

# MATEMATIKA

## Fahrenheit, Celsius a americký cent

PAVLA PAVLÍKOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – ANTONÍN SLAVÍK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cílem výuky matematiky na základních i středních školách je nejen rozvíjet a prohlubovat matematické vědomosti a dovednosti žáků, ale také jim přiblížit význam matematiky jako užitečného nástroje k řešení problémů z reálného světa. Tento aspekt matematického vzdělávání je ve školách realizován různými způsoby a metodami, nejčastěji bývá ilustrován prostřednictvím řešení aplikačních úloh. V různých učebnicích i sbírkách se však objevují příklady, které se jako aplikační tváří, ve skutečnosti jsou ale odtrženy od reality a obsahují fiktivní či zkreslené údaje. Vhodně zvolená aplikační úloha přitom může posloužit jako efektivní motivační nástroj, který u žáků vzbudí zájem o daný problém, a tedy i o matematiku.

Se záměrem poskytnout učitelům a žákům středních škol reálné aplikační úlohy z různých oblastí matematiky vzniká na Katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze sbírka aplikačních úloh. Práce na sbírce je podporována rozvojovým projektem MŠMT<sup>1</sup> a na její tvorbě se podílejí Jana Hromadová, Magdalena Hykšová, Oldřich Odvárko, Pavla Pavlíková, Eliška Pecinová, Jarmila Robová a Antonín Slavík, (v abecedním pořadí). Na přípravě sbírky rovněž intenzivně pracoval Ivan Saxl (†2009). Sbírkou by měla pokrývat nejdůležitější partie středoškolské matematiky, a to zejména

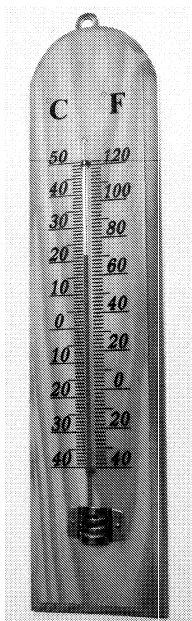
- základní pojmy (zvláště procenta a poměry),
- rovnice, nerovnice a jejich soustavy,
- funkce, jejich grafy a vlastnosti,
- goniometrie,

---

<sup>1</sup>Rozvojový projekt MŠMT č. 14/38 (Podpora informačních center a spolupráce se středními školami a veřejností na MFF UK).

- planimetrie a stereometrie,
- finanční matematika,
- diferenciální a integrální počet,
- kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.

Ke každému tématu jsou připravovány podrobně řešené vzorové příklady, za kterými následují neřešená cvičení obdobného charakteru; návody na jejich řešení včetně výsledků budou k dispozici v závěrečné části připravované sbírky. Před vzorovými příklady, jejichž řešení vyžaduje konkrétní znalosti z dalších oborů, jako je například fyzika, chemie či biologie, budou doplněny krátké úvody do dané problematiky, aby učitel a žáci nemuseli dohledávat potřebné informace v jiných zdrojích. Následující ukázky z připravované sbírky obsahují aplikační úlohy zaměřené na lineární funkce, rovnice a nerovnice<sup>2</sup>.



## 1. Úlohy o měření teploty

*Pro měření teploty se používají různé stupnice. U nás se používá Celsiova stupnice, v USA dávají přednost Fahrenheitově stupnici. Pro převod mezi oběma stupnicemi platí vztah*

$$t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32,$$

*kde  $t_F$  je číselná hodnota teploty ve stupních Fahrenheitita a  $t_C$  je číselná hodnota teploty ve stupních Celsia.*

### Souboj Celsius versus Fahrenheit

Pro rychlé převody mezi oběma stupnicemi se v běžném životě místo převodního vztahu

$$t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32$$

používá jednoduchá aproximace

$$\overline{t_F} = 2 \cdot t_C + 30.$$

<sup>2</sup>Některé ukázky ze sbírky již byly prezentovány na Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v listopadu 2010, více viz Pavlíková P.: *Aplikační úlohy v matematice na střední škole*. In Lávička M., Bastl B. (ed.): *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2010*, Vydavatelský servis, Plzeň, 2010, str. 203–205.

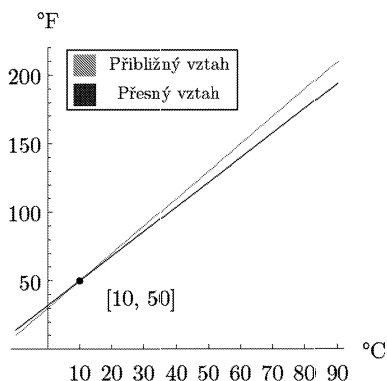
Dvě ženy převáděly naměřenou teplotu na venkovním teploměru ve stupních Celsia na stupně Fahrenheita tak, že jedna z nich použila převodní vztah a druhá aproximaci. Obě získaly stejný výsledek. Jak je to možné?

*Řešení.* Obě ženy postupovaly podle různých předpisů, ale získaly stejný výsledek – teplotu ve stupních Fahrenheita. Tedy platí

$$\frac{9}{5} \cdot t_C + 32 = 2 \cdot t_C + 30,$$

odtud  $t_C = 10$ .

Pro teplotu 10 °C, resp. 50 °F, dávají obě metody stejný výsledek. Řešení příkladu lze ilustrovat i graficky, jak ukazuje následující obrázek.



### Přesně nebo přibližně?

Vypočítejte, v jakém rozsahu teplot ve stupních Celsia je *odchylka teplot* ve stupních Fahrenheita určených z *aproximačního vztahu* a z *převodního vztahu* mezi Fahrenheitovou a Celsiovou stupnicí

- a) nejvýše 1 °F,   b) nejvýše 2 °F,   c) nejvýše 3 °F.

*Řešení.* Platí

$$t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32, \quad \overline{t_F} = 2 \cdot t_C + 30,$$

kde  $t_C$  je číselná hodnota teploty ve stupních Celsia,  $t_F$  číselná hodnota teploty ve stupních Fahrenheita určená pomocí převodního vztahu a  $\overline{t_F}$  číselná hodnota teploty ve stupních Fahrenheita určená pomocí aproximačního vztahu.

a) Podle zadání má pro odchylku teplot  $t_F$  a  $\overline{t_F}$  platit

$$|t_F - \overline{t_F}| \leq 1.$$

Odstraněním absolutní hodnoty dospějeme k soustavě nerovnic

$$t_F - 1 \leq \overline{t_F} \leq 1 + t_F.$$

Dosažením za  $t_F$  a  $\overline{t_F}$  pak získáme soustavu nerovnic s neznámou  $t_C$ :

$$\frac{9}{5} \cdot t_C + 31 \leq 2 \cdot t_C + 30 \leq \frac{9}{5} \cdot t_C + 33$$

Úpravou nerovnic dostaneme

$$5 \leq t_C \leq 15.$$

Pro teploty z intervalu  $\langle 5^\circ\text{C}, 15^\circ\text{C} \rangle$  je tedy odchylka teplot ve stupních Fahrenheita určených z aproximačního a z převodního vztahu nejvýše  $1^\circ\text{F}$ .

b) Postupujeme stejně jako v předchozím případě a zjistíme, že odchylka teplot je nejvýše  $2^\circ\text{F}$  pro teploty z intervalu  $\langle 0^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C} \rangle$ .

c) Odchylka teplot je nejvýše  $3^\circ\text{F}$  pro teploty z intervalu  $\langle -15^\circ\text{C}, 25^\circ\text{C} \rangle$ .

### Teplota, nebo horečka?

*Normální teplota lidského těla měřená v podpažní jamce se pohybuje mezi  $36^\circ\text{C}$  až  $37^\circ\text{C}$ . Teplota kolísá během dne, nejnižší bývá časně ráno, nejvyšší naopak v podvečer.*

Normální teplota:  $36^\circ\text{C} - 37^\circ\text{C}$

Zvýšená teplota:  $37^\circ\text{C} - 38^\circ\text{C}$

Horečka: nad  $38^\circ\text{C}$

Vysoká horečka: nad  $41^\circ\text{C}$ .

*Obecně se doporučuje snižovat teplotu, až když stoupne nad  $38^\circ\text{C}$ , neboť zvýšená teplota je jedním z obranných mechanismů lidského těla. Při zvýšené teplotě se zastavuje množení bakterií a virů.*

Paní Caroline Smith, která je na návštěvě u své neteře v Praze, onemocněla chřipkou. Neteř se domlouvá se svým praktickým lékařem dr. Topilem. – „A kolik má teplotu?“ – „Říká, že má na svém teploměru sto celých devět.“ – „Co je to za nesmysl?“ Je to opravdu nesmysl?

- a) Vyjádřete číselnou hodnotu teploty  $t_C$  ve stupních Celsia pomocí  $t_F$ .  
 b) Jakou má paní Caroline teplotu ve stupních Celsia? Má horečku, nebo zvýšenou teplotu?

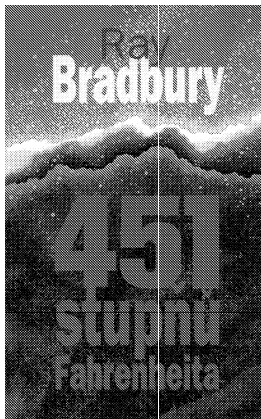
*Řešení.* Není to nesmysl, paní Caroline si na svém teploměru měřila teplotu ve stupních Fahrenheita.

- a) Z rovnosti  $t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32$  vyjádříme  $t_C$  a získáme vztah

$$t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32).$$

b) Dosadíme-li do posledního vztahu  $t_F = 100,9$ , zjistíme, že teplota paní Caroline je přibližně  $38,3^\circ\text{C}$ , tj. překročila mez  $38^\circ\text{C}$ . Paní Caroline má tedy horečku.

## 451 stupňů Fahrenheita



*Román 451 stupňů Fahrenheita je jedním z nejznámějších děl amerického spisovatele Raye Bradburyho. Děj se odehrává v daleké budoucnosti, kdy společnost ovládají masová média, knihovny a knihy jsou zakázány a páleny požárníky. Ti mají ve znaku číslo 451, neboť při teplotě  $451^\circ\text{F}$  se papír vznítí a hoří<sup>3</sup>...*

Určete, jak by zněl název románu Raye Bradburyho ve stupních Celsia. Zaokrouhlete na celé stupně.

*Řešení.* Z převodního vztahu  $t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32$  vyjádříme  $t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32)$ . Po dosazení  $t_F = 451$  a zaokrouhlení  $t_C$  na celé číslo získáme výsledek. Název románu by zněl 233 stupňů Celsia.

## 2. Úlohy o americkém centu

*Americký cent, tj. jedna setina dolaru, se od ostatních amerických mincí odlišuje svou typickou měděnou barvou; ve skutečnosti se jedná o slitinu*

<sup>3</sup>Teplota vznícení papíru závisí na různých faktorech, zejména na jeho kvalitě. Obvykle se udává, že tato teplota začíná od  $185^\circ\text{C}$ .

mědi a zinku. Mince má průměr 19 mm a tloušťku 1,25 mm. Až do roku 1982 byla hmotnost centu tvořena z 95 procent mědi a z 5 procent zinkem. Ceny mědi na světových trzích však rostly a hrozilo nebezpečí, že výrobní hodnota centu přesáhne jeho nominální hodnotu. Proto se v roce 1982 změnilo složení centu a nyní obsahuje pouze 2,5 procenta mědi a 97,5 procenta zinku (jádro mince je zinkové a plášť měděný, takže vnější vzhled je stejný jako u staré mince).



### Kolik váží cent?

Jakou hmotnost měl cent před rokem 1982 a jakou hmotnost má nyní? Hustota mědi je  $8\,920\text{ kg/m}^3$ , hustota zinku je  $7\,140\text{ kg/m}^3$ .

*Řešení.* Nechť  $\rho_{\text{Cu}}$ ,  $\rho_{\text{Zn}}$  značí hustoty mědi a zinku,  $d$  je průměr mince a  $t$  její tloušťka. Vypočítáme objem mince pomocí vzorce pro objem válce:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot t \doteq 354\text{ mm}^3$$

Nechť  $a$  značí procentuální hmotnostní podíl mědi v minci vyjádřený desetinným číslem z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ ; hmotnostní podíl zinku je pak  $1 - a$ . Celkový objem je součtem objemů měděné a zinkové složky, tj.

$$V = \frac{a \cdot m}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1 - a) \cdot m}{\rho_{\text{Zn}}},$$

odkud vyjádříme hmotnost mince

$$m = \frac{V}{\frac{a}{\rho_{\text{Cu}}} + \frac{(1 - a)}{\rho_{\text{Zn}}}}. \quad (1)$$

Dosažením  $a = 0,95$  vypočteme původní hmotnost mince  $m_1 \doteq 3,1$  gramu, zatímco  $a = 0,025$  dá hmotnost nové mince  $m_2 \doteq 2,5$  gramu.

### Kolik stojí cent?

Jaké jsou skutečné hodnoty starého centu a nového centu? Cena mědi je v současné době 6,77 dolaru za kilogram a cena zinku je 2,15 dolaru za kilogram. Předpokládejte, že ostatní výrobní náklady jsou zanedbatelné.

*Řešení.* Nechť  $c_{Cu}$  a  $c_{Zn}$  jsou ceny mědi a zinku v dolarech za kilogram. Skutečnou hodnotu mince  $c$  dostaneme sečtením ceny měděné složky a zinkové složky, tj.

$$c = a \cdot m \cdot c_{Cu} + (1 - a) \cdot m \cdot c_{Zn}. \quad (2)$$

Dosažením  $a = 0,95$  vypočteme cenu staré mince  $c_1 \doteq 0,02$  dolaru, zatímco  $a = 0,025$  dá cenu nové mince  $c_2 \doteq 0,006$  dolaru.

### Podíl mědi v centu

Jaký by mohl být maximální procentuální podíl mědi, aby při současných cenách kovů nepřekročila skutečná hodnota mince její nominální hodnotu, tj. 0,01 dolaru?

*Řešení.* Nechť  $H = 0,01$  dolaru. Stačí najít hodnotu  $a \in \langle 0; 1 \rangle$ , pro kterou je cena mince  $c$  rovna  $H$ . Použijeme vztah (2) a řešíme rovnici

$$a \cdot m \cdot c_{Cu} + (1 - a) \cdot m \cdot c_{Zn} = H.$$

Hmotnost  $m$  dosadíme ze vztahu (1):

$$\frac{\frac{a \cdot V \cdot c_{Cu}}{\rho_{Cu}} + \frac{(1 - a) \cdot V \cdot c_{Zn}}{\rho_{Zn}}}{\frac{a}{\rho_{Cu}} + \frac{(1 - a)}{\rho_{Zn}}} = H$$

Po vynásobení jmenovatelem zlomků na levé straně dostaneme lineární rovnici

$$a \cdot V \cdot c_{Cu} + (1 - a) \cdot V \cdot c_{Zn} = H \left( \frac{a}{\rho_{Cu}} + \frac{(1 - a)}{\rho_{Zn}} \right),$$

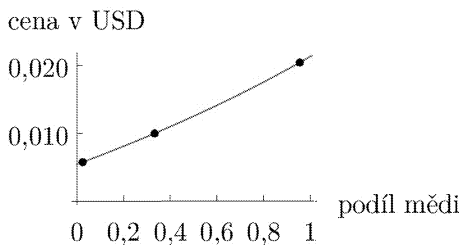
odkud vypočteme

$$a \cdot V \cdot c_{Cu} - a \cdot V \cdot c_{Zn} - H \cdot \frac{a}{\rho_{Cu}} + H \cdot \frac{a}{\rho_{Zn}} = \frac{H}{\rho_{Zn}} - V \cdot c_{Zn},$$

$$a = \frac{\frac{H}{\rho_{Zn}} - V \cdot c_{Zn}}{V \cdot c_{Cu} - V \cdot c_{Zn} - \frac{H}{\rho_{Cu}} + \frac{H}{\rho_{Zn}}} \doteq 0,33.$$

Maximální přípustný podíl mědi je přibližně 33 procent.

Závislost ceny mince na obsahu mědi ukazuje následující obrázek.



## Závěr

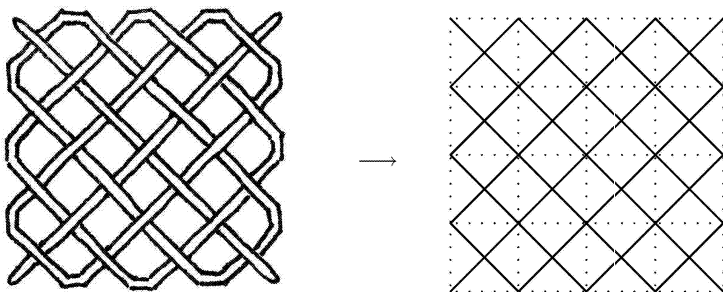
Uvedené úlohy ilustrují koncepci chystané sbírky i charakter úloh, které jsou do sbírky postupně zařazovány. S dalšími úlohami se můžete seznámit ve volně navazujícím připravovaném článku, který bude zaměřen na problémy s dopravní tematikou.

# Keltské uzly a dělitelnost

KAREL PAZOUŘEK

Gymnázium Praha 10, Přípotoční

V předchozím článku [1] jsme ukázali souvislost keltských uzlů speciálního pravoúhelníkového tvaru, osové souměrnosti a dělitelnosti přirozených čísel. Zavedli jsme značení a pojmy jako cesta, cyklus nebo roh uzlu. Jako matematický model nám posloužilo schéma vzniklé z úhlopříček čtverců sítě vepsané do pravoúhelníku, jak je naznačeno na obr. 1.



Obr. 1

V následujícím textu spočteme délku cyklů a jejich počet v (pravoúhelníkovém) uzlu  $(p, q)$ . Pomůže nám jeden pomocník – mravenec. Abychom se mu odvděčili, ukážeme postup, který nám umožní mravencovi říct, zda dojde po provázku, po kterém zrovna leze, až do rohu uzlu.

Připomeňme, že za jednotku délky provázku jsme zvolili délku úhlopříčky čtverce sítě.

### Příklad 1

Jak jsou dlouhé cykly v uzlu  $(p, q)$ ?

*Řešení.* Použijeme postup podobný metodě uvedené v článku [2].

Představme si mravenec, který leze z bodu na levém okraji uzlu po zvoleném cyklu stále jedním směrem stálou rychlostí tak dlouho, až se vrátí do výchozího bodu. Jak velkou vzdálenost urazí ve vodorovném směru? Víme, že směr cyklu se mění pouze na hranici pravoúhelníku, ve kterém uzel leží. Proto mravenec urazí ve vodorovném směru vzdálenost  $2jp$ ,  $j \in \mathbb{N}$  – sudý násobek  $p$  (sudý proto, že mravenec vždy jde nejprve až k pravému okraji a pak se vrací zpět na levý okraj). Podobně lze zdůvodnit, že ve svislém směru ujde mravenec vzdálenost  $2kq$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Navíc protože se pohybuje vodorovně i svisle vždy o stejnou vzdálenost (například jde-li o 1 svisle, jde i o 1 vodorovně – chodí vždy po úhlopříčkách čtverečků mříže), musí být

$$2jp = 2kq.$$

Číslo  $j$  je tak počet přejití uzlu zleva doprava a zpět, číslo  $k$  pak počet přejití uzlu zdola nahoru a zpět. Navíc nás opět zajímá nejmenší možná hodnota čísel  $j, k$ , chceme, aby mravenec prošel cyklus pouze jednou. Tudíž

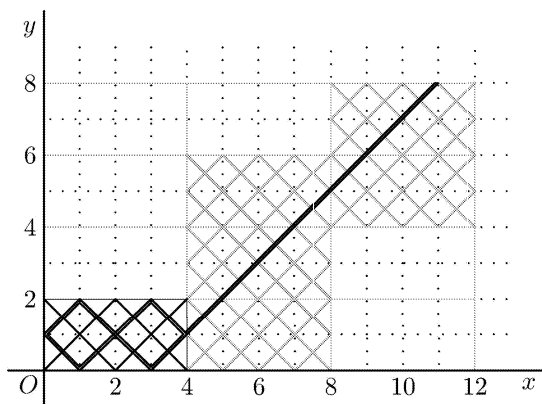
$$2jp = 2kq = 2n(p, q),$$

což je tedy délka zvoleného cyklu.<sup>4</sup> Navíc hodnoty  $j$ ,  $k$  zjevně nezávisí na volbě cyklu, tudíž výsledek platí pro libovolný cyklus.  $\square$

Dostáváme tak důkaz hypotézy 2 a zároveň důkaz hypotézy 3 z předchozího článku [1].

Cestu můžeme považovat za „zploštělý“ cyklus v následujícím smyslu: Vyjdeme-li z jednoho jejího konce a dojdeme-li do koncového rohu cesty, otočíme se zde a jdeme zpátky do výchozího bodu.

Porovnejte řešení uvedeného příkladu a příkladu 4 z předchozího článku [1]. Uvědomte si příbuznost jednotlivých úvah, i když jsou vyřčeny v jazyce jiných partií matematiky. Podívejte se na obr. 2, který zachycuje situaci poslední úlohy v jazyce osových souměrností:



Obr. 2

Uvědomte si, kde se na obrázku objeví vzdálenosti  $2jp$  a  $2kq$ . Vysvětlete, jak se projeví dvojky v těchto číslech na „rozbalení“ cyklu do úsečky.

## Mravencova pouť

V následující úloze použijeme jedno tvrzení:

### Tvrzení

*Pro každá dvě přirozená čísla  $p$ ,  $q$  platí:*

$$pq = n(p, q) \cdot D(p, q).$$

<sup>4</sup>Symbol  $n(p, q)$  značí nejmenší společný násobek přirozených čísel  $p, q$ . Podobně  $D(p, q)$  značí největší společný dělitel těchto čísel.

kde  $n(p, q)$  a  $D(p, q)$  značí nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel  $p$  a  $q$ .

Důkaz tvrzení (pomocí prvočíselného rozkladu čísel  $p, q$ ) je jednoduchý, proto jej přenecháme laskavému a zvědavému čtenáři.

## Příklad 2

Určete počet cyklů v uzlu  $(p, q)$ .

*Řešení.* Víme, že celková délka provázku v uzlu je  $2pq$ . Cesty jsou v uzlu vždy dvě, každá měří  $n(p, q)$ . Každý cyklus je dlouhý  $2 \cdot n(p, q)$ , tudíž počet cyklů je

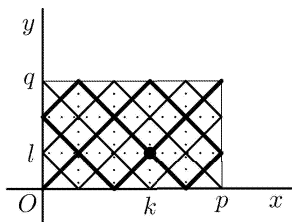
$$\begin{aligned} \frac{2pq - 2 \cdot n(p, q)}{2 \cdot n(p, q)} &= \frac{2(pq - n(p, q))}{2 \cdot n(p, q)} = \\ &= \frac{n(p, q) \cdot D(p, q) - n(p, q)}{n(p, q)} = D(p, q) - 1. \end{aligned}$$

□

Z výsledku předchozího příkladu plyne, že v uzlu  $(p, q)$  nejsou žádné cykly právě tehdy, když čísla  $p, q$  jsou nesoudělná.

## Příklad 3

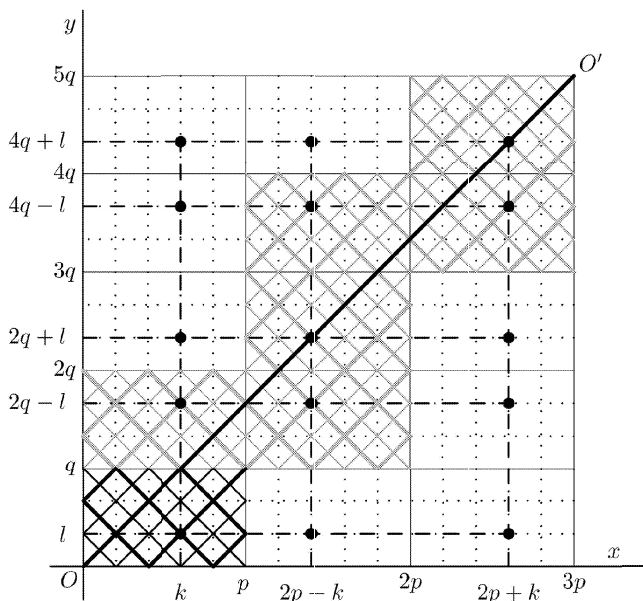
Představme si uzel  $(p, q)$  v souřadnicovém systému tak, jak je na obr. 3.



Obr. 3

Vezměme si libovolný bod  $[k, l]$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ , který leží na nějakém provázku uzlu. Může se z něj mravenec dostat do bodu  $O[0; 0]$ , když půjde po některém provázku, který bodem  $[k, l]$  prochází? (Jinými slovy: Prochází některý provázek jak bodem  $[k, l]$ , tak bodem  $O[0; 0]$ ?)

*Řešení.* Podívejme se na obr. 4 (je zakreslen pro  $p = 5$  a  $q = 3$ ):



Obr. 4

Je zde uzel  $(p, q)$  a cesta procházející bodem  $O[0; 0]$  „rozbalená“ do úsečky  $OO'$ .

Z obrázku je zřejmé, že pokud má ležet bod  $[k, l]$  na této cestě, musí se zobrazit osovými souměrnostmi na úsečku  $OO'$ . Pro každý bod úsečky  $OO'$  přitom platí, že jeho souřadnice se rovnají.

Bod  $[k, l]$  ležící na této cestě tak musí splňovat některou z následujících podmínek (v následujících čtyřech bodech kdykoliv se mluví o sudém počtu, myslí se tím, že může být i nulový):

- Bod  $[k, l]$  se zobrazí na bod úsečky  $OO'$  pomocí lichého počtu  $(2a-1)$  svislých os a lichého počtu  $(2b-1)$  vodorovných os. Jeho obraz pak má souřadnice  $[2ap-k, 2bq-l]$  a platí rovnost souřadnic

$$2ap - k = 2bq - l.$$

- b) Bod  $[k, l]$  se zobrazí na bod úsečky  $OO'$  pomocí sudého počtu  $(2a)$  svislých os a lichého počtu  $(2b - 1)$  vodorovných os. Jeho obraz pak má souřadnice  $[2ap + k, 2bq - l]$  a platí rovnost souřadnic

$$2ap + k = 2bq - l.$$

- c) Bod  $[k, l]$  se zobrazí na bod úsečky  $OO'$  pomocí lichého počtu  $(2a - 1)$  svislých os a sudého počtu  $(2b)$  vodorovných os. Jeho obraz pak má souřadnice  $[2ap - k, 2bq + l]$  a platí rovnost souřadnic

$$2ap - k = 2bq + l.$$

- d) Bod  $[k, l]$  se zobrazí na bod úsečky  $OO'$  pomocí sudého počtu  $(2a)$  svislých os a sudého počtu  $(2b)$  vodorovných os. Jeho obraz pak má souřadnice  $[2ap + k, 2bq + l]$  a platí rovnost souřadnic

$$2ap + k = 2bq + l.$$

Tudíž bod  $[k, l]$  leží na  $OO'$ , pokud existují dvě celá nezáporná čísla  $a, b$  taková, že je splněna alespoň jedna z rovností uvedených v a) – d).

□

Samozřejmě mohou být splněny i dvě z uvedených rovností, například bod  $[3; 1]$  v uzlu  $(4, 3)$  můžeme zobrazit podle jedné svislé a jedné vodorovné osy (případ a)):

$$2 \cdot 4 - 3 = 5 = 2 \cdot 3 - 1,$$

nebo podle dvou svislých a tří vodorovných os (případ b)):

$$2 \cdot 4 + 3 = 11 = 4 \cdot 3 - 1.$$

Speciálně je vidět, že body, jejichž jedna souřadnice je sudá a druhá lichá, nikdy nemůžou ležet na cestě vycházející z bodu  $[0; 0]$ .

Podobným způsobem lze řešit i obecnou variantu této úlohy:

#### Příklad 4

Může se mravenec dostat po jednom provázku z bodu  $[i, j]$  do bodu  $[k, l]$ ?

A ještě jedna úloha pro zvědavce:

#### Příklad 5

Pokud bod splňuje právě jednu z požadovaných rovností a) – d) v řešení výše uvedené úlohy, lze nějak poznat, zda se má mravenec vydat nějakým směrem, aby dorazil přímo do bodu  $[0, 0]$ , bez otáčení na provázku?

#### Poznámky na závěr

O keltských uzlech (anglicky Celtic Knots) toho bylo napsáno velmi mnoho. Vyhledávač Google najde pro výraz „Celtic Knot“ 964 000 odkazů (leden 2011). Další (nejen matematický) zájem lze uspokojit v již citovaném článku [2] a odkazech v něm uvedených. Tento článek však používá jiný model keltského uzlu, dokonce pojednává o keltských uzlech kruhových, s dírami uprostřed nebo lomených. Navíc je zde ukázána souvislost keltských uzlů a permutací.

Na internetu existuje také celá řada návodů, jak keltský uzel nakreslit, jedním z nich je uveřejněný na stránkách Marca Wallace [3]. Tato metoda umožňuje při troše praxe dobře odhadovat výsledný tvar uzlu.

#### Literatura

- [1] *Pazourek, K.*: O keltských uzlech. MFI, roč. 20 (2010/2011), č. 5.
- [2] *Fisher, G. – Mellor, B.*: On the Topology of Celtic Knot Designs. Visual Mathematics, Vol. 7, No. 1, 2005; <http://myweb.lmu.edu/bmellor/celticknots.pdf>
- [3] *Wallace, M.*: Celtic Knot Construction; <http://www.wallace.net/knots/howto/>

# Kombinační čísla a součet

$$\sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) \dots (j+k-1)$$

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku určíme součet prvních  $n$  členů posloupnosti, jejíž  $n$ -tý člen je dán jako součin  $k$  činitelů  $n(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)$ . Použijeme přitom výsledky, které jsou uvedeny ve „Sbírce řešených úloh“ [1], kde je pomocí cest ve čtvercové síti odvozen vztah

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \dots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

a kde jsou jeho užitím určeny následující součty

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{j=1}^n j = \binom{n+1}{2},$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \sum_{j=1}^n j(j+1) = 2 \sum_{j=1}^n \binom{j+1}{2} = 2! \binom{n+2}{3},$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) &= \sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) = \\ &= 6 \sum_{j=1}^n \binom{j+2}{3} = 3! \binom{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Na základě těchto rovností usoudíme, že pro hledaný součet patrně platí:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k+2) + \dots + n(n+1)(n+2) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot (n+k-1) = \sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) \dots (j+k-1) = k! \binom{n+k}{k+1}.$$

Dokážeme nyní, že tato rovnost, k níž jsme dospěli na základě analogie, platí pro všechna přirozená čísla  $k, n$ . Důkaz provedeme užitím metody matematické indukce; musíme si však uvědomit, že v dokazované větě – označme ji  $V(k, n)$  – vystupuje nikoli jedna, ale dvě přirozené proměnné. Důkaz, že uvedená věta  $V(k, n)$  platí pro všechna přirozená  $k, n$  provedeme ve dvou krocích:

Nejprve indukci podle  $k$  dokážeme, že pro všechna  $k$  platí  $V(k, 1)$ , potom indukci podle  $n$  dokážeme, že platí  $V(k, n)$ .

Důkaz prvního kroku:

a)  $V(1, 1)$  platí, neboť  $1 = 1! \binom{1+1}{1+1}$ .

b) Pro všechna  $k$  platí implikace  $V(k, 1) \Rightarrow V(k+1, 1)$ , neboť

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k(k+1) = k! \binom{1+k}{k+1} (k+1) = (k+1)! \binom{1+(k+1)}{(k+1)+1}.$$

Důkaz druhého kroku:

a) Podle prvního kroku platí  $V(k, 1)$ .

b) Pro všechna  $n$  platí implikace  $V(k, n) \Rightarrow V(k, n+1)$ , neboť

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k+2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1) + \dots + n(n+1)(n+2) \dots \\ & \dots (n+k-1) + (n+1)(n+2) \dots (n+k-1)(n+k) = \\ & = k! \binom{n+k}{k+1} + \frac{(n+k)!}{n!} = k! \binom{n+k}{k+1} + k! \binom{n+k}{k} = k! \binom{n+k+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že pro všechna přirozená čísla  $k, n$  platí

$$\sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) \dots (j+k-1) = k! \binom{n+k}{k+1}.$$

Připomeňme ještě na závěr, že v [1] jsou pomocí vlastností kombinačních čísel, která je v tomto článku uvedena na čtvrtém řádku, určeny součty:

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2.$$

Podobným způsobem můžeme určit i jiné součty; pro ilustraci určíme součet  $\sum_{j=1}^n j(j+2)$ .

Postupujeme tak, že vyjádříme součin  $j(j+2)$  ve tvaru

$$j(j+1) + j = 2 \binom{j+1}{2} + \binom{j}{1},$$

odkud dostaneme:

$$\sum_{j=1}^n j(j+1) = 2 \sum_{j=1}^n \binom{j+1}{2} + \sum_{j=1}^n \binom{j}{1} = 2 \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Uvedené užití kombinačních se v běžné výuce pro nedostatek času neprobírá. Pokud se však najde vhodná příležitost, nebude na škodu, když s ním aspoň některé studenty seznámíme.

## L i t e r a t u r a

- [1] *Calda, E.*: Sbíрка řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem. Prometheus, Praha 2006.

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 5. 2011 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v  $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

## Úloha 177

Nechť  $D$ ,  $E$  jsou vnitřní body strany  $BC$  trojúhelníku  $ABC$ , pro něž platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EAC| = \frac{1}{3} |\sphericalangle BAC|.$$

Dokažte nerovnost  $|BD| + |EC| > \frac{2}{3}|BC|$ .

*Jozef Mészáros*

## Úloha 178

Dokažte, že číslo  $5^n + 7^n + 13^n$  je složené pro každé přirozené číslo  $n$ .

*Martin Panák*