

MATEMATIKA

O trisekci úhlu

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Trisekce úhlu je jedna z tzv. antických úloh, mezi něž dále počítáme Delfskou úlohu neboli duplikaci krychle a kvadraturu kruhu. Jedná se o konstrukční úlohu, kdy je dán úhel velikosti φ , a je žádáno nalézt konstrukci úhlu o velikosti $\frac{1}{3}\varphi$. Tato úloha byla proslulá již ve starém Řecku, avšak tehdejšími prostředky její řešení nebylo nalezeno a vznikla hypotéza, že příslušná konstrukce neexistuje. Tuto hypotézu nyní poněkud upřesníme.

Konstrukce v antické geometrii se odvíjejí od použití tehdy dostupných prostředků. Prováděly se v písku, kde nástrojem pro rýsování úseček byla rovná tyč (pravítko) a nástrojem pro rýsování kružnic byl provázek se dvěma kolíky, z nichž jeden se zabodl do středu kružnice, a druhým se kružnice o poloměru rovném délce provázku opsala. Byla to analogie našeho kružítko. Už na tomto místě poznamenejme, že s příchodem „nové technologie“, tj. použitím listu papíru místo písku, k žádné zásadní změně nedošlo. Naopak, byl to právě řecký matematik *Eukleides* (žil asi v letech 325–260 př.n.l.), který abstrahoval možnosti této „antické techniky“ do svých slavných postulátů, které publikoval ve svém stěžejním díle *Základy* (řecky *Stoicheia*), viz [3]. Vlastních postulátů je pět, a jsou následující:

- (P1) Každými dvěma body lze vést úsečku.
- (P2) Tuto úsečku lze libovolně prodloužit.
- (P3) Každou úsečkou lze opsat kružnici kolem jednoho jejího konce.
- (P4) Všechny pravé úhly jsou si rovny.
- (P5) Mějme přímku a bod, který na ní neleží. Tímto bodem lze vést jedinou rovnoběžku s danou přímkou.

Už v době antické se matematici přeli, zda je postulát (P5) závislý či nezávislý na postulátech (P1)–(P4), což v době novověké vedlo k objevu tzv. neeukleidovských geometrií, avšak to je jiný příběh, nesouvisející s naším problémem trisekce úhlu.

Z Eukleidových postulátů ihned plyne, že pomocí pravítka a kružítka lze provádět konstrukce, které lze rozložit na následující elementární konstrukce:

- (I) Jsou-li dány dva různé body A a B , narýsovat přímku procházející body A, B .
- (II) Je-li dán bod A a úsečka délky r , narýsovat kružnici o středu A a poloměru r .

Každou konstrukci, kterou lze provést postupným prováděním elementárních konstrukcí (I) a (II), nazýváme *eukleidovská konstrukce*. Jedná se zejména o následující konstrukce:

- a) Jsou-li dány dvě různoběžné přímky v rovině, zkonstruovat jejich průsečík.
- b) Je-li v rovině dána kružnice a přímka, nalézt jejich společné body.
- c) Jsou-li v rovině dány dvě kružnice, nalézt jejich společné body.

V univerzitním kurzu algebry se obvykle dokazuje následující věta (jejíž důkaz neuvádíme, i když je poměrně jednoduchý).

Věta

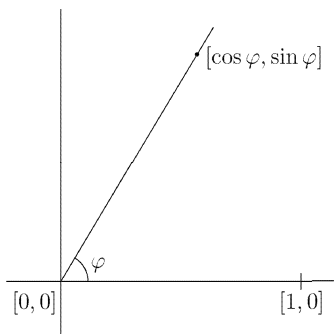
Je dáno k úseček o délkách $a_1, a_2, \dots, a_k$. Nechť T je těleso, které vznikne z tělesa racionálních čísel adjunkcí čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$, a dále nechť β je nulovým bodem ireducibilního (nerozložitelného) polynomu

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n$$

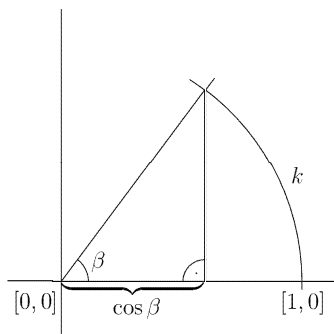
nad tělesem T . Lze-li úsečku délky β zkonstruovat eukleidovsky, pak stupeň n tohoto polynomu je mocninou 2, tj. $n = 2^m$.

A nyní zpět k trisekci úhlu. Užitím prostředků analytické geometrie lze naši úlohu formulovat takto: Umístíme úhel velikosti $\varphi \in (0; 2\pi)$ do kartézské souřadnicové soustavy tak, aby jeho vrchol byl v počátku (bod $[0, 0]$) a aby jedno jeho rameno leželo na ose x , tj. aby bylo určeno body $[0, 0]$ a $[1, 0]$ (obr. 1). Druhé rameno úhlu φ je pak zřejmě určeno body $[0, 0]$

a $[\cos \varphi, \sin \varphi]$. Rozdělit úhel φ na třetiny pak znamená nalézt bod, který má souřadnice $[\cos \frac{\varphi}{3}, \sin \frac{\varphi}{3}]$. Jelikož $\sin \frac{\varphi}{3} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi}{3}}$, úloha se převádí na konstrukci úsečky o velikosti $\cos \frac{\varphi}{3}$ pomocí úsečky o (orientované) velikosti $\cos \varphi$. Čtenáři je jistě zřejmé, že známe-li úsečku velikosti $\cos \beta$, je tím určen úhel β a naopak, je-li dán úhel velikosti β , jeho umístěním do souřadnicové soustavy a opsáním jednotkové kružnice k ihned získáme úsečku velikosti $\cos \beta$ (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

A nyní použijeme vzorec pro $\cos(\alpha + \beta)$, když φ vyjádříme jako $\frac{2}{3}\varphi + \frac{1}{3}\varphi$, a dále opět týž vzorec pro $\frac{2}{3}\varphi = \frac{1}{3}\varphi + \frac{1}{3}\varphi$. Získáme tak vztah

$$4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3} - \cos \varphi = 0.$$

Na levé této straně rovnice je však polynom 3. stupně nad tělesem T , které vznikne z tělesa racionálních čísel adjunkcí čísla $\cos \varphi$. Pro některé hodnoty φ je tento polynom reducibilní, např. pro $\varphi = 0^\circ$ ($\cos \varphi = 1$), $\varphi = 90^\circ$ ($\cos \varphi = 0$), $\varphi = 180^\circ$ ($\cos \varphi = -1$), a každý čtenář jistě dokáže nalézt konstrukci, která dělí tyto konkrétní tři úhly na třetiny. Ovšem např. volbou úhlu φ , pro který je $\cos \varphi = \frac{3}{4}$, získáme polynom

$$16 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 12 \cos \frac{\varphi}{3} - 3,$$

který je ireducibilní, a jehož stupeň je 3, tedy není mocninou 2. Dle výše uvedené věty tedy nelze eukleidovsky zkonstruovat úsečku délky $\cos \frac{\varphi}{3}$,

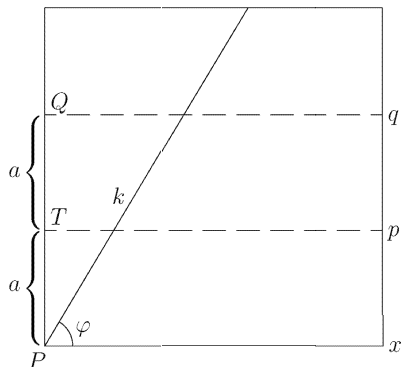
a tedy ani úhel $\frac{\pi}{3}$. Takto byla pomocí aparátu algebry dokázána nemožnost eukleidovské konstrukce trisekce obecného úhlu.

Připomeňme nyní čtenáři úvodní zmínku o nástrojích, užívaných Eukleidem a antickými matematiky při konstrukcích v písku. Ve starověku ovšem existovaly i jiné civilizace než řecká, které byly izolované a rozvíjely matematiku jinými prostředky. Inspirováni [2] uveďme starou civilizaci dálného východu, a to civilizaci japonskou. Ta se vyznačovala mj. tím, že ovládala technologii výroby papíru. Nezačínala proto konstrukcemi v písku, ale rovnou na papíru. List papíru má tu vlastnost, že ho lze (na rozdíl od písku) překládat, a jak je zřejmé, vznikne-li přímka na listu papíru přeložením (jako rýha, tzv. přehyb), je viditelná po obou stranách tohoto listu. Umění skládání a překládání papíru dalo vzniknout tzv. umění *origami* (viz [1] a [4]). Na listu papíru tak jeho překládáním vznikají konstrukce přímk a jejich průsečíků. Čtenář jistě ihned pochopí, jak pomocí překládání listu papíru lze např. zkonstruovat přímku, která prochází daným bodem a která je kolmá k dané přímce, a tedy rovněž, jak k dané přímce zkonstruovat rovnoběžku procházející daným bodem. Podobně jako Eukleides odvodil postuláty (P1)–(P5), precizující planimetrické konstrukce, jsou dnes známé také tzv. Huzitovy axiomy pro origami, viz [1]:

- (A1) Jsou-li dány dva různé body A a B , existuje jediný přehyb procházející body A a B .
- (A2) Jsou-li dány dva různé body A a B , existuje jediný přehyb umísťující bod A na bod B .
- (A3) Jsou-li dány dvě přímky k a l , existuje přehyb umísťující k na l .
- (A4) Je-li dán bod P a přímka k , existuje jediný přehyb kolmý k přímce k , který prochází bodem P .
- (A5) Jsou-li dány různé body A a B a přímka p , existuje přehyb umísťující A na p a procházející bodem B .
- (A6) Jsou-li dány různé body A a B a dvě různé přímky p a q , existuje přehyb umísťující bod A na přímku p a B na q .
- (A7) Je-li dán bod A a přímky p a q , existuje přehyb umísťující A na p a kolmý ke q .

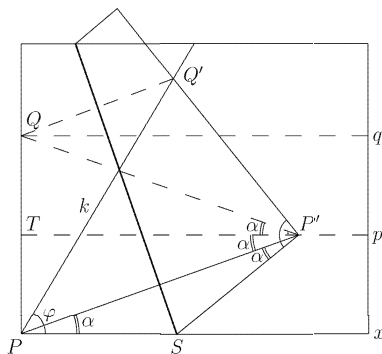
Použitím (A1)–(A7) lze provádět všechny konstrukce, které dávají vznik tzv. skládankám origami. Pro nás je však nejdůležitější, že pomocí těchto skládanek, které budeme považovat také za elementární konstrukce, lze řešit více úloh než pomocí konstrukcí eukleidovských. Speciálně lze takto

zkonstruovat trisekci úhlu (viz [2]), jak ukážeme. Nechť je dán úhel velikosti φ na (pravoúhelníkovém) listu papíru (obr. 3).



Obr. 3

Nyní zvolme libovolnou kladnou délku a a pomocí přehybu zkonstruujeme dvě rovnoběžky p a q ve vzdálenostech a a $2a$ od hrany x papíru (obr. 3). Dále podle (A6) přeložme list papíru tak, aby bod P přešel do bodu P' na přímce p a bod Q do bodu Q' na přímce k , což je druhé rameno úhlu φ , kde S značí bod přehybu na hraně x (obr. 4).



Obr. 4

Jelikož $|PT| = |TQ|$, je $|\sphericalangle PP'T| = |\sphericalangle QP'T| = \alpha$, a protože $p \parallel x$, je také $|\sphericalangle PP'T| = |\sphericalangle SPP'|$. Vzhledem k tomu, že $|SP| = |SP'|$, je

$|\angle SPP'| = |\angle SP'T|$. Odtud plyne, že $3|\angle SPP'| = |\angle SP'Q|$. Ze souměrnosti sdružených úhlů konečně plyne $\varphi = |\angle SPQ'| = |\angle SP'Q|$, tedy $\alpha = \frac{1}{3}\varphi$.

Jak jsme dříve zdůvodnili, tato konstrukce nemůže být eukleidovská, je však dostatečně jednoduchá. K jejímu provedení stačí list papíru a překládání přehybů. Takže závěrem: kdyby měl Eukleides papír...

Literatura

- [1] *Alperin, R. C.*: A mathematical theory of origami constructions and numbers. New York Journal Math. **6**, 2000.
- [2] *Casselman B.*: If Eukleides had been Japanese. Notices American Mathematical Society, **54**, 2007).
- [3] *Eukleides*: Základy. Vyd. OPS, Nymburk 2008.
- [4] *Hull T.*: Project origami: Activities for exploring mathematics. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.
- [5] *Geretschlager R.*: Geometrie origami. Arbelos, Shipley 2008.

Úlohy s dopravní tematikou

PAVLA PAVLÍKOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – ANTONÍN SLAVÍK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Tento článek¹ volně navazuje na předchozí představení vznikající sbírky aplikačních úloh² a je zaměřen na úlohy související s různými situacemi s dopravní tematikou. Uvedené příklady z matematického hlediska procvičují lineární, kvadratickou a lineární lomenou funkci, řešení jednoduchých rovnic a nerovnic, práci s grafem a vážený průměr.

¹Článek vznikl s podporou rozvojového projektu MŠMT č. 14/38 (Podpora informačních center a spolupráce se středními školami a veřejností).

²Pavlíková, P. – Robová, J. – Slavík, A.: *Fahrenheit, Celsius a americký cent*, MFI, roč. 20 (2010/2011), č. 7.

1. Benzin nebo nafta?

Paní Nováková uvažuje o koupi nového vozu. Rozhoduje se mezi variantou vozu s naftovým nebo benzinovým motorem. Auto, které si vybrala, stojí s naftovým motorem 311 000 Kč, cena téhož auta s benzinovým motorem je 246 900 Kč. Výrobce udává kombinovanou spotřebu na 100 km je u naftového pohonu 4,8 litru, u benzinového 5,9 litru. Po ujetí kolika kilometrů by se vyplatila investice do dražší, tedy naftové verze, uvažujeme-li cenu benzinu 32,70 Kč za litr a cenu nafty 31,80 Kč za litr?³

Řešení. Daný problém představuje jednoduchou variantu rozhodovací úlohy, kdy hledáme pro nás optimální řešení. Ke správnému rozhodnutí můžeme využít schopnost pracovat s lineární nerovnicí.

Označíme-li si x počet najetých kilometrů, potom náklady N_1 spojené s koupí benzinového motoru jsou

$$N_1 = \left(246\,900 + x \cdot 32,70 \cdot \frac{5,9}{100} \right) \text{ Kč}$$

(celkové náklady jsou součtem kupní ceny vozu a částky, kterou zaplatíme v průměru po ujetí x kilometrů za pohonné látky). Pro variantu s naftovým motorem obdobně platí

$$N_2 = \left(311\,000 + x \cdot 31,80 \cdot \frac{4,8}{100} \right) \text{ Kč.}$$

Je zřejmé, že krátce po nákupu vozu bude $N_1 < N_2$. Naším úkolem je vypočítat hodnotu x , při které se začne vyplácet investice do dražšího motoru. Řešíme tedy nerovnici $N_1 \geq N_2$, tj.

$$246\,900 + x \cdot 32,70 \cdot \frac{5,9}{100} \geq 311\,000 + x \cdot 31,80 \cdot \frac{4,8}{100},$$

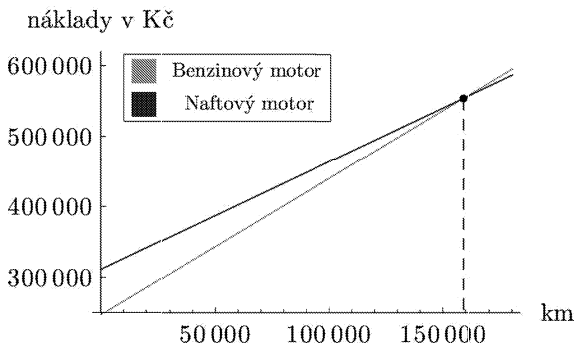
odkud vyplývá

$$x \geq 159\,097.$$

Pokud by se paní Nováková rozhodovala jen podle uvedených údajů (a nikoliv podle vlastností motoru atd.), vyplatil by se jí naftový pohon pouze v případě, kdyby s vozem plánovala ujet více než 160 tisíc kilometrů.

³Uvedené ceny pohonných hmot byly aktuální k 23. 11. 2010.

Danou úlohu můžeme rovněž řešit graficky. Do jednoho grafu vyneseme závislosti nákladů N_1 , N_2 na počtu x ujetých kilometrů; hledanou hodnotu odečteme jako x -ovou souřadnici průsečíku obou přímk:



Se studenty dále můžeme diskutovat nad otázkou, jak by se změnil výsledek úlohy, pokud by například cena za litr benzínu vzrostla o 1,50 Kč a cena za litr nafty klesla o 0,20 Kč (v tom případě by se naftový pohon vyplatil po ujetí přibližně 128 tisíc kilometrů), resp. jak by výsledné rozhodnutí paní Novákové ovlivnila pobídka prodejce v podobě slevy 30 000 Kč při nákupu naftového motoru (hraniční hodnota by byla přibližně 85 tisíc kilometrů).

2. Červená na semaforu

Automobil jedoucí rychlostí $v_0 = 50$ km/h se blíží ke světelné křižovatce. V okamžiku, kdy se po zeleném signálu rozsvítí žlutý⁴ signál „Pozor!“, je auto 45 metrů před křižovatkou, a doba, po kterou svítí žlutý signál, je 3 sekundy. Jak by se měl řidič zachovat, jestliže se bojí ztráty bodů za projetí křižovatky na červenou? Má pokračovat v jízdě stálou rychlostí, nebo má začít brzdit, nebo má naopak zrychlit? Předpokládejme, že reakční doba řidiče je $t_R = 1$ sekunda.

⁴Pokud by vás v této chvíli lákalo protestovat proti termínu *žlutý signál*, neboť světlo na semaforu se jeví oranžové, lze se odvolat na text Vyhlášky č. 30/2001 Sb., kterou se provádějí pravidla provozu na pozemních komunikacích a úprava a řízení provozu na pozemních komunikacích, ve znění vyhlášky č. 153/2003 Sb., vyhlášky č. 176/2004 Sb., vyhlášky č. 193/2006 Sb., vyhlášky č. 507/2006 Sb., vyhlášky č. 202/2008 Sb., vyhlášky č. 91/2009 Sb. a vyhlášky č. 247/2010 Sb. Pro matematickou podstatu úlohy naštěstí není barva signálu „Pozor!“ důležitá.

a) Úlohu řešte pro případ

- (i) suché asfaltové vozovky (volte koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami vozidla $f = 0,8$),
- (ii) namrzající asfaltové vozovky (volte koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami vozidla $f = 0,3$).

b) Jakou maximální rychlostí by mohl jet řidič v případě ii), aby dobrzdil ještě před semaforem?

Řešení. Při řešení této úlohy je nutné si uvědomit, že dráha potřebná pro zastavení vozidla je součtem tzv. reakční dráhy a vlastní brzdné dráhy.

Reakční dráha s_R je dráha, kterou řidič ujede od okamžiku, kdy rozpozná kritickou situaci, do okamžiku, kdy tuto informaci vyhodnotí a začne brzdit. Délka reakční doby řidiče závisí na jeho okamžitém zdravotním stavu, koncentraci a dalších okolnostech. Za průměrnou reakční dobu t_R bývá považována jedna sekunda. Pohybuje-li se vozidlo rychlostí v_0 , potom pro reakční dráhu platí (jde o rovnoměrný pohyb)

$$s_R = v_0 \cdot t_R.$$

Při výpočtu vlastní brzdné dráhy můžeme využít zjednodušené verze zákona zachování energie.⁵ Označme m hmotnost vozidla, f koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami vozidla, g tíhové zrychlení ($g \doteq 9,81 \text{ m/s}^2$) a s_B brzdnou dráhu. Předpokládáme-li, že se kinetická energie vozidla $\frac{1}{2}m \cdot v^2$ při brzdění přemění v práci třecích sil $m \cdot f \cdot g \cdot s_B$ působících mezi pneumatikami a vozovkou, platí přibližně

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = m \cdot f \cdot g \cdot s_B,$$

odkud pro výpočet brzdné dráhy s_B získáme přibližný vztah

$$s_B = \frac{v_0^2}{2f \cdot g}$$

a pro celkovou dráhu s potřebnou pro zastavení vozidla dostaneme

$$s = s_R + s_B = v_0 \cdot t_R + \frac{v_0^2}{2f \cdot g}.$$

⁵Ačkoliv se jedná o zjednodušení celého problému (nezabýváme se kvalitou brzdového systému daného vozu, hloubkou vzorku na pneumatikách atd.), analogický přibližný vztah najdeme mimo jiné i v normě ČSN 73 6101 Projektování silnic a dálnic v příloze B pro výpočet délky rozhledu pro zastavení.

a) V případě i) získáme po dosazení $f = 0,8$ hodnotu

$$s = \left(\frac{50}{3,6} \cdot 1 + \frac{50^2}{3,6^2 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 9,81} \right) \text{ m} \doteq 26 \text{ m.}$$

Řidič rozhodně stihne zabrzdit ještě dříve, než se na semaforu rozsvítí červená.

V případě ii) platí pro $f = 0,3$

$$s = \left(\frac{50}{3,6} \cdot 1 + \frac{50^2}{3,6^2 \cdot 2 \cdot 0,3 \cdot 9,81} \right) \text{ m} \doteq 47 \text{ m.}$$

Na namrzlé vozovce tedy řidič nestihne dobrzdit ještě před semaforem. Pokud by vůbec brzdit nezačal a pokračoval v jízdě rychlostí v_0 , potom by za 3 sekundy ujel 41,7 metru. Nestihl by proto projet, dokud svítí žluté světlo, a do křižovatky by vjel na červenou, čímž by riskoval pět trestných bodů do své karty řidiče. Jeho jedinou možností je proto v situaci ii) přiměřeně zrychlit.⁶

b) Hledáme-li maximální číselnou hodnotu $v_{\max}$ počáteční rychlosti, při níž by řidič dobrzdil v situaci ii) ještě před semaforem, řešíme kvadratickou nerovnici

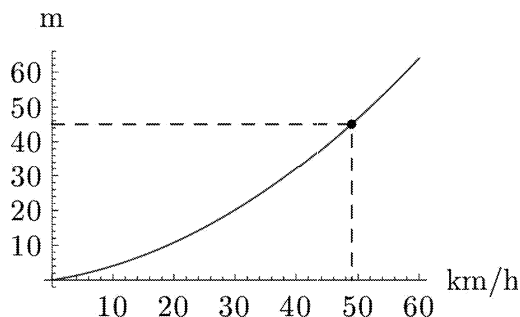
$$45 \geq \frac{v_{\max}}{3,6} \cdot 1 + \frac{v_{\max}^2}{3,6^2 \cdot 2 \cdot 0,3 \cdot 9,81},$$

tedy

$$0 \geq v_{\max}^2 + 21,19 \cdot v_{\max} - 3432,72.$$

Jejím řešením zjistíme, že počáteční rychlost nesmí překročit 48,95 km/h. Řešení ilustruje následující obrázek (dráha s potřebná k zastavení je kvadratickou funkcí počáteční rychlosti v_0):

⁶ Riziko bodového postihu za překročení maximální povolené rychlosti v obci o méně než 20 km/h je nižší (2 body) než v případě jízdy na červenou.



3. Kombinovaná spotřeba

Pan Bezradný si zakoupil nový automobil. Při jeho koupi mu prodávající sdělil následující údaje týkající se spotřeby daného modelu: kombinovaná spotřeba 6,9 l/100 km, spotřeba mimo město 4,9 l/100 km (spotřebou v městském provozu se takticky nechlubil). Kupující tedy očekával, že spotřeba ve městě se bude pohybovat kolem 9 l/100 km.⁷ Pan Bezradný však jezdil převážně v městském provozu. Ke svému zděšení brzy zjistil, že i po tzv. záběhu nového motoru dosahuje průměrné spotřeby nad 10 l/100 km, přestože si zakládá na tom, že má „velmi lehkou nohu na plynu“. Vypravil se tedy ke svému prodejci tento fakt reklamovat. Byla jeho stížnost oprávněná?

Řešení. Kupující doplatil na to, že si nezjistil všechny informace. Na základě směrnice č. 70/220/EHS (ve znění pozdějších novel, zejména směrnice č. 91/441/EHS) se v současné době kombinovaná spotřeba S osobních vozidel určuje jako *vážený průměr* spotřeby při jízdě městem M a při jízdě mimo město V podle vzorce

$$S = \frac{4 \cdot M + 7 \cdot V}{11}.$$

Pro spotřebu v městském provozu v případě pana Bezradného vychází

$$M = \frac{11 \cdot S - 7 \cdot V}{4},$$

⁷ Naivní zákazník při svém odhadu vycházel ze zkušenosti se svým předchozím vozem z roku 1990, u něž byly v technickém průkazu uvedeny spotřeby v režimech *město/90 km/120 km* (podle směrnice č. 80/1268/EHS) a kombinovaná spotřeba se počítala jako aritmetický průměr těchto hodnot.

tedy

$$M = \frac{11 \cdot 6,9 - 7 \cdot 4,9}{4} \text{ l/100 km} = 10,4 \text{ l/100 km.}$$

Stížnost pana Bezradného nebyla oprávněná.

4. Předjíždění na dálnici

Na dálnici jel v pomalém jízdním pruhu kamion dlouhý 12 m rychlostí $v_0 = 80 \text{ km/h}$. Když se k němu zezadu na 100 m přiblížil další kamion jedoucí rychlostí 90 km/h, vybočil tento druhý kamion do rychlého jízdního pruhu a pustil se do předjíždění. Když byl 100 m před předjížděným kamionem, vrátil se zpět do pomalého jízdního pruhu a pokračoval v jízdě. Pro zjednodušení předpokládejme, že oba řidiči měli nastavený tempomat, takže udržovali po celou dobu manévru konstantní rychlost.

- Jak dlouho při celém předjíždění blokoval kamion rychlý pruh dálnice?
- Odvoďte obecný vztah pro dobu předjíždění t při rychlosti předjíždějícího kamionu v . Sestrojte graf závislosti doby předjíždění t v sekundách na rychlosti předjíždějícího kamionu v pro $v \in \langle 81 \text{ km/h}; 100 \text{ km/h} \rangle$.
- Vypočítejte, jakou rychlostí by musel kamion předjíždět, aby rychlý pruh blokoval maximálně po dobu jedné minuty.

Řešení.

- Během předjíždění musel druhý kamion ujet o $(100 + 12 + 100)$ metrů více než kamion, který byl předjížděn. Druhý kamion se vzhledem k prvnímu pohyboval rychlostí o $10 \text{ km/h} = (10 : 3,6) \text{ m/s}$ větší. Celý předjížděcí manévr mu proto trval dobu

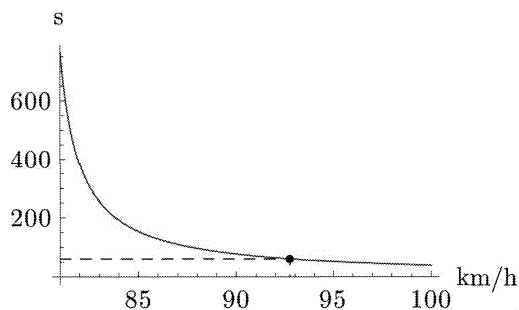
$$t = \frac{100 + 12 + 100}{10 : 3,6} \text{ s} \doteq 76 \text{ s.}$$

Rychlý pruh dálnice byl blokován po dobu 76 s, tedy déle než jednu minutu. Nelze se proto divit, že na mnoha úsecích našich silnic je jízda kamionů v rychlém pruhu zakázána.

- Pro čas t vyjádřený v sekundách lze odvodit vztah

$$t = \frac{(100 + 12 + 100) \cdot 3,6}{v - 80} \text{ s} = \frac{763,2}{v - 80} \text{ s,}$$

kde v je rychlost předjíždějícího kamionu v km/h. Čas t je lineární lomenou funkcí rychlosti v . Pro hodnoty $v \in \langle 81 \text{ km/h}; 100 \text{ km/h} \rangle$ dostaneme část větve hyperboly:



- c) Zajímá nás, pro jakou číselnou hodnotu rychlosti $v_{\min}$ bude $t \leq 60$ s. Řešíme proto nerovnici

$$\frac{(100 + 12 + 100) \cdot 3,6}{v_{\min} - 80} \leq 60.$$

Odtud plyne, že předjíždějící kamion by se musel po silnici pohybovat rychlostí alespoň 92,72 km/h.

Závěr

Uvedené úlohy byly věnovány různým situacím v dopravě. S dalšími aplikačními úlohami, které vytváří kolektiv autorů z Matematicko-fyzikální fakulty UK, se můžete v blízké době seznámit na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Na adrese

www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/aplikace

budou zveřejněny některé nové úlohy z připravované sbírky.

O rozmísťovanie zátvoriek v součine n činitelů

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Představme si, že je dán součin n činitelů a že máme zjistit, kolika způsoby se dá uzávorkovat. U obvyklého součinu – protože jde o operaci asociativní – na uzávorkování nezáleží, ale rozumíme-li násobením operaci, která asociativní není, je rozložení zátvoriek podstatné. Tak třeba dělení $a : b : c : d$ při různém rozmístění zátvoriek, bez nichž nemá vůbec smysl, může dát různé výsledky, např. $a : [b : (c : d)] = ac/bd$, $[(a : b) : c] : d = a/bcd$.

Určíme nejprve počet způsobů uzávorkování součinu n činitelů, jejichž pořadí v tomto součinu není pevně stanoveno, ale může se měnit. Počet všech těchto způsobů, jak uzávorkovat součin n činitelů s ohledem na jejich pořadí, označíme $p(n)$.

Je zřejmé $p(1) = 1$ a $p(2) = 2$, neboť v součinu libovolných dvou prvků a, b se bez zátvoriek obejdeme, ale vzhledem k pořadí máme dvě možnosti: ab, ba .

K určení $p(3)$ zjistíme, kolika způsoby lze k součinům ab a ba při zachování pořadí prvků a, b přidat prvek třetí, který označíme x ; dostaneme tak:

čtyři součiny připojením k prvkům a, b
součinu ab :

$$(xa)b, (ax)b, a(xb), a(bx);$$

dva součiny připojením k celému součinu ab : $x(ab), (ab)x$;

čtyři součiny připojením k prvkům b, a
součinu ba :

$$(xb)a, (bx)a, b(xa), b(ax);$$

dva součiny připojením k celému součinu ab : $x(ba), (ba)x$.

Je tedy $p(3) = p(2) \cdot 6 = 12$.

Než přistoupíme k zobecnění tohoto postupu na součin n činitelů, určíme ještě $p(4)$. Vyjdeme z jednoho z dvanácti možných součinů tří činitelů

a, b, c , třeba ze součinu $a(bc)$, k němuž přidáme prvek x tak, aby pořadí abc zůstalo zachováno. Dostaneme tak tento počet součinů:

čtyři připojením k prvkům b, c součinu bc :

$$a[(xb)c], a[(bx)c], a[b(xc)], a[b(cx)];$$

čtyři připojením k prvkům a, bc součinu $a(bc)$:

$$(xa)(bc), (ax)(bc), a[(bc)x], a[x(bc)];$$

dva připojením k celému součinu $[a(bc)]$:

$$x[a(bc)], [a(bc)]x.$$

A protože tento postup můžeme aplikovat na každou ze všech dvanácti možností jak uzávorkovat součin tří činitelů s ohledem na pořadí, platí: $p(4) = p(3) \cdot 10 = 12 \cdot 10 = 120$.

Z uvedených příkladů je vidět, že ke každému násobení dvou čísel y, z lze k jednotlivým členům připojit třetí číslo x čtyřmi způsoby: $(xy)z, (yx)z, y(xz), y(zx)$; k celému součinu yz lze pak číslo x připojit dvěma způsoby: $x(yz), (yz)x$. Uvědomme si nyní, že při výpočtu součinu n čísel s daným pořadím a uzávorkováním provádíme $n - 1$ postupných násobení dvou čísel a že ke každé této dvojici můžeme připojit nový prvek $4n$ způsoby; a protože k celému součinu n čísel můžeme tento nový prvek připojit dvěma způsoby, je počet způsobů, kterými lze do součinu n různých prvků s daným pořadím i uzávorkováním zařadit další prvek, dán výrazem $4(n - 1) + 2 = 4n - 2$. Vzhledem k tomu, že takto můžeme postupovat u všech $p(n)$ možností uzávorkování součinu n různých prvků s ohledem na pořadí, dostáváme:

Věta 1

Pro počet $p(n + 1)$ způsobů uzávorkování součinu $n + 1$ činitelů, v němž záleží na pořadí, platí:

$$p(n + 1) = (4n - 2)p(n).$$

Z tohoto rekurentního vzorce a z počáteční podmínky $p(1) = 1$ získáme postupným dosazováním do vztahu pro $p(n)$ vzorec vyjadřující $p(n)$ jako funkci n :

$$\begin{aligned} p(n) &= (4n - 6) \cdot p(n - 1) = (4n - 6) \cdot (4n - 10) \cdot p(n - 2) = \\ &= (4n - 6) \cdot (4n - 10) \cdot (4n - 14) \cdot p(n - 3) = \dots = \\ &= (4n - 6) \cdot (4n - 10) \cdot (4n - 14) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 2 \end{aligned}$$

Dalšími úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} p(n) &= 2^{n-1} \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot (2n-7) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot (2n-2)!}{(2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = (n-1)! \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Odvodili jsme tak následující větu:

Věta 2

Pro počet $p(n)$ způsobů uzávorkování součinu n činitelů, v němž záleží na pořadí, platí:

$$p(n) = (n-1)! \binom{2n-2}{n-1}$$

Chceme-li vědět, kolika způsoby lze uzávorkovat součin n činitelů s daným pořadím, stačí zřejmě $p(n)$ vydělit počtem všech možných pořadí těchto n činitelů:

Věta 3

Počet způsobů uzávorkování součinu n činitelů s daným pořadím je dán výrazem

$$\frac{p(n)}{n!} = \binom{2n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Tento výsledek také udává maximální počet různých výsledků, které lze získat různým uzávorkováním součinu n činitelů s daným pořadím.

Uvedme ještě na závěr, že čísla $\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n}$ „se objevila“ při řešení problému rozložit konvexní n -úhelník neprotínajícími se úhlopříčkami na trojúhelníky, kterým se zabýval belgický matematik *E. Ch. Catalan* (1814–1894). S těmito čísly, která se dnes nazývají Catalanova, se setkáváme – jak je vidět z předchozího – i v jiných kombinatorických úlohách.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 173 a 174, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle aktuálního ročníku časopisu MFI.

Úloha 173

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x} + 2} &= y - 2, \\ \sqrt{\sqrt{y} + 2} &= x - 2.\end{aligned}$$

Radek Horenský

Řešení. Ze zadání úlohy plyne, že obě neznámé x, y jsou nezáporné. Po snadné úpravě první rovnice dané soustavy pak obdržíme

$$y = 2 + \sqrt{\sqrt{x} + 2} \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Analogicky $x \geq 2 + \sqrt{2}$. Pokud $x > y$, je

$$y - 2 = \sqrt{\sqrt{x} + 2} > \sqrt{\sqrt{y} + 2} = x - 2 \quad \text{tj.} \quad y > x,$$

což je ve sporu s předpokladem $x > y$. Podobně lze ukázat, že neplatí ani $y > x$. Nutně tedy $x = y$.

Nyní již stačí vyřešit rovnici

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} = x - 2.$$

Jejím umocněním dostáváme $\sqrt{x} + 2 = x^2 - 4x + 4$. Tuto rovnici vyřešíme užitím substituce $x = t^2$. Vzhledem k podmínce $x \geq 2 + \sqrt{2}$ stačí najít řešení pro $t \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}} > 1$. Po úpravě pak dostaneme algebraickou rovnici čtvrtého stupně

$$t^4 - 4t^2 - t + 2 = 0. \tag{1}$$

Postupnými úpravami levé strany rovnice (1) máme

$$\begin{aligned} t^4 - 4t^2 - t + 2 &= t^2(t^2 - 4) - (t - 2) = t^2(t + 2)(t - 2) - (t - 2) = \\ &= (t - 2)(t^3 + 2t^2 - 1). \end{aligned}$$

Funkce $t^3 + 2t^2 - 1$ je však rostoucí na množině kladných reálných čísel. Pro všechna $t > 1$ tudíž platí

$$t^3 + 2t^2 - 1 > 1 + 2 - 1 = 2 > 0.$$

Proto má rovnice (1) jediný reálný kořen větší nebo roven $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, a to $t = 2$.

Závěr. Daná soustava má v oboru reálných čísel právě jedno řešení $(x, y) = (4; 4)$. Zkouškou se přesvědčíme o správnosti nalezeného řešení.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, *Jiří Biolek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, *Josef Hazi* z G v Chebu, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Kateřina Medková* z BGGB v Hradci Králové, *Jakub Solovský*, z GMK v Bílovci, *Pavel Ševeček* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Štěpán Šimsa* z GJJ v Lito-měřicích, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou a *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická.

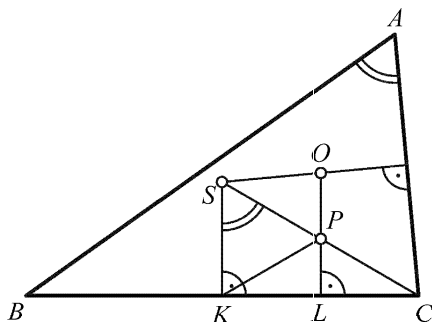
Neúplná řešení zaslali *Barbora Mólová* z GMK v Bílovci a *Hynek Jemelík* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Úloha 174

Uvažujme trojúhelník ABC v němž K značí střed strany BC . Dále nechť S a O jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a AKC . Průsečík kolmice z bodu O k přímce BC s přímkou CS označme P . Dokažte větu: Má-li úhel BAC velikost 60° , potom $|SK| = |CP|$. Platí i věta obrácená?

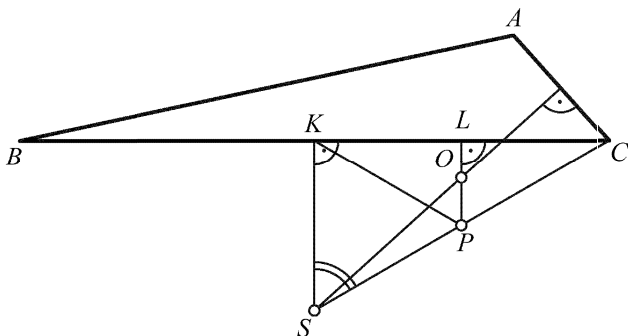
Jaroslav Švrček

Řešení. Předpokládejme, že velikost úhlu BAC je 60° (obr. 1), tedy bod S leží v polorovině BCA . Body O a S jako středy kružnic opsaných leží na ose strany AC . Označme L střed úsečky KC . Přímký SK a OL jsou jako osy stran BC a KC rovnoběžné. Odtud plyne, že LP je střední příčka trojúhelníku KCS , tedy bod P je středem přepony CS pravoúhlého trojúhelníku KCS , je proto středem kružnice jemu opsané a platí $|CP| = |KP| = |SP|$.



Obr. 1

Protože velikost obvodového úhlu BAC na kružnici opsané trojúhelníku ABC je 60° , je velikost jemu odpovídajícího středového úhlu BSC rovna 120° , tedy velikost úhlu KSC je 60° . V trojúhelníku KSP platí $|KP| = |SP|$ a velikost jednoho vnitřního úhlu je rovna 60° , tento trojúhelník je tedy rovnostranný a platí $|KP| = |SK|$. Z rovnosti $|KP| = |CP|$ dále plyne $|SK| = |CP|$, což jsme měli dokázat.



Obr. 2

Obrácená věta neplatí. Pokud velikost úhlu BAC je 120° (obr. 2), leží bod S v polorovině opačné k polorovině BCA a velikost úhlu CSK je 60° . Stejně jako v předchozím případě ale můžeme ukázat, že trojúhelník KSP je rovnostranný, odkud plyne $|CP| = |PK| = |KS|$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, Komenského, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, tř. Jiřího z Poděbrad, *Josef Hazi* z G v Chebu, Nerudova, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Barbora Mílová* z GMK v Bílovci, *Pavel Ševeček* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích a *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou.

Neúplná řešení zaslali *Jiří Biolek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Miroslav Koblížek* a *Tomáš Kubelka*, z G v Žamberku, *Kateřina Medková* z BGGB v Hradci Králové, Orlické nábřeží, *Jakub Solovský*, z GMK v Bílovci, *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická.

Pavel Calábek

Nakladatelství MATH Publishing nabízí zájemcům o matematiku následující publikace:

Cesta k integrálu – historie určitého integrálu od Archimeda k Riemannovi.

Historie analýzy – historie matematické analýzy od antiky do zformování funkcionální analýzy, 14 kapitol, 13 předních světových historiků matematiky, historie jednotlivých odvětví matematické analýzy.

Eukleides: Základy – teprve historicky 2. české vydání, k dispozici je 1., 2., 3. část, s komentářem prof. Vopěnky.

Al Chvarizmi: Aritmetický a algebraický traktát – poprvé česky, opět komentář prof. Vopěnky.

Kontaktní adresa: RNDr. Karel Vašíček, Družstevní 117, 530 09 Pardubice,
tel: 466401520, 605848934, mail: dr.vasicek@atlas.cz

V nabídce jsou i další publikace. Podrobněji na <http://www.mathpublishing.eu>
