

Překvapivé důkazy obtížných nerovností

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Algebraické nerovnosti patří k tradičním tématům elementární matematiky. O jejich rozmanitosti a bohatosti svědčí stále nové příklady, které se objevují v matematických soutěžích zemí celého světa a které vyžadují od jejich tvůrců a později i řešitelů nemalý um a důvtip. Vlastní dovednost při odvozování či dokazování algebraických nerovností tak každý zájemce může prakticky neustále rozvíjet a zdokonalovat. Se základními postupy se lze seznámit podle příruček [2] nebo [3], větší soustředění náročnějších příkladů lze najít v knize [1]. Při řešení obtížnějších úloh o nerovnostech obvykle nevystačíme s rutinními postupy; často je poměrně nesnadné objevit, že při řešení je možné úspěšně využít takové klasické výsledky, jakými jsou například Caychyho-Schwarzova nerovnost, nerovnosti mezi harmonickým, geometrickým a aritmetickým průměrem, Čebyševova nerovnost či Jensenova nerovnost.

O posledně zmíněné výsledky však v našem příspěvku vlastně ani nepůjde. Přestože budeme podávat důkazy nesnadných nerovností, nečekaně při nich vystačíme s jediným důkazovým prostředkem, totiž nerovností

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv} \quad (u, v \geq 0), \quad (1)$$

která je nejjednodušším případem nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem libovolné konečné skupiny nezáporných reálných čísel. V případě, kdy je počet těchto čísel větší než 2, je každý z řady početných

důkazů této hluboké nerovnosti, dobře známé svým širokým uplatněním každému zájemci o elementární matematiku, dosti netriviální, takže se na „AG-nerovnost“ při důkazech jiných nerovností efektivně odvoláváme. Samotná nerovnost (1) však má důkaz velice jednoduchý, plyne totiž ze zřejmé nerovnosti $(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 \geq 0$ po rozvinutí zapsané mocniny a následné triviální algebraické úpravě. I když je možné takovou úpravu „na čtverec“ provést, kdykoliv potřebujeme odhad (1) využít, je i v takových případech výhodné se na AG-nerovnost (1) odvolávat. Nezanedbatelný je i její metodický význam, kdykoliv přemýšlíme o vztahu mezi součtem a součinem dvou nezáporných čísel.

Desítky příkladů klasických uplatnění nerovnosti (1) jsou uvedeny v již zmíněné publikaci [2] na str. 100–108. V tomto článku popíšeme nevšední aplikace (1) z posledních let, které jsme objevili v málo dostupných zdrojích příkladů z Polska, Bulharska, Ruska a Vietnamu. Věříme, že zaujmou i poučené čtenáře, kteří mají s dokazováním algebraických nerovností dostatek zkušeností.

Příklad 1

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c , která splňují podmínku $a + b + c = 1$, platí nerovnost

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Řešení. Díky podmínce $a + b + c = 1$ lze za každou z šesti jedniček v dokazované nerovnosti dosadit součet $a + b + c$, a dostat tak ekvivalentní nerovnost

$$(2a + b + c)(2b + c + a)(2c + a + b) \geq 8(b + c)(c + a)(a + b).$$

Podle nerovnosti (1) s hodnotami $u = a + b$, $v = c + a$ platí

$$2a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)(c+a)},$$

analogicky pak

$$2b + c + a \geq 2\sqrt{(b+c)(a+b)} \quad \text{a} \quad 2c + a + b \geq 2\sqrt{(c+a)(b+c)}.$$

Pronásobením těchto tří nerovností (s nezápornými stranami) dostaneme požadovanou nerovnost, neboť součin pravých stran má hodnotu

$$2^3 \cdot \sqrt{(a+b)(c+a)(b+c)(a+b)(c+a)(b+c)} = 8(b+c)(c+a)(a+b).$$

Příklad 2

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c , která splňují podmínku $a + b + c = 1$, platí nerovnost

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leq \frac{3}{2}.$$

Řešení. Sčítance z levé strany nejprve s využitím zadané podmínky upravíme a následně odhadneme shora postupem, který popíšeme pro první sčítanec:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} &= \sqrt{\frac{ab}{1-a-b+ab}} = \sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right), \end{aligned}$$

přitom jsme využili nerovnost (1) s hodnotami $u = \frac{a}{1-b}$ a $v = \frac{b}{1-a}$. Sečteme-li tento odhad s dalšími dvěma analogickými odhady

$$\sqrt{\frac{bc}{a+bc}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} \right) \quad \text{a} \quad \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} \right),$$

dostaneme zřejmě nerovnost, kterou jsme měli dokázat, neboť

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} \right) &= \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} \right) &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 3

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c , která splňují podmínku $a + b + c = 1$, platí nerovnost

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{1}{2}.$$

Řešení. Budeme postupovat jako u předchozího podobného příkladu. Z podmínky $a + b + c = 1$ plyne $c + ab = (a + c)(b + c)$, takže první zlomek z levé strany dokazované nerovnosti odhadneme shora pomocí (1) takto:

$$\frac{ab}{\sqrt{c + ab}} = \frac{ab}{\sqrt{(a + c)(b + c)}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} \right).$$

Odhadneme-li analogicky ostatní dva zlomky a všechny tři odhady sečteme, dostaneme dokazovanou nerovnost, neboť

$$\begin{aligned} \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} \right) + \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{b + a} + \frac{1}{c + a} \right) + \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{c + b} + \frac{1}{a + b} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{ac + bc}{a + b} + \frac{ba + ca}{b + c} + \frac{cb + ab}{c + a} \right) = \frac{1}{2} (c + a + b) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 4

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, d , která splňují podmínku $a + b + c + d = 4$, platí nerovnost

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{d^2 + 1} + \frac{d}{a^2 + 1} \geq 2.$$

Řešení. Celý postup založíme na důmyslném užití zřejmé nerovnosti $u^2 + 1 \geq 2u$ (její souvislost s (1) snad ani není nutné uvádět). Protože však výrazy $u^2 + 1$ stojí ve *jmenovatelích* (kladných) zlomků na *větší* straně dokazované nerovnosti, přepíšeme ji na základě podmínky $a + b + c + d = 4$ do ekvivalentního tvaru

$$2 \geq \left(a - \frac{a}{b^2 + 1} \right) + \left(b - \frac{b}{c^2 + 1} \right) + \left(c - \frac{c}{d^2 + 1} \right) + \left(d - \frac{d}{a^2 + 1} \right).$$

Výrazy v závorkách na pravé straně mají zřejmě kladné hodnoty, zapíšeme je zlomky, které pak odhadneme shora pomocí nerovnosti zmíněné v úvodu řešení. Pro první výraz tak dostaneme

$$a - \frac{a}{b^2 + 1} = \frac{ab^2}{b^2 + 1} \leq \frac{ab^2}{2b} = \frac{ab}{2},$$

pro zbylé tři výrazy pak analogicky

$$b - \frac{b}{c^2 + 1} \leq \frac{bc}{2}, \quad c - \frac{c}{d^2 + 1} \leq \frac{cd}{2}, \quad d - \frac{d}{a^2 + 1} \leq \frac{da}{2}.$$

Podle těchto odhadů vidíme, že upravená nerovnost, kterou máme dokázat, skutečně platí, je-li splněna podmínka

$$2 \geq \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{da}{2} \quad \text{neboli} \quad 4 \geq ab + bc + cd + da.$$

Poslední nerovnost však je důsledkem podmínky $a + b + c + d = 1$, neboť podle nerovnosti (1) platí

$$\sqrt{ab + bc + cd + da} = \sqrt{(a + c)(b + d)} \leq \frac{(a + c) + (b + d)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad 5

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c dokažte ostrou nerovnost

$$(a + b)(b + c)(c + a) > 2\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab)}.$$

Řešení. Dokazovaná nerovnost je zřejmým důsledkem dvou nerovností

$$(a + b)(b + c) \geq 2\sqrt{(b^2 + ca)(c^2 + ab)} \quad \text{a} \quad c + a > \sqrt{a^2 + bc}.$$

Tyto nerovnosti sice nemají obecnou platnost, avšak s ohledem na symetrii zadání příkladu můžeme předpokládat, že platí $a \geq b \geq c > 0$, a ukázat, že tehdy jsou obě vypsane nerovnosti platné. První z nich zdůvodníme užitím (1) s přihlédnutím k nerovnosti $bc \geq c^2$:

$$\begin{aligned} (a + b)(b + c) &= (b^2 + ca) + (bc + ab) \geq (b^2 + ca) + (c^2 + ab) \geq \\ &\geq 2\sqrt{(b^2 + ca)(c^2 + ab)}. \end{aligned}$$

Druhou nerovnost ověříme ekvivalentními úpravami:

$$c + a > \sqrt{a^2 + bc} \Leftrightarrow (c + a)^2 > a^2 + bc \Leftrightarrow c^2 + 2ac > bc \Leftrightarrow c + 2a > b.$$

Poslední nerovnost platí, neboť $c + a > 0$ a $a \geq b$. Důkaz je hotov.

Poznámka. Předpokládejme, že pro některé číslo $p > 0$ nerovnost

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq p\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab)}$$

platí s libovolnými kladnými čísly a, b, c . Položíme-li $a = b = t > 0$ a $c = 1$, získá uvedená nerovnost tvar

$$2t(t + 1)^2 \geq p(t^2 + t)\sqrt{t^2 + 1} \quad \text{neboli} \quad 2\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \geq p\left(1 + \frac{1}{t}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}.$$

Z platnosti této nerovnosti pro libovolně velká t plyne $p \leq 2$. Proto je zvolená hodnota $p = 2$ v zadání příkladu 5 největší možná (i pro případ, že bychom ostrou nerovnost změnili na neostrou).

Příklad 6

Pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ dokažte nerovnost

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) &\geq \\ &\geq (1 + \sqrt{a_1 a_2})(1 + \sqrt{a_2 a_3}) \dots (1 + \sqrt{a_n a_1}). \end{aligned}$$

Řešení. Obtížnost našeho úkolu spočívá v tom, že zadaná nerovnost je sice formálním výsledkem pronásobení n nerovností

$$1 + \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geq 1 + \sqrt{a_k a_{k+1}},$$

ty však zřejmě neplatí obecně. Místo této slepé cesty odhadneme (opravdu překvapivým způsobem) činitele z obou stran nerovnosti, a to pomocí dvou nerovností

$$1 + \frac{u^2}{v} \geq \frac{(1 + u)^2}{1 + v}, \quad \text{resp.} \quad 1 + \sqrt{uv} \leq \sqrt{(1 + u)(1 + v)},$$

které platí, jak se hned přesvědčíme, pro libovolná čísla $u, v > 0$. Plyne to ze vztahů

$$1 + \frac{u^2}{v} - \frac{(1+u)^2}{1+v} = \frac{v(1+v) + u^2(1+v) - v(1+u)^2}{v(1+v)} = \frac{(u-v)^2}{v(1+v)} \geq 0$$

a

$$(1+u)(1+v) - (1+\sqrt{uv})^2 = u+v-2\sqrt{uv} = (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 \geq 0.$$

Protože výrazy v obou dokázaných odhadech jsou kladné, pro levou stranu dokazované nerovnosti dostáváme (při označení $a_{n+1} = a_1$) dolní odhad

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_k^2}{a_{k+1}}\right) \geq \prod_{k=1}^n \frac{(1+a_k)^2}{1+a_{k+1}} = \prod_{k=1}^n (1+a_k),$$

zatímco pro pravou stranu dokazované nerovnosti vychází horní odhad

$$\prod_{k=1}^n (1 + \sqrt{a_k a_{k+1}}) \leq \prod_{k=1}^n \sqrt{(1+a_k)(1+a_{k+1})} = \prod_{k=1}^n (1+a_k).$$

Díky rovnosti výrazů z obou odvozených odhadů je celý důkaz hotov.

Dodejme, že obě nerovnosti s proměnnými u a v , které jsme při řešení příkladu 6 rozhodujícím způsobem uplatnili, bylo sice možné zdůvodnit po malých úpravách pomocí nerovnosti (1), avšak místo takového umělého postupu jsme uvedli jejich přímé důkazy jednoduchými převody na ekvivalentní nerovnosti typu $x^2 \geq 0$. Jinou otázkou ovšem je, jak takové příhodné (obecně platné) nerovnosti při řešení podobně obtížných příkladů objevit. To už patří k onomu druhu matematické tvořivosti, které se anglicky říká „art of problem solving“.

Literatura

- [1] *Engel A.*: Problem Solving Strategies, Problem Books in Mathematics, Springer Verlag, New York, 1998.
- [2] *Herman J. – Kučera R. – Šimša J.*: Metody řešení matematických úloh I, Masarykova univerzita, Brno, 2001.
- [3] *Kufner A.*: Nerovnosti, Škola mladých matematiků, sv. 39, Mladá fronta, Praha, 1989.

Je k pochopení matematiky nutná genialita?

JAN ZAHRADNÍK

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Motto:

Does one have to be a genius to do mathematics? The answer is an emphatic NO. In order to make good and useful contributions to mathematics, one does need to work hard, learn one's field well, learn other fields and tools, ask questions, talk to other mathematicians, and think about the „big picture“. And yes, a reasonable amount of intelligence, patience, and maturity is also required. But one does not need some sort of magic „genius gene“ that spontaneously generates ex nihilo deep insights, unexpected solutions to problems, or other supernatural abilities.

(Terence Tao¹, 2007)

Co se týče matematiky, o té snad nikdo netvrdil, že by k pochopení jejímu bylo zapotřebí více nežli zdravého rozumu; přesná její logika, jasnost a evidence uvádí se co zvláštní její přednost. Mathematicky něco dokázati platí tolik jako vésti důkaz nezvratný a naprosto přesvědčující.²

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, ročník VIII., 1879, str. 144; Listárna redakce, odpověď „Do Kroměříže“.

V úvodu svého článku dovolím si ještě jednou citovat z Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky z roku 1879, který jsem již jednou použil. Autor odpovědi, skrytý za titul Listárna redakce, ale zřejmě Dr. F. J. Studnička, profesor matematiky na C. k. universitě pražské a dlouholetý redaktor časopisu, začíná svou odpověď do Kroměříže takto: „*Otázka, zdali se k mathematickému studiu vůbec a k pochopení mathematických důkazů*

¹Terence Tao, matematik, UCLA, <http://www.math.ucla.edu/~tao/>

²Dříve býval jedině důkaz z písmu svatého přednější a závažnější, což v našem století pominulo. (Tato poznámka je uvedena pod čarou i v originálním článku v časopise a vztahuje se tedy k citovanému textu. Pozn. autora)

zvláště hodí jen hlava specificky nadaná nebo zdali každý žák při náležité pilnosti může matematickým požadavkům školním vyhověti, otázka tato bývá často předmětem úvah soukromých, když studující přinese domů z matematiky známku nedostatečnou; při tom vyskytuje se zhusta dvojí omluva čili vlastně stížnost, buď že professor nevykládal dost jasně nebo že matematika sama jest nejtěžší předmět, a jen málo kdy se pronese důvod jedině pravý, že nebyl žák dosti pozorným a pilným.“ Autor pak pokračuje dále, neznačící současnou tak častou politickou korektnost: *„Neníť ke studiu třeba zvláštních a specifických vloh, nýbrž jen zdravého rozumu a nepřetržité pilnosti. A kdo té nemá, tomu nepomůže ani nejlepší učitel.“*

Jak je vidět, problém vnímání matematiky a jejího postavení ve společnosti netrápí jenom nás, české matematiky začátku 21. století, ale trápil i naše předky před 132 lety a trápil lidi, zajímající se o matematiku po celém světě.

Fenomén současného postavení matematiky v naší společnosti přiléhavě popisuje komentátor Lidových novin *Martin Weiss* ve sloupku Matematikou proti iracionalitě v Lidových novinách ze 7. 12. 2010. Říká mimo jiné: *„Odpor k matematice, jenž slaví svůj triumf v tom, že tento předmět nebude ve státní maturitě povinný, je předzvěstí úpadku této společnosti. Matematika je typickým oborem, který se nedá převést na módní „komunikační dovednosti“, tedy na nějakou formu sebevyjádření. Nedá se okecat. Vyžaduje skutečné myšlení a skutečnému myšlení také učí, byť by člověk v praxi žádné konkrétní úlohy neřešil. Ignorovat matematiku by si netroufla žádná společnost na vzestupu, která má ambice a cíl. Troufne si ji ignorovat jen nasycená společnost ve chvíli, kdy podlehne pocitu, že bohatství a dobré věci se dostavují automaticky a úkolem dne je zajistit všem právo na tyto dobré věci.“*

Autor pak pokračuje dále, aniž dbá na dnes tak častou politickou korektnost: Jako jeden z důvodů pro nezařazení matematiky mezi povinné předměty státní maturity bývá uváděno, že by mohla být silně stresujícím faktorem pro ty, kteří na ni nemají nadání, že by případný špatný výsledek mohl poznamenat jejich budoucí život. Tento názor bývá často podporován různými hvězdami popkultury, které v rozhovorech uvádějí své školní problémy s matematikou jako nějakou přednost nebo snad důvod k obdivu. Dále bývá také argumentováno tím, že ti, kteří byli donuceni podstoupit trápení matematikou, nikdy ji pak v životě nepotřebovali.

Chci ukázat na jednom příkladu z přelomu 19. a 20. století, jak tomu bylo v době prapradědů dnešních maturantů. V protokolech o maturitních

zkouškách na C. k. českém gymnasiu v Českých Budějovicích (současné gymnázium J. V. Jirsíka) z let 1899 – 1906 jsou uvedeny záznamy o maturitách 315 studentů, kteří tehdy skládali povinnou maturitní zkoušku z matematiky (a to jak ústní, tak písemnou). Připomínám, že dalšími povinnými předměty maturitní zkoušky byly latina, řečtina a čeština.

Soubor v protokolech obsahuje nejen údaje o studentech, ale také přesná znění příkladů, které byly maturantům u zkoušky zadávány. Celkem jich je 732. Mezi studenty je možné najít ty, u kterých zkoušející profesor předpokládal u maturitní zkoušky z matematiky výborný výkon, kteří tedy zřejmě v průběhu studia na gymnáziu projevovali zájem o matematiku nebo v ní dosahovali výborných výsledků, a proto jim bylo možné zadat problémové nebo jinak náročné příklady. Možná i z toho důvodu, aby se jimi zkoušející pan profesor pochlubil. Tyto příklady se svou tematikou i mírou obtížnosti významně liší od příkladů, které byly zadávány ostatním studentům.

Podle těchto kritérií jsem vybral 53 studentů – premiantů v matematice (16,8 %). Z nich bylo při maturitní zkoušce 46 „uznáno dospělými s vyznamenáním“ (86,8 %), 7 „uznáno dospělými“. Je možné zabývat se tím, zda tito studenti měli nějaké výjimečné dispozice k matematice, ať již co do rodinného původu, místa bydliště, zájmu o budoucí studium nebo nakonec i jejich životního povolání.

- Soubor je možné posoudit z hlediska sociálního původu abiturientů, tady podle povolání otce, které je uvedeno v protokolu o maturitní zkoušce. U 18 abiturientů je uvedeno jako povolání otce rolník³, u 12 živnostník (fiakrista, obchodník, klempíř, zahradník, mlynář, řezník, barvíř, knihař, kovář), u 5 řídící učitel, u 5 dělník nebo nádeník, u 5 jiný zaměstnanec (sládek, lesník, šafář, dozorce trati), u 2 advokát nebo soudní rada, u 2 domkář, u 2 velkostatkář nebo nájemce velkostatku, u 1 c.k. profesor, u 1 c.k. školní rada.
- Z uvedených 53 maturantů jich 24 hodlalo dále studovat teologii, 18 filosofii, 7 práva, 2 techniku a po jednom hornictví a vojenství.
- Dalším zajímavým údajem, který je uveden ve sborníku Šedesát let Jirsíkova gymnasia, vydaném v roce 1928 nákladem Výboru pro oslavu šedesátiletého trvání ústavu v Českých Budějovicích, je údaj o povolání a působišti abiturientů. Podle tohoto sborníku působilo 18 abiturientů z mého souboru jako profesori na středních školách

³Rozumíme sedlák (pozn. autora).

(z toho 5 jako profesori matematiky a fyziky), 1 jako řádný profesor fyziky na Univerzitě Karlově, 10 jako duchovní (z toho 7 jako faráři, 3 jako vojenští duchovní), 6 ve státní správě, 4 jako advokáti, 4 jako soudní radové, 2 jako lékaři, 2 u správy železnic a 1 jako důlní inženýr. U 5 abiturientů z mého souboru nebylo jejich povolání uvedeno, buď z důvodu jejich předčasného úmrtí, nebo nebylo autorům sborníku známo ...

- Ve 4 třídách byl profesorem zkoušejícím matematiku *prof. Josef Moravec*, ve 4 třídách pak *prof. Dr. Jan Chloupek*.

Z 93 příkladů zadaných premiantům jich bylo 26 z analytické geometrie, 18 na rovnice a jejich soustavy, 11 na objemy a povrchy těles, 5 na kombinatoriku, 5 na diferenciální počet (limita funkce, tečna ke grafu funkce, extrém), 4 na posloupnosti a jejich limity, 4 na nekonečné řady, 3 na integrální počet (příklady na určení obsahu plochy pod křivkou nebo objemu rotačního tělesa), 3 na číselné obory, 3 na goniometrii, po 2 na finanční matematiku, binomickou větu, řetězové zlomky a po 1 příkladu na geometrické konstrukce, sférickou trigonometrii, pravděpodobnost, determinanty a úpravy výrazů.

Dále uvádím ukázkou 79 příkladů, které byly vybraným maturantům v letech 1899 – 1906 zadány a které nebyly uvedeny v článku „Jak maturovali gymnasisté na přelomu 19. a 20. století“ v MFI, číslo 2, ročník 20. Číslo v závorce za textem příkladu znamená známku, kterou zkoušející profesor za řešení daného příkladu maturantovi navrhl.

Školní rok 1898 – 1899

Zkoušející profesor: Josef Moravec

- Stanovte geometrické místo tečných kruhu stojících na sebe kolmo.
(1)
- Dvočlen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ povyšte na mocnost n tou a vymezte pro $n = \infty$.
(2)
- Kruh probíhá bodem $(5, 0)$, zevně dotýká se kruhu $x^2 + y^2 + 10x = 39$, určete geometrické místo středů kruhu tohoto.
(1)

- Rozdíl čtverců dvou celistvých čísel rovná se 24, která čísla to jsou? (2)
- Kruh dotýká se zevně kruhu daného v daném bodě a mimoto dotýká se dané přímky; stanovte rovnici onoho kruhu. (2)
- Pol poláry kruhu $x^2 + y^2 = 25$ je na přímce $3x = 4y$ a vzdálenost jeho od poláry jest $d = 24$. Stanovte pól a poláru (její rovnici). (1)
- Který vztah platí mezi osami elipsy a hyperboly, když se pravoúhle protínají? (1)
- Do elipsy vpíšeme kruh nad malou osou, obdržíme tím měsíčky, pak nad velkou osou opišeme zase kruh, čímž obdržíme nové měsíčky. Stanovte poměr ploch těch obou měsíčků. (1)
- $\sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \dots}}} = x$. Stanoviti x . (2)

Školní rok 1899 – 1900

Zkoušející profesor: Dr. Jan Chloupek

- Na elipse $3x^2 + 8y^2 = 120$ jest vyhledati bod přímce $x + 2y = 20$ nejbližší. (1)
- $$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1 + \frac{1}{x-1 + \frac{1}{x-1}}} \dots$$
 (1)
- Koule prořezána jest rovinným řezem, jehož plocha rovná se $1/3$ hlavního řezu a kůžel nad řezem tím se nalézající činí 480 cm^3 . (1)
- $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a+2k}{5^k} = \dots$$
 (1)
- $x + y = 39, x^3 + y^3 = 17199$ (2)
- Na elipse vyhledati bod, jenž by byl co nejbližší dané přímce a určiti vzdálenost bodu od přímky. (1)
- Dána jest křivka $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$. Vyhledati rovnici tečné v bodě $x_1 = 0, y_1 = 1$. (1)
- $$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$
 (1)

$$\bullet \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \dots \quad (1)$$

- Do rovnostranného kúžele vypsána jest koule, rovinou se základnou rovnoběžnou dotýkající se koule vzniká menší kůžel, do něhož je vepsána zase koule, atd. Určete součet všech takto vepsaných koulí. (2)

Školní rok 1900 – 1901

Zkoušející profesor: Josef Moravec

- Jak daleko jest pól o souřadnicích $(4, 3)$ od poláry kruhu, jehož rovnice je $x^2 + y^2$. (1)
- Konstrukce výrazu $x = \frac{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{a \cdot b}}$. (1)
- Kruh dotýká se kruhu $x^2 + y^2 = 39$ a prochází bodem $A(5, 0)$; stanovte geometrické místo souřadnic jeho středu. (1)
- Na ellipsu $9x^2 + 16y^2 = 144$ vyhledati bod, jehož stg. = 6. (1)
- Vyšetřiti geometrické místo průseků tečen kruhu k sobě kolmých. (1)
- Z látky, jejíž specifická váha je $\frac{8}{7}$ je vyroben kůžel; do něho vyhloubíme ze základny kůžel dutý podobný, aby celek plul na vodě; jak veliký bude nový kůžel? (2)
- Stanovte $3\sqrt{4 - 3\sqrt{4 - 3\sqrt{4 - \dots}}} \dots \infty$. (2)

Školní rok 1901 – 1902

Zkoušející profesor: Dr. Jan Chloupek

- $(1 + x)^{-2}$ (1)
- V geometrické řadě dáno $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{64}, n = 7$. Určiti součet. (1)
- Určiti obsah prstenu vzniklého otočením ellipsy kolem přímky rovnoběžné s osou hlavní. (1)
- $3^{\sin x + \sin y} = 4;$
 $8^{\sin^2 x - \sin^2 y} = 4$ (1)

- V trojúhelníku dán součet všech stran a dva úhly; jest řešiti trojúhelník. (2)

$$\bullet \frac{m^{\frac{x+a}{x+1}}}{\sqrt[m^{\frac{x}{x+1}}]} = \frac{m}{m^{\frac{x+a}{x+1}}}. \quad (1)$$

- Který úhel svírá tečna křivky $y = 6x^3 - 5x^2 + 7$ s osou x -ovou, je-li společný bod určen souřadnicí $x_1 = 3$. (1)
- Plocha omezená parabolou $y^2 = 2x$ a tětivou společnou s kružnicí $(x-1)^2 + y^2 = 9$. (1)
- Rozdělití přímkou tak, aby plocha obdélníka byla maximální. (2)
- $x + y = 7$, $5^x \cdot 8^y = 512\,000$. (2)
- $6 \cdot 3^{2x^2-6x-4} - 7 \cdot 3^{x^2-3x-2} = 420$ (1)
- Do kružnice vepsán desetiúhelník pravidelný; jeho obvod? (2)

Školní rok 1902 – 1903

Zkoušející profesor: Dr. Jan Chloupek

- Jest vyhledati krychlový obsah prstenu, jenž vznikne otočením elipsy kol osy rovnoběžné s velkou osou, je-li velká osa elipsy $a = 2$ cm, výstřednost $e = \sqrt{3}$ a vnitřní poloměr prstenu je 5 cm. (1)
- V jak velkém úhlu seče křivka $x^3 + 2y^2 + 2x - 3y - 9 = 0$ osu y . (1)
- $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{2x}$ (2)
- Jak velký jest krychlový obsah kolmého kužele, tvoří-li jeho plášť do roviny rozvinutý kruhový výsek o středovém úhlu a poloměru $s = 1,5$ cm. (3)
- Drát, jehož průřez jest kruh o poloměru $\varrho = 3,7216$ mm svinut jest v prsten kruhový, takže poloměr kruhu jeho osou utvořeného $r = 16,45$ cm. Tento kruh leží na vodorovné rovině a na něm a na téže rovině leží koule, jež se dotýká prstenu i roviny. Vyhledati jest její krychlový obsah. (1)

$$\bullet \sqrt[3]{\frac{3+x}{3-x}} - \sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}} = \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}} - \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}. \quad (1)$$

$$\bullet \sin 2x + \sin 3x = 3 \sin x. \quad (2)$$

- Kdosi uloží $a = 10.000$ K do banky tak, aby sobě neb svým dědicům po 20 letech pojistil peněžitou rentu $n = 20$ let trvající a každého roku splatnou a rok od roku o 100 K se zvětšující, zúročuje-li se 4 %; jak velká bude první renta. (1)
- Eliptické okno má být 5,4 m² veliké, je-li vedlejší osa úsek zlatým řezem rozdělené hlavní osy. (1)
- Ku parabole $y^2 = 4x$ vedena jest bodem $x' = 9$ tečna, jež v témže bodě se dotýká i kružnice; je-li střed kružnice na kladné ose x -ové, jest ustanoviti její rovnici a rovnici té tečny. (1)

Školní rok 1903 – 1904

Zkoušející profesor: Josef Moravec

- Libovolný bod ellipsy spojen je s oběma vrcholy hlavní osy; v jednom z těchto vrcholů je vztyčena kolmice na spojnici; ta se protíná s druhou spojnici v bodě N . Geometrické místo těchto bodů. (2)
- Čtyři za sebou jdoucí čísla dávají v součinu 3024; která to jsou. (2)
- Zahradník má něco méně než 50 stromů; vsadí-li je po pěti do řad, zbývá mu jeden, sází-li po sedmi, nedostávají se mu dva; kolik jich je? (1)
- Určiti průsečík normál paraboly $y^2 = 4x$ vedených v bodech (4,4) a (1,2). (2)
- Tloušťka čočky ploskovypuklé je 6 mm, obvod její 6 cm; jaký je obsah a váha při specifické hmotě skla 2,4? (2)
- 2 strany trojúhelníka mají rovnice $2x - 3y = 7$, $3x + y = 49$; průsečík výšek je v bodě (26,4); stanoviti rovnici třetí strany. (1)
- Někdo má 3 skříně a 19 různých koulí; do první vloží 4, do druhé 6, do třetí 9; kolikrát to může učinit? (1)
- Určete na parabole $y^2 = 18x$ bod nejbližší přímce $3x = 4y - 69$. (1)
- Kužel o poloměru 3 cm má obsah 30,68 cm³; z kterého kruhu je vzat plášť a k jakému úhlu středovému náleží? (2)
- Dány dva body; každým prochází přímka; tyto přímky se otáčejí kolem daných bodů tak, že svírají stále úhel stálý; stanoviti geometrické místo průseku. (1)
- Hospodář koupil za 1200 K ovčí, z nichž si 15 ponechal a prodal ostatní za 1080 K, při každé vydělal 4 K; kolik jich bylo? (1)

- Dány rovnice kružnic $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$; určiti průsek chordál. (1)
- $\sin 7x = \sin 3x$ řešiti. (1)
- Proměnlivý kruh probíhá stále bodem $(4, 0)$ a dotýká se přímky $x = -4$; najíti geometrické místo jeho středu. (2)

Školní rok 1904 – 1905

Zkoušející profesor: Josef Moravec

- Větou binomickou $\sqrt[5]{91}$. (2)
- Polára ellipsy $x^2 + 2y^2 = 4$ má rovnici $5x + 2y = 6$; určete pól. (2)
- Tři čísla tvoří úměru spojitou, součet jich jest 126, součin 19 824. (3)
- Pravoúhlý trojúhelník o podponě 12 cm a jednom úhlu $40^\circ 42' 45''$ otočí se kol podpony. Vypočtete objem rotačního těla. (3)
- $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$. (2)
- Sdružené průměry ellipsy mají rovnice $3x + 4y = 0$, $12y - 25x = 0$. Určete rovnici ellipsy prochází-li tato ještě bodem $(-4, 3)$. (1)
- Jak velkou železnou kostku ($s = 7, 7$) lze položit na čtvercovou dřevěnou desku ($s_1 = 0,68$), jejíž rozměry jsou: strana 4 dm a tloušťka 2 cm, aby se ve vodě potopila jen deska dřevěná? (2)
- $x^2 + xy + y^2 = 19$, $x^2 - xy + y^2 = 7$. (2)
- Na osách jsou dány úsečky, které tvoří obdélník daného obsahu. Vyhledat geometrické místo čtvrtého vrcholu. (2)

Školní rok 1905 – 1906

Zkoušející profesor: Dr. Jan Chloupek

- $\sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{\operatorname{tg} x}$. (1)
- V které vzdálenosti jest na svahu odchyleném od vodorovné roviny o 25° sázeti stromy, aby byly až dospějou nahoře 6 m od sebe vzdáleny. (1)
- Je-li $x = 0$, určete hodnotu zlomku $\frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x}$. (1)
- Nad podstavou polokoule obsahu 50 jest postaven kužel, jeho výška je průměr koule. Určete společnou část. (1)

- Kolikátá permutace z prvků a, o, p, r, v je právo? (1)
- Jak vysoký je válec o poloměru r , jenž se právě převrátil na šikmé ploše skleněné o úhlu 15° . (1)
- Elipsa v poloze osové má ohnisko $(4, 0)$ a prochází bodem $(4, \frac{1}{5})$. (1)

Kdo byli mladí muži, kteří u maturitní zkoušky řešili tyto poměrně náročné úlohy? Třicet jedna z nich pocházelo z jihočeských vesnic, pět z Českých Budějovic, pět z jiných jihočeských měst a konečně dvanáct mělo své rodiště ve vesnicích a městech mimo jižní Čechy. Velká většina z nich byla ve svých rodinách první, kdo se setkal s matematikou na této úrovni. Určitě měli matematiku rádi, byli v ní úspěšní a byli na ni takřka-jíc nadaní. Neměli ale žádný zázračný „*genius gen*“, řečeno slovy Terrence Taa. Čím byli vybaveni, byla schopnost pilně a soustředěně pracovat, kterou si přinesli ze svých rodin a kterou v nich gymnázium podporovalo. To je schopnost, kterou musí naše střední školství v mladé generaci pěstovat i dnes. Budeme-li nadále zavrňovat matematiku, bude to samozřejmě tím těžší.

Literatura

- [1] Státní okresní archiv České Budějovice: Jirsíkovo státní gymnasium, Maturitní protokoly, inv. č. 1200, signatura II/b/IV – 42, 1894 – 1906, karton č. 60, 61.
- [2] Státní okresní archiv České Budějovice: Jirsíkovo státní gymnasium, Výkaz o zkouškách maturitních 1899, Přehled výsledků zkoušek maturitních 1900 – 1906, inv. č. 1021 – 1028, signatura I/c – 1013 – 1020, kniha č. 1021 – 1028.
- [3] Státní okresní archiv České Budějovice: Hlavní katalog 1899 – 1899, ... , 1905 – 1906, ... inv. č. 40 – 47, sign. I/c – 32 – 39, kniha č. 40 – 47.
- [4] 1868 – 1928 Šedesát let Jirsíkova gymnasia v Č. Budějovicích, vydal Výbor pro oslavu šedesátiletého trvání ústavu v Českých Budějovicích, vytiskla knihtiskárna Karla Fialy, České Budějovice, 1928.
- [5] Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, red. Dr. F. J. Studnička, , roč. VIII., vydala Jednota českých matematiků v Praze 1879.
- [6] Weiss, M.: Matematikou proti iracionalitě, Lidové noviny, str. 1, Praha, 7. 12. 2010.
- [7] Tao, T.: <http://terrytao.wordpress.com/career-advice/does-one-have-to-be-a-genius-to-do-maths/>

61. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

Označme n součet všech desetimístných čísel, která mají ve svém dekadickém zápise každou z číslic $0, 1, \dots, 9$. Zjistěte zbytek po dělení čísla n sedmdesáti sedmi.

(Pavel Novotný)

A–I–2

Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě dva společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. Ukažte rovněž, že na setkání mohlo být právě šest osob.

(Vojtech Bálint)

A–I–3

Označme S střed kružnice vepsané, T těžiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.

- Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV .
- Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV .

(Jaromír Šimša)

A–I–4

Nechť p , q jsou dvě různá prvočísla, m , n přirozená čísla a součet

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$$

je celé číslo. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1.$$

(Jaromír Šimša)

A–I–5

Jsou dány dvě shodné kružnice k_1 , k_2 o poloměru rovném vzdálenosti jejich středů. Jejich průsečíky označme A a B . Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B , který označíme L . Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A , který označíme K . Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC , prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C .

(*Tomáš Jurík*)

A–I–6

Najděte největší reálné číslo k takové, že nerovnost

$$\frac{2(a^2 + kab + b^2)}{(k+2)(a+b)} \geq \sqrt{ab}$$

platí pro všechny dvojice kladných reálných čísel a , b .

(*Ján Mazák*)

KATEGORIE B

B–I–1

Mezi všemi desetimístnými čísly dělitelnými jedenáctí, v nichž se žádná číslice neopakuje, najděte nejmenší a největší.

(*Jaroslav Zhouf*)

B–I–2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , jehož obsah označme P . Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB . Na kolmicích k přímce AB , které procházejí vrcholy A a B , v polorovině opačné k polorovině ABC uvažujme po řadě body D a E , pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojúhelníku DEF označme Q . Dokažte, že platí $P \geq Q$, a zjistiťte, kdy nastane rovnost.

(*Jaroslav Švrček*)

B–I–3

Najděte všechny dvojice reálných čísel x , y , které vyhovují soustavě rovnic

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$

$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ značí *dolní celou část* čísla a , tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje a .) (Pavel Novotný)

B–I–4

Jsou dány dvě různoběžky a , c procházející bodem P a bod B , který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A , C a D po řadě na přímkách a , c a PB . (Jaromír Šimša)

B–I–5

V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří.

a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet.

b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá. (Ján Mazák)

B–I–6

Anna a Bedřich hrají karetní hru. Každý z nich má pět karet s hodnotami 1 až 5 (od každé jednu). V každém z pěti kol oba vyloží jednu kartu a kdo má vyšší číslo, získá bod. V případě karet se stejnými čísly nezíská bod nikdo. Použité karty se do hry nevracejí. Kdo získá na konci více bodů, vyhrál. Kolik procent ze všech možných průběhů takové hry skončí výhrou Anny? (Tomáš Jurík)

KATEGORIE C

C–I–1

Najděte všechny trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, které dávají při dělení dvojčlenem $x + 1$ zbytek 2, při dělení dvojčlenem $x + 2$ zbytek 1, přičemž $p(1) = 61$. (Jaromír Šimša)

C–I–2

Délky stran trojúhelníku jsou v metrech vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li trojúhelník obvod 72 m a je-li nejdelší strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku vepsané kružnice v poměru 3 : 4. (*Pavel Leischner*)

C–I–3

Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c , pro něž platí množinová rovnost

$$\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\},$$

kde (x, y) a $[x, y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y . (*Tomáš Jurík*)

C–I–4

Reálná čísla a, b, c, d vyhovují rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

a) Dokažte, že mezi čísly a, b, c, d se najdou dvě se součtem nejvýše 4.

b) Jakou nejmenší hodnotu může mít součet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

(*Ján Mazák*)

C–I–5

Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a rameny délky b . Pomocí nich vyjádřete poloměr R kružnice opsané a poloměr r kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Pak ukažte, že platí $R \geq 2r$, a zjistěte, kdy nastane rovnost. (*Leo Boček*)

C–I–6

Na hrací desce $n \times n$ tvořené bílými čtvercovými poli se Markéta a Tereza střídají v tazích jedním kamenem při následující hře. Nejprve Markéta umístí kámen na libovolné pole a toto pole obarví modře. Dále vždy hráčka, která je na tahu, provede s kamenem *skok* na pole, které je dosud bílé, a toto pole obarví modře. Přitom *skokem* rozumíme obvyklý tah šachovým jezdcem, tj. přesun kamene o dvě pole svisle nebo vodorovně a současně o jedno pole v druhém směru. Hráčka, která je na řadě a již nemůže táhnout, prohrává. Postupně pro $n = 4, 5, 6$ rozhodněte, která z hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky.

(*Pavel Calábek*)

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2011 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 179

Nechť pro základny AB a CD lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB| = 2|CD|$. Označme M průsečík jeho úhlopříček AC a BD , E střed strany AD a P průsečík přímek EM a CD . Dokažte, že platí $|CP| = |CD|$.

Robert Geretschlüger (Graz)

Úloha 180

Najděte nejmenší přirozené číslo k s vlastností: Z každých k (ne nutně různých) přirozených čísel z množiny $\{2, 3, 4, \dots, 66\}$ lze vždy vybrat několik čísel, jejichž součin dává při dělení číslem 67 zbytek 1.

Pavel Calábek

Nakladatelství MATH Publishing nabízí zájemcům o matematiku následující publikace:

Cesta k integrálu – historie určitého integrálu od Archimeda k Riemannovi.

Historie analýzy – historie matematické analýzy od antiky do zformování funkcionální analýzy, 14 kapitol, 13 předních světových historiků matematiky, historie jednotlivých odvětví matematické analýzy.

Eukleides: Základy – teprve historicky 2. české vydání, k dispozici je 1., 2., 3. část, s komentářem prof. Vopěnky.

Al Chvarizmi: Aritmetický a algebraický traktát – poprvé česky, opět komentář prof. Vopěnky.

Kontaktní adresa: RNDr. Karel Vašíček, Družstevní 117, 530 09 Pardubice,
tel: 466401520, 605848934, mail: *dr.vasicek@atlas.cz*

V nabídce jsou i další publikace. Podrobněji na <http://www.mathpublishing.eu>
