla hodnocení žáků a společných písemných prací (Klassenarbeiten, Klausuren). Výsledky těchto prací ve třídách sleduje a schvaluje vedení školy. Chod školy ovlivňuje významně i Rada školy, sestavená ze zástupců rodičů, učí-

telů a žáků. Do personálních otázek vstupuje učiteli volená Personální rada. (Pedagogičtí pracovníci jsou zaměstnanci regionálních státních úřadů, provozní pracovníci jsou zaměstnanci místních samosprávných úřadů.)

Hodnocení škol zvnějšku provádí školská správa. Systematické jsou hospitační návštěvy škol, zaměřují se však spíše na chod a výsledky školy. Celostátně stanovený rámcový učební plán a rámcové učební osnovy stanovují povinná předmětová témata i jejich začlenění do ročníků. To umožňuje školní správě zadávat do ročníků centrálně zadané kontrolní písemné sondy z jednotlivých předmětů i v průběhu studia, např. v 8. nebo 9. či 6. ročníku. Na konci 10. ročníku píší všichni žáci centrálně zadané písemné práce z matematiky, němčiny a angličtiny. Písemná zkouška trvá v matematice 90 minut a má 2 části: Část A zahrnuje úlohy omezené komplexnosti, trvá 25 minut a nejsou povoleny kalkulatory. Část B obsahuje úlohy vyšší úrovně komplexnosti, trvá 65 minut a při řešení jsou povoleny programovatelné kalkulatory s grafickým výstupem, nyní i s CAS. Práce se opravují a hodnotí centrálně zadaným bodovým systémem a odevzdávají se ke kontrole školské správě. (Výsledek se započítává do žákovy závěrečné klasifikace v příslušném předmětu.) Výsledky analýzy sond, závěrečných prací v 10. ročníku i výsledků maturit jsou projednávány posléze na poradách s řediteli škol a následně v pedagogických sborech.

5. Učební plán všeobecně vzdělávacího gymnázia.

Změny učebních dokumentů připravovaly týmy, jejichž členy byli i vybraní učitelé ze škol. Cílem změn v učebních plánech bylo přizpůsobit styl výuky více mentalitě a společenským podmínkám současných žáků, vytvořit prostor pro práci s médii, pro systematický výcvik v technikách a strategiích učení, pěstování kompetencí k týmové práci, pro chápání učiva v širších souvislostech a jeho propojení s reálným životem, používání a rozvíjení uživatelských kompetencí výpočetní techniky, podporu zájmu o matematicko-přírodovědný obor vzdělávání a techniku, a profilaci žáků prostřednictvím profilujícího vyučování.

Zůstal přitom zachován systém centrálních učebních plánů, což usnadňuje konstrukci centrálně zadávaných písemných zkoušek. Významné změny se udály ve vymezení cílů vzdělávání, s tím souvisejí i změny v obsahu a organizaci a metodiky výuky, v učebních plánech, změny v obsahu i organizaci maturit, zvýšil se podíl školy na vytváření školního kurikula. Na tyto změny navazuje evaluace školy. Na změny byli učitelé připravováni

v dalším vzdělávání učitelů, část tohoto vzdělávání organizovala a dosud organizuje pro své učitele škola formou školních seminářů.

K novým učebním plánům vydala nakladatelství nové řady učebnic, z nichž si může škola podle rozhodnutí pedagogů vybrat.

I nové učební plány obsahují i centrálně stanovené rámcové předmětové osnovy. V osnovách se uvádí nejen rozdělení tematických okruhů do ročníků a k nim přidělené orientační počty hodin, ale i vzdělávací cíle a didaktické poznámky. Didaktické poznámky navádějí učitele k volbě metod přiměřených věku a mentalitě současných žáků, k plnění stanovených vzdělávacích cílů a např. k používání výpočetní techniky ve výuce. Typickým znakem je spirálovité rozvíjení tematických celků: např. v matematice se téma počtu pravděpodobnosti objevuje v každém ročníku od 8. ročníku. Tak se žák s danou tematikou setkává každý rok, každý rok je k předchozímu učivu téma dále prohlubováno a rozvíjeno přiměřeně jeho věku a předchozímu vzdělání.

Známy problém jak doplňovat tradiční základ všeobecného vzdělání o aktuální témata aniž je zvyšován počet týdenních vyučovacích hodin, je řešen rozdělením učiva na povinná a volitelná témata. I to je projevem důrazu na hlubší, analytické i tvořivé vzdělávání na vybraných tématech, na metody práce. A to i v předmětech, které v České republice mají tradičně spíše encyklopedický charakter.

Organizačně se gymnázium člení na 5. až 10. ročník a na 11. až 12. ročník, avšak z hlediska pedagogického se nový učební plán gymnázia člení na 5. a 6. ročník, 7. až 10. ročník a 11. až 12. ročník.

5.1. Učební plán pro 5. – 10. ročník

Činnosti v 5. a 6. ročníku jsou zaměřeny na citlivý přechod žáků od postupů a stylu práce typických pro základní školy na způsoby práce na gymnáziu. V tomto období mají žáci usnadněnou možnost změnit své rozhodnutí a jít studovat na jinou školu.

V 7. až 10. ročníku mají žáci díky své přirozené zvědavosti a nabídce profilujícího vyučování rozvíjet svou osobnost a oborové zaměření. Profilující vyučování je zavedeno od 8. do 10. ročníku, realizuje se ve skupinách žáků nad rámec třídních kolektivů (Klassenübergreifende Gruppen). V 10. až 12. ročníku je každý žák povinen v rámci výuky jím zvoleného vyučovacího předmětu zpracovat a obhájit práci na zvolené téma (tzv. Komplexe Leistung). Téma si žák vybere po dohodě s vyučujícím z nabídky připravené pro daný školní rok předmětovými komisemi nebo (po

dohodě s vyučujícím) může zpracovat vlastní téma. Výsledek se započítá do žákovy klasifikace v tomto zvoleném předmětu. (Tuto práci lze nahradit předložením a obhajobou náročnější práce BeLL.)

Z učebního plánu pro 5. – 10. ročník:

Ročník	5	6	7	8	9	10
Matematika	5	4	4	4	4	4
Technika	2	1	–	–	–	–
Informatika	–	–	1	1	–	–
Náboženství/Etika	2	2	2	2	2	2
Angličtina	5	4	4	3	3	3
2. cizí jazyk	–	4	4	4	3	3
Profilující vyučování	–	–	–	3	3	3
Celkem týdně	31	32	33	34	34	35
Podpůrné vyučování	2	1				

Školní a žákovské projekty mají již na saských školách tradici, jsou uplatňovány jako jedna z metod vedoucí k daným cílům. Rovněž o uvedených cílech se hovořilo již dříve. Nový učební plán však, jako projev akcentu na tyto cíle, vytvořil pro jejich realizaci nové podmínky: Kromě prolnutí do výuky předmětům je věnován těmto tématům zvláštní prostor. Metodám studia a vzdělávacím strategiím vč. celoživotního vzdělávání jsou věnovány proškolenými učiteli vedené povinné semináře (např. témata: rozvíjení kompetencí ke studiu, studijní techniky, techniky tvorby a prezentace samostatných a týmových prací, efektivní studium a odpočinek) Pro týmové projekty jsou školou stanovena mezioborová témata a vymezen čas cca 2 týdny ve školním roce. Tyto projekty koncipuje škola tak, aby v širokém kontextu zahrnovaly témata jako: řeč a myšlení, individualita a socialita, doprava, práce a povolání, rovnoprávnost, ekologie, hospodářství, technika, media, komunikace, vztah generací, umění, technika. Jsou definovány metody hodnocení práce žákovského týmu i jednotlivců v něm, na přípravě a realizaci se podílejí všechny předmětové komise.

5.2. Učební plán pro 11. a 12. ročník

11. a 12. ročník je rozdělen na 2 pololetí, tedy 4 semestry. Každý žák v 10. ročníku oznámí škole, které předměty z nabídky školy a v jakém hodinovém rozsahu chce v těchto semestrech studovat. Žákovská volba je

omezena pravidly stanovenými ministerstvem školství. Ta zaručují, aby žák se mohl intenzivně vzdělávat v těch oblastech, která bude potřebovat pro své další studium, mohl se osobnostně profilovat, ale zůstal přitom zachován všeobecně vzdělávací charakter gymnázia. Povinně musí žák volit mateřský jazyk, matematiku a alespoň jeden cizí jazyk, a to v rozsahu 4–5 h/týden (tzv. výkonový kurz – Leistungskurs/LK), nebo v rozsahu 2–3 h/týden (tzv. základní kurz – Grundkurs/GK). Další předměty jsou rozděleny do vzdělávacích oblastí, žádné z nich nesmí být zcela opominuto, zvoleny musí být alespoň 2 LK a doplněny tak, aby minimální týdenní počet hodin činil 35. Má-li pro to škola vhodné podmínky, může nabízet výuku vybraných předmětů v cizím jazyce. V 11. a 12. ročníku se neznámkuje, nýbrž boduje. Základem klasifikace jsou klauzurní práce. Styl výuky se přibližuje k vysokoškolskému studiu. Při tvorbě učebního plánu pomáhá žákovi školní poradce, k dispozici je i příručka vydávaná každoročně ministerstvem školství osvětlující možnosti volby a pravidla hodnocení na výstupním vysvědčení.

6. Matematika a informatika

Požadovaný přínos matematiky k všeobecnému vzdělání popisuje učební plán. Z tohoto popisu pro představu alespoň několik požadavků :

Významným přínosem výuky matematiky k dosažení všeobecného vzdělání je postupné vedení žáků k samostatnému řešení problémů. Přiměřeně vysoká úroveň abstrakce, definice pojmů specifických pro předmět a logické strukturování matematických vět poskytují žákům podporu při analýze problémových situací, při výběru, použití a hodnocení strategií k řešení problémů. Žáci poznávají, že matematika je rezervoár modelů poskytující možnost popsat, strukturovat a interpretovat fenomény světa. Žáci používají uvědoměle heuristické postupy. Ve výuce matematiky hraje významnou úlohu osvojování si techniky kultury počítání a nácvik adekvátní vyjadřovací schopnosti. Žáci používají stále samostatněji matematický odborný jazyk k popisu a kritické reflexi učiva a k popisu způsobů řešení, k prezentaci pracovních výsledků, ke kritickému hodnocení výroků, k logické argumentaci, odůvodňování a dokazování. Prostřednictvím formálního jazyka poznávají racionální nástroj dokumentace. Vyučovací předmět matematika specificky přispívá k orientaci na hodnoty. Zejména při posuzování řešení, při kritickém hodnocení modelů a postupů, při setkávání se s matematikou v každodenním životě žáci dále rozvíjejí svůj vlastní obraz

světa. Žáci se dovedou kriticky ptát na důvody řešení a na postupy řešení i na výroky a řetězce argumentací.

Zejména upozorňuji na požadavek: Při hodnocení postupů a výsledků hrají podstatnou úlohu úvahy o efektivitě a o optimálním využívání času a rezerv.

Učivo matematiky je rozděleno v každém ročníku na povinná a volitelná témata, tím se vytváří prostor pro procvičení a hlubší vhled do tématu. Obsahově se kryje, zejména v nižších ročnících s učivem obvyklým v ČR, existují však rozdíly mezi ročníky. Zvýšený akcent na statistiku a pravděpodobnost, analýzu dat a dějů, výpočetní techniku, nachází časový prostor např. tím, že goniometrické rovnice se neprobírají v takovém rozsahu jako v ČR. Rovněž analytická geometrie se zabývá jen vybranými tématy. V obou případech ale vždy tak, aby metody řešení typické pro uvedený okruh učiva byly dostatečně probrány a procvičeny. Komplexní čísla nejsou v mezi povinnými tématy. Naproti tomu je věnována pozornost posloupnostem a číselným řadám, maticím, vektorovému počtu, v infinitesimálním počtu se řeší i úlohy vyžadující řešení integrálů s parametrem.

Zvláštní pozornost ve výuce matematiky je nutno věnovat rozvíjení kompetencí žáků v používání výpočetní techniky. Informatika se vyučuje jen v 7. a 8. ročníku. Učební plán však ukládá rozvíjení kompetencí žáků v oblasti výpočetní techniky ve všech předmětech, zejména v matematice a fyzice. Proto je běžné, že žáci při přípravě a prezentaci svých referátů či projektů již od 7. třídy používají internet a počítačové prezentační programy. Úlohy ze všech výše uvedených matematických témat včetně infinitesimálního počtu řeší žáci jak s pomocí programovatelných kalkulačů tak bez nich. Při studiu vlastností funkcí se s výhodou používají dynamické programy kalkulačů. Znalost zpracování dat na kalkulačů žáci využívají i zpracování protokolů o měření ve fyzice.

Kapesní kalkulačory si žáci pořizují v 7. třídě. Typ kalkulačů stanovuje předmětová komise na základě instrukcí ministerstva školství, jaké vybavení bude povoleno k řešení maturitních úloh, až žáci dospějí k maturitě. (V současné době ministerstvo doporučuje programovatelné kalkulačory s grafickým výstupem vybavené CAS.) Díky hromadné objednávce poskytuje prodejce množstevní slevu na ceně a pořízení kalkulačů je finančně únosné. Rodiny s tímto výdajem včas počítají.

Jsou stanoveny kompetence, kterých by měl žák v jednotlivých ročnících v ovládání kalkulačů dosáhnout. Aby žáci nepoužívali kalkulačory k řešení úloh aniž by znali matematický princip řešení, jsou zařazovány

nejprve úlohy např. na řešení kvadratických rovnic bez kalkulačků . Teprve poté se přechází na početně i komplexitou náročnější úlohy, k jejichž řešení je účelné používat program v kalkulačce umožňující rychlý výpočet kořenů rovnice. Těžiště zadávaných úloh se tak přenáší do oblasti náročnějších zadání vyšší komplexnosti, v nichž vyřešení kvadratické rovnice je již jen rutinou.

Aby nedocházelo k nejasnostem, jak má být popsáno řešení úlohy, do jaké míry má být použit kalkulačka, používají se v zadání úloh slovesa s předem dohodnutým – definovaným významem, tzv. operátory.

Žáci si na takováté vymezení postupně zvykají. V závěrečné fázi výuky je dodržení zadání důležité, nedodržení má 2 následky: bodovou srážku v hodnocení řešení a časovou tíseň při řešení písemné práce. Písemné práce jsou totiž koncipovány tak, že vyžadují od žáka účelné využívání výpočetní techniky, jinak nestihne vyřešit všechny úlohy v předepsaném časovém limitu. Žák je tak veden k posuzování efektivity zvoleného postupu a k účelnému používání výpočetní techniky.

Pokud si vyučující nepřeje, aby žáci k řešení dané úlohy použili kalkulačku, uvede to v úvodu zadání. Tak je tomu např. v již zmíněné centrálně zadávané písemné práci z matematiky, kterou žáci vypracovávají na konci 10. ročníku. Zadání práce je rozděleno do dvou organizačně oddělených částí: v první části jsou úlohy řešené výhradně bez použití kalkulačků a v druhé, rovněž časově vymezené jsou zařazeny úlohy vyšší komplexnosti, u nichž se předpokládá, že žáci při řešení použijí kalkulačky.

Používání M-F-Ch tabulek v matematice je samozřejmostí. Je považováno za práci s informačním zdrojem. Jejich používání je povoleno i při písemných pracích a zadání úloh s tím počítá. Žákům jsou doporučeny ke koupi tabulky, jejichž použití bude povoleno i při maturitních zkouškách. V Sasku používané tabulky se od M-F-Ch tabulek používaných v české republice liší: Obsahují i část pro biologii a část pro informatiku a jsou přehlednější. Určitě stojí přinejmenším za inspiraci, ne-li za vydání jejich eventuálně upraveného překladu v České republice.

7. Závěr

Mnohé z toho, co jsem poznal, a co jsem mohl v tomto článku z pocho-pitelných důvodů jen naznačit, může být alespoň inspirací pro učitele nebo školy v České republice. Nelze bez rozmyslu přebírat cizí školské systémy, neboť školství každé země je velmi spjato s její kulturou a historií. Lze se však inspirovat, porovnat vlastní přístupy s přístupy v zahraničí a vhodná

řešení přizpůsobit tuzemským podmínkám, třeba i jen v rámci konkrétní školy. Mnohé z toho, co jsem v článku zmínil lze přenést do praxe školy. Úlohy z celostátně zadávaných písemných prací pro 10. ročník gymnázia i maturitní úlohy (včetně řešení) jsou vždy v následujícím roce vydávány vydavatelstvími specializujícími se na vydávání učebnic a školních textů a využívají se i ve výuce. Osobně považuji i tyto publikace za vhodný zdroj pro české prostředí.

A to byl důvod, proč jsem výzvu zmíněnou v úvodu přijal a tento článek připravil.

61. ročník Matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Pokladní v galerii prodává návštěvníkům vstupenky s číslem podle toho, kolikátí ten den přišli. První návštěvník dostane vstupenku s číslem 1, druhý s číslem 2, atd. Během dne však došel žlutý papír, na který se vstupenky tiskly, proto musela pokladní pokračovat tisknutím na papír červený. Za celý den prodala stejně žlutých vstupenek jako červených. Zjistila, že součet čísel na žlutých vstupenkách byl o 1 681 menší než součet čísel na červených vstupenkách. Kolik toho dne prodala vstupenek?

(*M. Mach*)

Z9–I–2

Filoména má mobil s následujícím rozmístěním tlačítek:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Devítimístné telefonní číslo její nejlepší kamarádky Kunhuty má tyto vlastnosti:

- všechny číslice Kunhutina telefonního čísla jsou různé,
- první čtyři číslice jsou seřazeny podle velikosti od nejmenší po největší a středy jejich tlačítek tvoří čtverec,
- středy tlačítek posledních čtyř číslic také tvoří čtverec,
- telefonní číslo je dělitelné třemi a pěti.

Kolik různých devítimístných čísel by mohlo být Kunhutiným telefonním číslem?

(*K. Pazourek*)

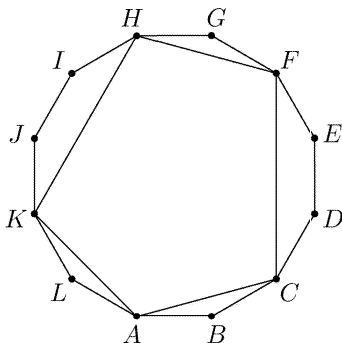
Z9–I–3

Amálka pozorovala veverky na zahrádce hájenky, kde rostly tyto tři stromy: smrk, buk a jedle. Veverky seděly v klidu na stromech, takže je mohla spočítat — bylo jich 34. Když přeskákalo 7 veverek ze smrku na buk, bylo jich na buku stejně jako na obou dvou jehličnanech dohromady. Poté ještě přeskákalo 5 veverek z jedle na buk, v tu chvíli bylo na jedli stejně veverek jako na smrku. Na buku jich poté bylo dvakrát tolik, co na jedli ze začátku. Kolik veverek původně sedělo na každém ze stromů?

(*M. Mach*)

Z9–I–4

V pravidelném dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ vepsaném do kružnice o poloměru 6 cm určete obvod pětiúhelníku $ACFHK$.



(*K. Pazourek*)

Z9–I–5

Před vánočním koncertem nabízeli žáci k prodeji 60 výrobků z hodin výtvarné výchovy. Cenu si mohl každý zákazník určit sám a celý výtěžek šel na dobročinné účely. Na začátku koncertu žáci spočítali, kolik korun v průměru utržili za jeden prodaný výrobek, a vyšlo jim přesně celé číslo. Protože stále neprodali všech 60 výrobků, nabízeli je i po koncertě. To si lidé koupili ještě dalších sedm, za které dali celkem 2 505 Kč. Tím se průměrná tržba za jeden prodaný výrobek zvýšila na rovných 130 Kč. Kolik výrobků pak zůstalo neprodaných?

(*L. Šimůnek*)

Z9–I–6

V obdélníkové zahradě roste broskvoň. Tento strom je od dvou sousedních rohů zahrady vzdálen 5 metrů a 12 metrů a vzdálenost mezi zmíněnými dvěma rohy je 13 metrů. Dále víme, že broskvoň stojí na úhlopříčce zahrady. Jak velká může být plocha zahrady?

(*M. Mach*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Korespondenční matematická soutěž probíhá ve třech kolech, jejichž náročnost se stupňuje. Do druhého kola postupují jen ti řešitelé, kteří byli úspěšní v prvním kole, do třetího kola postupují jen úspěšní řešitelé druhého kola. Vítězem je každý, kdo je úspěšným řešitelem posledního, tedy třetího kola. V posledním ročníku této soutěže bylo přesně 14 % řešitelů úspěšných v prvním kole, přesně 25 % řešitelů druhého kola postoupilo do třetího kola a přesně 8 % řešitelů třetího kola zvítězilo.

Jaký je nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola? Kolik by v takovém případě bylo vítězů?

(*M. Petrová*)

Z8–I–2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB dlouhou 10 cm a rameny dlouhými 20 cm. Bod S je střed základny AB . Rozdělte trojúhelník ABC čtyřmi přímkami procházejícími bodem S na pět částí se stejným obsahem. Zjistěte, jak dlouhé úsečky vytnou tyto přímky na ramenech trojúhelníku ABC .

(*E. Trojáková*)

Z8–I–3

Hledáme pětimístné číslo s následujícími vlastnostmi: je to palindrom (tj. čte se pozpátku stejně jako zepředu), je dělitelné dvanácti a ve svém zápisu obsahuje číslici 2 bezprostředně za číslici 4. Určete všechna možná čísla, která vyhovují zadaným podmínkám.

(*M. Mach*)

Z8–I–4

Na střed hrnčířského kruhu jsme položili krychli, která měla na každé své stěně napsáno jedno přirozené číslo. Těsně předtím, než jsme kruh roztočili, jsme ze svého stanoviště viděli tři stěny krychle a tedy pouze tři čísla. Jejich součet byl 42. Po otočení hrnčířského kruhu o 90° jsme ze stejného místa pozorovali tři stěny s čísly dávajícími součet 34 a po otočení o dalších 90° jsme stále z téhož místa viděli tři čísla o součtu 53.

- Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších 90° .
- Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli.

(*L. Šimůnek*)

Z8–I–5

Pankrác, Servác a Bonifác jsou bratři, kteří mají P , S a B let. Víme, že P , S a B jsou přirozená čísla menší než 16, pro něž platí:

$$P = \frac{5}{2}(B - S),$$

$$S = 2(B - P),$$

$$B = 8(S - P).$$

Určete stáří všech tří bratrů.

(*L. Hozová*)

Z8–I–6

Janka si narýsovala obdélník s obvodem 22 cm a délkami stran vyjádřenými v centimetrech celými čísly. Potom obdélník rozdělila beze zbytku na tři obdélníky, z nichž jeden měl rozměry 2 cm $\times$ 6 cm. Součet obvodů všech tří obdélníků byl o 18 cm větší než obvod původního obdélníku. Jaké rozměry mohl mít původní obdélník? Najděte všechna řešení.

(*M. Dillingarová*)

Z7–I–1

Trpaslíci si chodí k potoku pro vodu. Džbánek každého z trpaslíků je jinak velký: mají objemy 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 litrů. Trpaslíci si džbánky mezi sebou nepůjčují a vždy je přinesou plné vody.

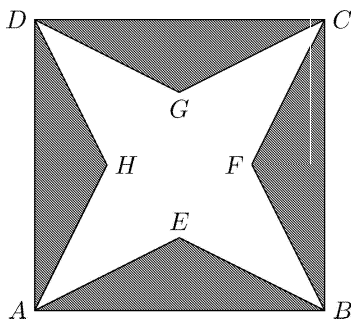
- Kejchal přinese ve svém džbánu víc vody než Štísko.
- Dřímál by musel jít pro vodu třikrát, aby přinesl právě tolik vody jako Stydlín v jednom svém džbánu.
- Profův džbánek je jen o 2 litry větší než Štískův.
- Sám Šmudla přinese tolik vody jako Dřímál a Štísko dohromady.
- Když jdou pro vodu Prófa a Šmudla, přinesou stejně vody jako Rejpal, Kejchal a Štísko.

Kolik vody přinesou dohromady Kejchal a Šmudla?

(*M. Petrová*)

Z7–I–2

Na obrázku je čtverec $ABCD$, ve kterém jsou umístěny čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABE , BCF , CDG a DAH , všechny šedě vybarvené. Strany čtverce $ABCD$ jsou základnami těchto rovnoramenných trojúhelníků. Víme, že šedé plochy čtverce $ABCD$ mají dohromady stejný obsah jako jeho bílá plocha. Dále víme, že $|HF| = 12$ cm. Určete velikost strany čtverce $ABCD$.



(*L. Šimůnek*)

Z7–I–3

Sedm bezprostředně po sobě jdoucích celých čísel stálo v řadě, seřazeno od nejmenšího po největší. Po chvíli se čísla začala nudit, a tak se nejdřív první vyměnilo s posledním, potom se prostřední posunulo úplně na začátek řady a nakonec si největší z čísel stouplo doprostřed. Ke své veliké radosti se tak ocitlo vedle čísla se stejnou absolutní hodnotou. Kterých sedm čísel mohlo stát v řadě?

(S. Bednářová)

Z7–I–4

Učitelka Smolná připravovala prověrku pro svou třídu ve třech verzích, aby žáci nemohli opisovat. V každé verzi zadala tři hrany kvádra a dala za úkol vypočítat jeho objem. Úlohy si ale dopředu nevyřešila, a tak netušila, že výsledek je ve všech třech verzích stejný. Do zadání žákům zapsala tyto délky hran: 12, 18, 20, 24, 30, 33 a 70, všechny v centimetrech. Z devíti délek hran, které učitelka Smolná zadala, jsme vám tedy prozradili pouze sedm a ani jsme nesdělili, které délky patří do téhož zadání. Určete zbylé dvě délky hran.

(L. Šimůnek)

Z7–I–5

Jeden vnitřní úhel v trojúhelníku měří 50° . Jak velký úhel svírají osy zbývajících dvou vnitřních úhlů?

(L. Hozová)

Z7–I–6

Hledáme šestimístný číselný kód, o němž víme, že:

- žádná číslice v něm není vícekrát,
- obsahuje i 0, ta však není na předposledním místě,
- ve svém zápisu nemá nikdy vedle sebe dvě liché ani dvě sudé číslice,
- sousední jednomístná čísla se liší aspoň o 3,
- čísla, která získáme přečtením prvního a druhého dvojčíslí, jsou obě násobkem čísla vzniklého přečtením třetího, tedy posledního dvojčíslí.

Určete hledaný kód.

(M. Volfová)

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 175 a 176, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 175

Dokažte, že číslo $2011^2 - 2010$ je dělitelem čísla $2011^{2010} - 1$.

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení. Označme $x = 2011$. Máme dokázat, že $x^2 - x + 1$ dělí číslo $x^{2010} - 1$. Jelikož $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, stačí dokázat, že $x^3 + 1$ dělí číslo $x^{2010} - 1$. Ze vztahu

$$\begin{aligned} x^{2010} - 1 &= x^3 \left((x^3)^{669} + 1 \right) - (x^3 + 1) = \\ &= x^3 (x^3 + 1) \left((x^3)^{668} - (x^3)^{667} + (x^3)^{666} - \dots + 1 \right) - (x^3 + 1) \end{aligned}$$

vidíme, že $x^3 + 1$ dělí menšence i menšitele, proto dělí i jejich rozdíl. Tím je úloha dokázána.

Poznámka. Řešitelé našli několik dalších rozkladů výrazu $x^{2010} - 1$. *Karol Gajdoš* a *Jiří Steckbauer* použili rozkladu

$$x^{2010} - 1 = (x^3 + 1) \left((x^3)^{334} - (x^3)^{333} + \dots + 1 \right) (x^{1005} + 1),$$

zatímco *Anton Hnáth* a *Jozef Mészáros* pracovali s rozkladem

$$x^{2010} - 1 = (x^3 + 1) (x^3 - 1) \left((x^6)^{334} - (x^6)^{333} + \dots + 1 \right).$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 176

Kružnice k a l se protínají ve dvou různých bodech A a B . Tečna ke kružnici k v bodě A protíná kružnici l v bodě D a tečna ke kružnici l

v bodě A protíná kružnici k v bodě C ($C \neq A \neq D$). Tečna ke kružnici l v bodě D a polopřímka AB se protínají v bodě E . Nechť F je průsečík přímky AC s kružnicí opsanou trojúhelníku BCE . Dokažte, že body A , D , E , F leží na téže kružnici.

Ján Mazák (Košice)

Řešení. Pokud bod F neleží na oblouku CBE kružnice opsané trojúhelníku BCE (obr. 1), je $FCBE$ tětiový čtyřúhelník. Součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů tětiového čtyřúhelníku je 180° , proto $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BCA|$. Podle tvrzení o shodnosti obvodového a úsekového úhlu platí $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDE|$. Tedy

$$|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BDE|.$$

Podle tvrzení o shodnosti obvodového a úsekového úhlu dále platí

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ADB|.$$

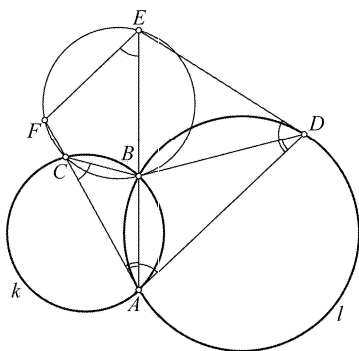
Bod F leží v polorovině opačné k polorovině AED a platí

$$|\sphericalangle AFE| + |\sphericalangle ADE| =$$

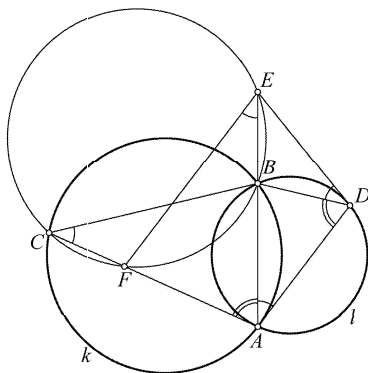
$$= (180^\circ - |\sphericalangle AEF| - |\sphericalangle EAF|) + (|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDE|) =$$

$$= (180^\circ - |\sphericalangle BEF| - |\sphericalangle BAC|) + (|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BEF|) = 180^\circ,$$

což stačí k tomu, aby čtyřúhelník $ADEF$ byl tětiový.



Obr. 1



Obr. 2

Pokud bod F leží na oblouku CBE kružnice opsané trojúhelníku BCE , vede se důkaz obdobně (obr. 2). Rovnost $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle BCA|$ zde plyne z vlastností obvodových úhlů.

Poznámka. Z důkazu plyne, že velikost vnitřních úhlů u vrcholů A a D tětíivového čtyřúhelníku $ADEF$ je stejná, proto tento čtyřúhelník je buď rovnoramenný lichoběžník, nebo pravoúhelník.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Pavel Calábek

(*Dokončení ze str. 637*)

z bismutu s podobně tvarovaným drátem z mědi a vytvořil smyčku. Náhodně zjistil, že když podrží jeden ze spojů bismut-měď v teplé ruce, magnetka umístěná uvnitř smyčky se pohne. Pokus stále opakoval citlivým zahříváním v místě spojů různých vodičů – vznikalo zde konstantní napětí a začal proudit „termický“ proud – tepelná energie se přímo mění v elektrickou. Protože se zprvu mylně domníval, že jde o efekt způsobený magnetickým polarizováním dvou kovů teplotním spádem, nazval jej „termomagnetismus“.

Po mnohonásobném opakování pokusů s rozdílnými páry kovů uspořádal podle velikosti účinků na magnetku celkem 28 materiálů do termoelektrické řady, začínající bismutem jako extrémně negativním kovem, a končící tellurem jako kovem extrémně pozitivním. Svoje termomagnetické studie uveřejnil v roce 1823 pod názvem „Magnetická polarizace kovů a rud rozdílem teplot“.

Použití termočlánku je dvojí: jednak jej lze použít k měření teploty, jednak jako

zdroj stálého elektrického proudu (elektromotorické napětí tohoto zdroje i jeho vnitřní odpor jsou velmi stálé). Jak to již u mnohých vědeckých objevů bývá, také termoelektrický jev je poznamenán problémy s prioritou. Za nezávislého objevitele termoelektriny bývá rovněž pokládán Angličan *James Cumming* (1777–1861), který první popis svého objevu uvedl v časopise *Annales of Philosophy* v roce 1823. Stručná zpráva o Seebeckově byla sice uveřejněna v též časopise roku 1822, ale jeho podrobný popis nebyl zveřejněn dříve než v roce 1825. Přestože je velmi pravděpodobné, že Cumming učinil svůj objev nezávisle, tím se Seebeckova priorita asi nezpochybňuje.

Za svého pobytu v Beyreuthu se Seebeck v roce 1795 oženil s *Julianou Amálií Ulrikeovou*, dcerou Královského pruského dvorního rady. Životopisné prameny udávají z rodiny přinejmenším jednoho syna, Louis Fredericka. Thomas Johann Seebeck zemřel ve věku 61 let 10. prosince 1831 v Berlíně.

Bohumil Tesařík