

MATEMATIKA

Priečky rovnobežné so základňou lichobežníka

DUŠAN VALLO – PAVEL LEISCHNER

Fakulta prírodných vied UKF, Nitra

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Úvod

Pri určovaní obsahu lichobežníka sa už žiaci základnej školy zoznamujú s jeho strednou priečkou. V tomto príspevku sa budeme zaoberať vlastnosťami ďalších významných priečok lichobežníka a ukážeme ich súvislosť s priermi dvoch nezáporných čísel.

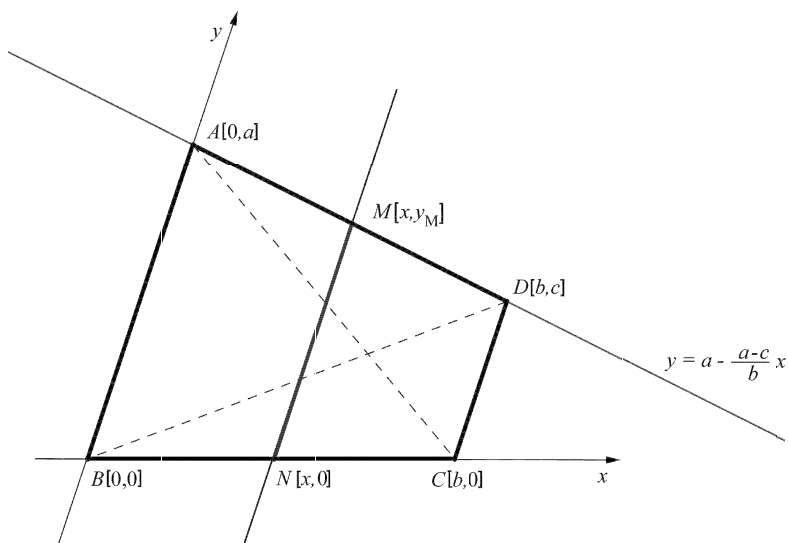
V celom článku používame jednotné označenie vrcholov lichobežníka ako A, B, C, D , kde strany AB, CD sú rovnobežné základne ($|CD| < |AB|$). Strany AB, BC, CD, DA a ich dĺžky označujeme a, b, c, d .

Budeme vyšetrovať iba tie priečky lichobežníka, ktoré sú rovnobežné s jeho základňami. Okrem priečky štvoruholníka, čím sa rozumie každá úsečka s krajnými bodmi na hranici štvoruholníka, ktorá nie je súčasťou jeho hranice, budeme používať termín priečka priamok. Priečkou priamok p, q nazývame každú úsečku MN , kde $M \in p, N \in q$ a $M, N \notin p \cap q$.

Všeobecné vyjadrenie dĺžky priečky rovnobežnej so základňami

Na obr. 1 je znázornený lichobežník $ABCD$ umiestnený v lineárnej sústave súradníc $\langle B, x, y \rangle$ zvolenej tak, aby $B [0, 0], C [b, 0], A [0, a]$. Priamka AD pretína os y v bode $[0, a]$, a tak má rovnicu $y = kx + a$, kde $k = \frac{c-a}{b}$, čo vyplýva z jej rovnice po dosadení súradníc bodu $D [b, c]$. Platí teda

$$y = \frac{c-a}{b}x + a \quad (1)$$



Obr. 1

Každá priamka rovnobežná s osou y vytína na priamkach BC a AD priečku MN , kde $N[x, 0]$, $M[x, y_M]$ a súradnica y_M spĺňa podmienku (1). Dĺžka tejto priečky je $|MN| = |y_M|$. Naviac, ak $0 < x < b$, je úsečka MN aj priečkou lichobežníka $ABCD$ a $y_M > 0$. Môžeme teda vysloviť nasledujúcu vetu:

Veta 1

Dĺžka priečky MN lichobežníka $ABCD$, ktorá je rovnobežná s jeho základňami a má krajné body M a N postupne na ramenách AD a BC , je

$$|MN| = \frac{c-a}{b}|BN| + a. \quad (2)$$

Vzťahy (1) a (2) umožňujú určovať dĺžky priečok rovnobežných so základňami lichobežníka, ako aj iné metrické vzťahy viazané na tento útvar. Musíme si však uvedomiť, že pracujeme so sústavou súradníc, ktorá je takmer vždy kosouhlá. Napríklad nemožno použiť vzťah $|KL| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ pre vzdialenosť bodov $K[x_1, y_1]$ a $L[x_2, y_2]$,

pretože tento vzťah platí iba karteziánskej súradnicovej sústave. Nasledujúce vety sú príkladmi tvrdení, ktoré možno pomocou vzťahov (1) a (2) ľahko odvodiť. Ich dôkazy sú jednoduché, vyžadujú len základné stredoškolské poznatky z analytickej geometrie a z planimetrie. Z toho dôvodu tieto dôkazy (s výnimkou vety 7) neuvádzame a odporúčame čitateľovi, aby si ich urobil sám, a tak si precvičil danú problematiku.

Veta 2

Pre dĺžku m_A strednej pričky lichobežníka $ABCD$ a vzdialenosť x_A priesečníka pričky s ramenom BC od vrcholu B platí

$$m_A = \frac{a+c}{2}, \quad x_A = \frac{b}{2}. \quad (3)$$

Veta 3

Pre dĺžku m_G tej pričky rovnobežnej so základňou AB lichobežníka $ABCD$, ktorá ho rozdeľuje na dva podobné lichobežníky a pre vzdialenosť x_G priesečníka pričky s ramenom BC od vrcholu B platí

$$m_G = \sqrt{ac}, \quad x_G = \frac{b}{1 + \sqrt{\frac{c}{a}}}. \quad (4)$$

(Návod. Z podobnosti lichobežníkov vzniknutých rozdelením podľa pričky vyplýva $c/m_G = m_G/a$.)

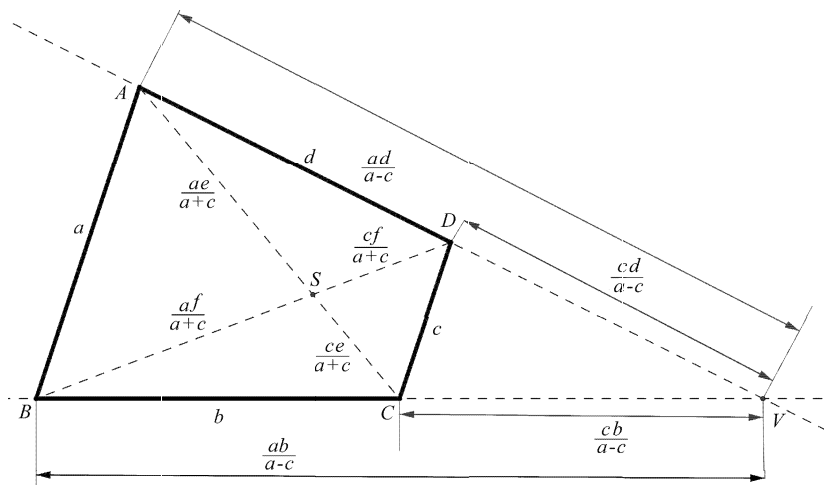
Na výpočet x_G možno použiť vzorec (2) alebo opäť uvedenú podobnosť.)

Veta 4

Pre dĺžku m_H tej pričky rovnobežnej so základňou AB lichobežníka $ABCD$, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a pre vzdialenosť x_H priesečníka pričky s ramenom BC od vrcholu B platí

$$m_H = \frac{2ac}{a+c}, \quad x_H = \frac{b}{1 + \frac{c}{a}}. \quad (5)$$

(Návod. Nájdite najprv rovnice priamok BD , AC a ich priesečník.)



Obr. 2

Veta 5

Vzdialenosti priesečníka predĺžených ramien AD, BC lichobežníka $ABCD$ od jeho vrcholov B, C, A, D v danom poradí sú

$$\frac{ab}{a-c}, \quad \frac{cb}{a-c}, \quad \frac{ad}{a-c}, \quad \frac{cd}{a-c}.$$

(Návod. Využite podobnosť trojuholníkov ABV a DCV .)

Veta 6

Vzdialenosti priesečníka uhlopriečok AC, BD lichobežníka $ABCD$ od jeho vrcholov B, D, A, C v danom poradí sú

$$\frac{af}{a+c}, \quad \frac{cf}{a+c}, \quad \frac{ae}{a+c}, \quad \frac{ce}{a+c}.$$

(Návod. Využite podobnosť trojuholníkov ABS a CDS .)

Veta 7

Pre dĺžku m_K tej priečky rovnobežnej so základňou AB lichobežníka $ABCD$, ktorá rozdeľuje lichobežník na dva lichobežníky s rovnakým obsahom a pre vzdialenosť x_K priesečníka priečky s ramenom BC od vrcholu B

platí

$$m_K = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}, \quad x_K = \frac{b}{a - c} \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \right). \quad (6)$$

Dôkaz. Uvažujme označenie podľa obr. 1 a položíme $|\angle ABC| = \beta$. Lichobežníky $ABNM$ a $MNCD$ majú v danom poradí výšky $x_K \sin \beta$ a $(b - x_K) \sin \beta$. Z rovnosti ich obsahov vyplýva

$$\frac{a + m_K}{2} x_K \sin \beta = \frac{m_K + c}{2} (b - x_K) \sin \beta.$$

Rovnicu vynásobíme výrazom $2/\sin \beta$ a po pridaní rovnice (2) dostaneme sústavu

$$m_K = \frac{c - a}{b} x_K + a$$

$$(a + m_K)x_K = (m_K + c)(b - x_K).$$

Z prvej rovnice sústavy určíme

$$x_K = \frac{a - m_K}{a - c} b$$

a dosadíme do druhej rovnice. Po prevedení súčtu na spoločného menovateľa obdržíme

$$\frac{(a + m_K)(a - m_K)b}{a - c} = \frac{(m_K + c)(m_K - c)b}{a - c}$$

a odiaľ po úprave (s využitím vzorca pre rozdiel štvorcov) máme $a^2 - m_K^2 = m_K^2 - c^2$.

Platí teda

$$m_K = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}, \quad x_K = \frac{a - m_K}{a - c} b = \frac{b}{a - c} \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \right).$$

Priečky a priemery

Pozorný čitateľ si istotne uvedomil geometrický i algebrický význam priečok určených vzťahmi (6), (3), (4) a (5):

Priečka so súradnicou x_K rozdeľuje lichobežník $ABCD$ na dva lichobežníky rovnakého obsahu a jej dĺžka m_K je kvadratickým priemerom z dĺžok jeho základní AB, CD .

Priečka so súradnicou x_A je strednou pričkou lichobežníka $ABCD$ a jej dĺžka m_A je aritmetickým priemerom z dĺžok jeho základní AB, CD .

Priečka so súradnicou x_G rozdeľuje lichobežník $ABCD$ na dva podobné lichobežníky a jej dĺžka m_G je geometrickým priemerom z dĺžok jeho základní AB, CD .

Priečka so súradnicou x_H prechádza priesečníkom uhlopriečok AC, BD lichobežníka $ABCD$ a jej dĺžka m_H je harmonickým priemerom z dĺžok jeho základní AB, CD .

Dokážeme ešte známu vetu o vzájomnom vzťahu medzi priermi.

Veta 8

Nech čísla

$$m_K = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}, \quad m_A = \frac{a + c}{2}, \quad m_G = \sqrt{ac}, \quad m_H = \frac{2ac}{a + c}$$

sú postupne kvadratický, aritmetický, geometrický a harmonický priemer kladných čísel a, c . Platí

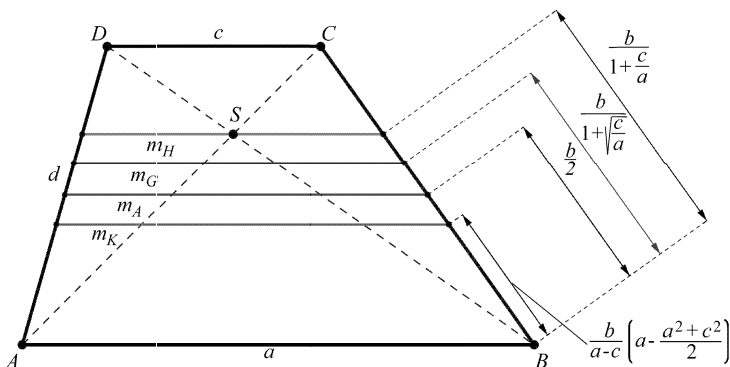
$$m_K \geq m_A \geq m_G \geq m_H, \quad (7)$$

kde rovnosť medzi vzťahmi nastáva práve vtedy, keď $a = c$.

Dôkaz. Z definícií priemerov je hneď vidno, že pre $a = c$ platí v (7) rovnosť. Uvažujme teda $a \neq c$. Definíčné vzťahy pre priemery sa nezmenia pri každej zámene čísel a, c , preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a > c$ a čísla a, c interpretovať ako dĺžky základní lichobežníka z obr. 1. Potrebujeme dokázať, že platí

$$m_K > m_A > m_G > m_H.$$

Inak povedané, že príslušné priečky v lichobežníku sú usporiadané podľa obr. 3.



Obr. 3

Ako vidíme na obrázku, je táto podmienka ekvivalentná s nerovnosťami $x_K < x_A < x_G < x_H$, ktoré teraz dokážeme. Podľa predpokladu platí $c < a$. Počítajme

$$x_K = \frac{b}{a-c} \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \right) = \frac{b}{a-c} \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} \right) \frac{a + \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}}{a + \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}} =$$

$$\dots = \frac{b}{2} \cdot \frac{a+c}{a + \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}} < \frac{b}{2} \cdot \frac{a+c}{a + \sqrt{\frac{c^2 + c^2}{2}}} = \dots = \frac{b}{2} = x_A.$$

Naviac $\sqrt{\frac{c}{a}} < 1$ a platí

$$x_A = \frac{b}{2} = \frac{b}{1+1} < \frac{b}{1 + \sqrt{\frac{c}{a}}} = x_G.$$

Keďže $c < a$, tak potom $\frac{c}{a} < \sqrt{\frac{c}{a}}$ a platí

$$x_G = \frac{b}{1 + \sqrt{\frac{c}{a}}} < \frac{b}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{ab}{a+c} = x_H$$

Funkcia $y = \frac{c-a}{b}x + a$ je lineárna, pre $c < a$ aj klesajúca, a preto so zväčšujúcimi sa hodnotami premennej x funkčné hodnoty y klesajú. Platí teda

$$m_K = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} > m_A = \frac{a+c}{2} > m_G = \sqrt{ac} > m_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}.$$

Tým je dôkaz ukončený.

Záver

Veríme, že zoznámenie sa so zaujímavou súvislosťou priemerov a dĺžok priečok lichobežníka môže prispieť k rozvoji geometrického myslenia, ako i motivácie v stredoškolskej matematike. Syntetický prístup k hľadaniu geometrického významu priemerov nájde čitateľ v publikácii [5] (str. 57–59) alebo v článku [4].

Súčasne sme upozornili i na výhodu použitia kosohlej sústavy súradníc pri riešení niektorých problémov metódou súradníc. Školská matematika sa obmedzuje len na prácu s karteziánskymi súradnicami. Je to bezosporu výhodné v praxi, ale ako sme videli, je občas užitočné použiť aj iné lineárne súradnice.

Literatúra

- [1] *H'Adamar, J.*: Elementarnaja geometria. (rusky). Gos.–Uč.–Pedagogičeskoe Izdatel'stvo, Moskva, 1957.
- [2] *Gellert, W.*: Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1974.
- [3] *Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.*: Geometry Revisited. MAA Washington, 1967.
- [4] *Goldman, A. – Zvavič, L.*: Číslavie srednie i geometria (rusky). In Kvant 9/1990.
- [5] *Kuřina, F.*: Umění vidět v matematice. SPN, Praha, 1989.
- [6] *Bydžovský, B.*: Úvod do analytické geometrie. JČMF, Praha, 1923.

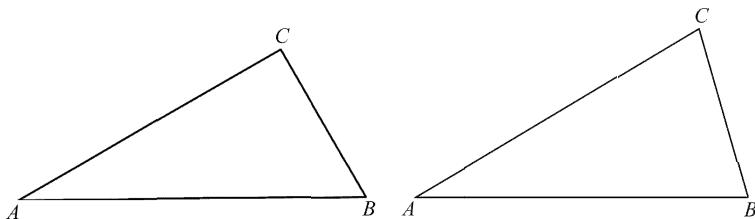
Obecný trojúhelník

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Při výuce učiva o trojúhelnících se zabýváme jednak zvláštními případy – trojúhelníky rovnoramennými, rovnostrannými nebo pravoúhlými – a jednak někdy potřebujeme, aby trojúhelník, který na tabuli zvolíme, nebyl žádným takovým zvláštním případem. Pro jednodušší vyjadřování v tomto článku budeme říkat *obecný trojúhelník* každému trojúhelníku, který není zvláštním případem ve shora uvedeném smyslu, tj. který není rovnoramenný, rovnostranný ani pravoúhlý. Tento pojem ostatně mnoho učitelů používalo a používá odedávna, i když jej nenajdeme v [1].

Použití obrázku obecného trojúhelníku při probírání jednotlivých témat (viz např. [2], čl. 1.4, 1.6 a 2.4) je vhodné vždy, když pojednáváme o trojúhelnících a nemáme na mysli konkrétní zvláštní případ. Jak tedy zvolit obecný trojúhelník, aby byl „co nejméně rovnoramenný a co nejméně pravoúhlý“ (říkejme mu zde *dobrý* obecný trojúhelník)? Pokud si to např. začínající učitel neuvedomí, nemusí se hned do správného obrázku „trefit“. Např. zvolí trojúhelník jako je na obr. 1a. Pak si uvědomí, že je to trojúhelník pravoúhlý a opraví obr. na 1b což je však trojúhelník rovnoramenný. Tyto dva případy se např. u kandidátů učitelství vyskytují nejčastěji. Někdy se může zdát, že je vlastně opravdu dosti těžké najít přesvědčivě dobrý obecný ostroúhlý trojúhelník. Než se k tomuto tématu dostaneme, ukážeme si nejprve jedno zajímavé zobrazení.

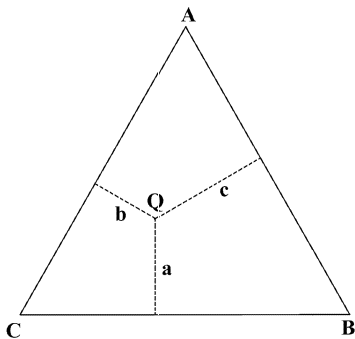


Obr. 1a

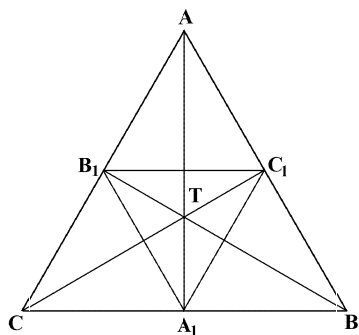
Obr. 1b

Zobrazení tříd trojúhelníků

Víme, že *podobnost trojúhelníků* je ekvivalence, která definuje rozklad množiny všech trojúhelníků na třídy. Budeme přitom uvažovat, že vrcholy trojúhelníků tvoří uspořádané trojice, což symbolicky zapíšeme $[A, B, C]$; společný znak všech trojúhelníků dané třídy nazvěme *tvar*. Zřejmě tvar trojúhelníku nezávisí na velikosti jeho stran, protože např. $\Delta A_1 B_1 C_1$ o stranách $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $c_1 = 8$ (jednotky nezapisujeme) má stejný tvar jako $\Delta A_2 B_2 C_2$ o stranách $a_2 = 6$, $b_2 = 9$, $c_2 = 12$ – patří do téže třídy ekvivalence. Uspořádání vrcholů chápejme tak, že např. $A_3 B_3 C_3$ o stranách $a_1 = 6$, $b_1 = 4$, $c_1 = 8$ má jiný tvar než oba předchozí trojúhelníky, neboť patří do jiné třídy ekvivalence, trojúhelníky $A_1 B_1 C_1$ a $A_3 B_3 C_3$ nejsou podobné. Tvar trojúhelníku je však jednoznačně charakterizován úhly trojúhelníku, tedy uspořádanou trojicí $[\alpha, \beta, \gamma]$, neboť podobné trojúhelníky se shodují v příslušných úhlech. Opět budeme chápat uspořádání tak, že např. $[30^\circ, 50^\circ, 100^\circ]$ představuje jiný tvar trojúhelníku než $[100^\circ, 30^\circ, 50^\circ]$. Toto odlišení má i didaktické příčiny, protože (představíme-li si strany $A_i B_i$ vodorovně) obrázky těchto dvou trojúhelníků působí na žáka odlišně.



Obr. 2



Obr. 3

Zvolíme nyní rovnostranný trojúhelník **ABC** o výšce 180 j. a jeho vnitřek nazvěme *základní pole* (srovnej [3]). Definujeme si nyní prosté zobrazení množiny všech tříd ekvivalence (množiny všech tvarů) na základní pole; každé třídě ekvivalence (každému tvaru trojúhelníků), tj. trojici $[\alpha, \beta, \gamma]$ velikosti úhlů, odpovídá jeden bod **Q** základního pole (obr. 2), jehož poloha je určena hodnotami $\mathbf{a} = \alpha$ j, $\mathbf{b} = \beta$ j, $\mathbf{c} = \gamma$ j (pro konstrukci stačí jen dvě z nich). Pro úhly platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ a tomu odpovídá

rovnost $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 180$ j, neboť pro libovolný bod základního pole je uvedený součet konstantní a rovná se výšce trojúhelníku $\mathbf{ABC}$, kterou jsme zvolili 180 j. Toto zobrazení $[\alpha, \beta, \gamma]$ na vnitřek základního trojúhelníku je vzájemně jednoznačné, a proto budeme dále používat označení α, β, γ pro velikosti úhlů i pro velikosti úseček v $\mathbf{ABC}$. Pod pojmem „trojúhelník $\mathbf{ABC}$ “ budeme pak rozumět libovolný trojúhelník vyhovující daným podmínkám.

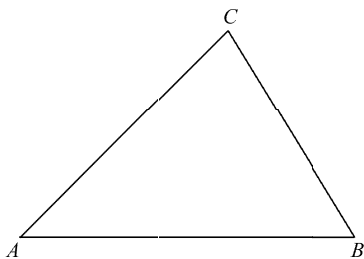
Podívejme se na vlastnosti tohoto základního pole. Na výšce $\mathbf{AA}_1$ platí zřejmě $\beta = \gamma$ (obr. 3), tedy na této výšce leží obrazy všech tříd rovnoramenných trojúhelníků $\mathbf{ABC}$, kde $\beta = \gamma$; podobně na výšce $\mathbf{BB}_1$ je $\alpha = \gamma$, tj. leží na ní obrazy všech tříd rovnoramenných trojúhelníků $\mathbf{ABC}$, kde $\alpha = \gamma$ a konečně na výšce $\mathbf{CC}_1$ je $\alpha = \beta$, tj. leží na ní obrazy všech tříd rovnoramenných trojúhelníků $\mathbf{ABC}$, v nichž $\alpha = \beta$. V průsečíku výšek je bod $\mathbf{T}$, obraz třídy všech rovnostranných trojúhelníků. Postupme dále. Na střední příčce $\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$ platí $\alpha = 90$, tedy na ní leží obrazy všech tříd pravoúhlých trojúhelníků s pravým úhlem α ; podobně na střední příčce $\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1$ leží obrazy všech tříd pravoúhlých trojúhelníků s pravým úhlem β a na střední příčce $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ leží obrazy všech tříd pravoúhlých trojúhelníků s pravým úhlem γ .

Jestliže prozkoumáme základní pole podrobněji, zjistíme, že body uvnitř trojúhelníku $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$ jsou obrazem všech tříd ekvivalence ostroúhlých trojúhelníků, body uvnitř trojúhelníku $\mathbf{AB}_1\mathbf{C}_1$ jsou obrazem všech tříd ekvivalence tupoúhlých trojúhelníků $\mathbf{ABC}$ s tupým úhlem α a zbývající dvě části základního pole obsahují obrazy tříd ekvivalence tupoúhlých trojúhelníků $\mathbf{ABC}$ s tupými úhly β resp. γ . Pak také např. body uvnitř trojúhelníku $\mathbf{BTC}$ jsou obrazem všech tříd ekvivalence trojúhelníků $\mathbf{ABC}$, v nichž je α nejmenším úhlem, atd.

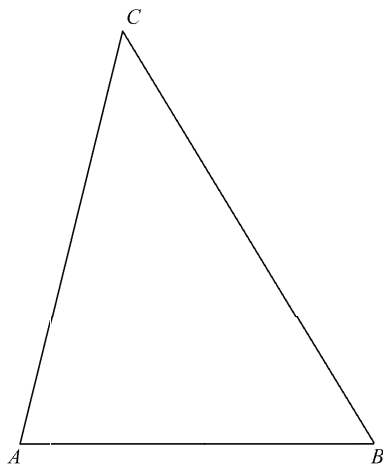
Nás teď bude zajímat, jak zvolit dobrý obecný *ostroúhlý* trojúhelník. Vidíme, že trojúhelník $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$ je složen ze šesti částí; obraz třídy ekvivalence dobrého obecného ostroúhlého trojúhelníku musí tedy padnout dovnitř některé z těchto částí, a to „dostatečně daleko“ od jejich hranic. Usuzujeme, že obraz třídy dobrého obecného trojúhelníku musí být „dostatečně daleko“ od hranic trojúhelníku $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$ (žádný úhel nesmí být blízký 90°), od výšek trojúhelníku $\mathbf{ABC}$ (úhly se od sebe musí co nejvíce lišit) i od hranic trojúhelníku $\mathbf{ABC}$ (žádný úhel nesmí být příliš malý), což odpovídá i praktickým potřebám.

Ale buďme konkrétnější a ukažme si, že trojúhelníky tvaru $[45^\circ, 60^\circ, 75^\circ]$ jsou dobré obecné trojúhelníky: velikosti úhlů se navzájem liší alespoň

o 15° a od pravého úhlu se i největší z nich liší též o 15° . Protože existuje šest permutací uvedených velikostí úhlů, dostáváme šest různých tvarů dobrého obecného ostroúhlého trojúhelníku. Na obr. 4a je trojúhelník ABC tvaru $[45^\circ, 60^\circ, 75^\circ]$ a na obr. 4b trojúhelník ABC tvaru $[75^\circ, 60^\circ, 45^\circ]$.

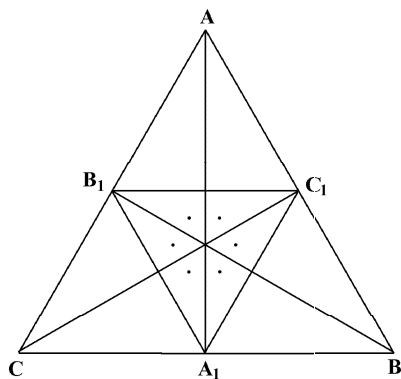


Obr. 4a



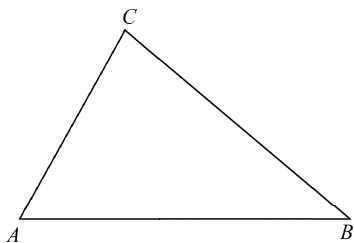
Obr. 4b

Jejich místo v základním poli ukazuje obr. 5.

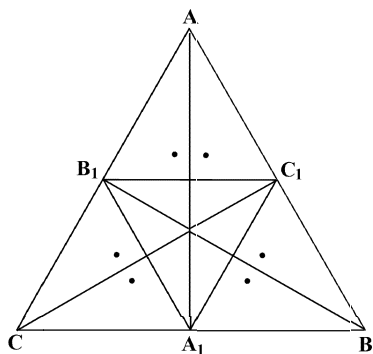


Obr. 5

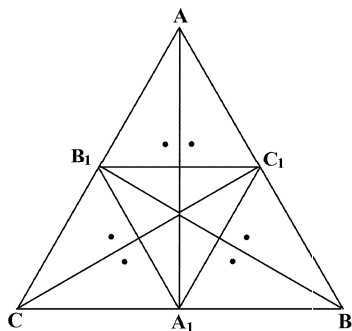
Samozřejmě i další obecné trojúhelníky s hodnotami úhlů blízkými k uvedeným jsou dobré. Za pozornost stojí tvar $[40^\circ, 60^\circ, 80^\circ]$. Úhel velikosti 80° se sice od pravého úhlu liší jen o 10° , ale v životě nás obklopuje tolik pravých úhlů, že jsme na ně více citliví, takže osmdesátistupňový úhel vidíme jako dosti odlišný od úhlu pravého (zejména pokud jedno rameno úhlu je vodorovné). Na obr. 6a vidíme tyto tvary zobrazeny v základním poli **ABC**, na obr. 6b je jeden jejich reprezentant.



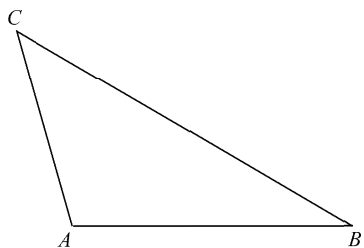
Obr. 6a



Obr. 6b



Obr. 7a



Obr. 7b

Zvolit dobrý obecný *tupoúhlý* trojúhelník je snazší, např. je to trojúhelník tvaru $[30^\circ, 45^\circ, 105^\circ]$ a všech permutací těchto tří úhlů (na obr. 7b náleží trojúhelník permutaci $[105^\circ, 30^\circ, 45^\circ]$). Velikosti dvou menších se liší o 15° , velikost největšího se od pravého úhlu liší též o 15° . Podle obr. 7a

se zdá, že lze volit ještě vhodnější případy, ale při „posunu obrazu tvaru více dovnitř“ příslušného pole se nejmenší úhel příliš zmenšuje.

Doporučení pro výuku

Obecný trojúhelník zpravidla používáme vždy, když chceme takto implicitně zdůraznit, že probírané učivo platí pro všechny trojúhelníky a kdy tedy nechceme, aby si žáci danou všeobecnou vlastnost trojúhelníků spojovali s nějakým zvláštním případem trojúhelníku. Navíc bychom u těchto zvláštních případů mohli při výuce narazit na fakt, který by naši snahu naboloural. Např. když žáci *poprvé* konstruují průsečík os stran, neměli by mít jako vzor trojúhelník na obr. 1, protože by dostali výjimečný zvláštní případ. Ani trojúhelník z obr. 2 není často vhodný, protože u něj splývá jedna výška s těžnicí, osou úhlu a osou jedné strany a trojúhelník je souměrný podle osy. Při výuce samozřejmě projdeme ve vhodné chvíli i zvláštní případy trojúhelníků, ale učitel se musí s rozmyslem rozhodnout, kdy a s jakým komentářem. (Jindy je ovšem vhodné začínat právě zvláštními případy.) Žákům však o obecných trojúhelnících nemusíme nic říkat, protože si nejčastěji volí tvar, jako učitel při ukázkových příkladech.

Má-li učitel při výuce zvolit trojúhelník, který není zadán jako speciální, můžeme vidět příklon k některé ze dvou tendencí:

(1) Volí pokaždé trojúhelník v podstatě stejného tvaru (ať už uvědoměle nebo neuvědoměle). Pokud je to dobrý obecný trojúhelník, je výhodou tohoto postupu, že u žáků nevzniknou rušivé nezodpovězené problémy typu „proč volí tento tvar trojúhelníku, když před chvílí volil jiný?“. Nevýhodou je, že může vzniknout vazba znalostí žáků na univerzálně používaný tvar trojúhelníku a z toho pak problémy, když se setkají s trojúhelníkem odlišného tvaru.

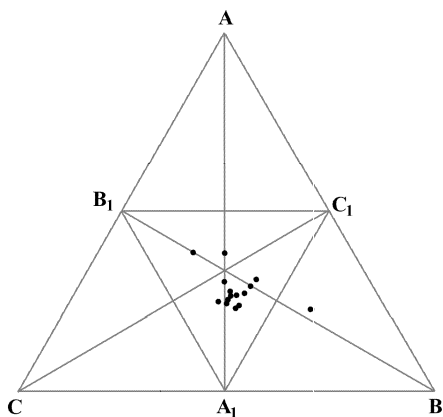
(2) Volí postupně trojúhelníky rozmanitého tvaru. Výhodou tohoto postupu je, že si žáci zvyknou na různé tvary trojúhelníků a nevznikne u nich vazba vlastností trojúhelníku na určitý tvar trojúhelníku. Nevýhodou je, že (bez učitelova odůvodnění) žáci nemusí pochopit, proč ve stejné situaci je volen jednou ten tvar a podruhé jiný.

Velmi často však učitel pracuje „nevědomě“, tj. vůbec si neuvědomuje, jaký trojúhelník pro svůj výklad nebo pro rozbor zadané úlohy volí. V tom případě zpravidla zapadá do výše uvedené skupiny (1).

Z toho všeho vyplývá doporučení: Žáci by se při výuce látky o trojúhelnících měli setkat s trojúhelníky nejrůznějších tvarů (i s takovými, jejichž žádná strana není vodorovná). Ve standardních situacích, např. při roz-

boru konstrukčních úloh, kdy o tvaru konstruovaného trojúhelníku ještě nic nevíme, je snad zase účelné používat nějaký vhodný standardní tvar dobrého obecného trojúhelníku (např. dle obr. 4a) nebo některé z jeho permutací.

Zobrazení tříd trojúhelníků do základního pole **ABC** lze použít i pro analýzu používání obrázků v učebních textech nebo sbírkách příkladů. Na obr. 8 máme např. zobrazeny tvary trojúhelníků použitých při výkladu v učebnici [2]. (Uvážili jsme zde všechny trojúhelníky v této učebnici, které nejsou zadány jako rovnoramenné, rovnostranné nebo pravoúhlé). Trojúhelníků je zde celkem 18, na jejich tvar můžeme usoudit z obr. 8. Více se tu uplatňuje tendence (1).



Obr. 8

Literatura

- [1] Názvy a značky školské matematiky. SPN, Praha 1988.
- [2] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. Prometheus, Praha 1993.
- [3] *Trávníček, S.*: Geometrická pravděpodobnost a kalkulátor. MFI, r. 10 (2000/01), č. 9.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 171 a 172, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (20.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 171

Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla vyhovující podmínkám $abcd = 1$
a

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} < a + b + c + d.$$

- a) Ukažte, že taková čísla a, b, c, d existují.
b) Dokažte, že pro ně platí nerovnost

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} > a + b + c + d.$$

Pavel Novotný (Žilina)

Řešení:

a) Například pro $a = 10^3$, $b = 10$, $c = 10^{-1}$, $d = 10^{-3}$ platí $abcd = 1$
a přitom

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 300,000\,001 \quad a + b + c + d = 1010,101.$$

b) Nejprve ukážeme, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c, d se součinem jedna platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \geq 2(a + b + c + d). \quad (1)$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{d} + \frac{a}{d} + \frac{d}{c} \right) \geq \sqrt[4]{\frac{a^3 d}{bcd^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = a.$$

Podobně získáme dalších sedm nerovností

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{2b}{a} + \frac{a}{d} \right) &\geq b, & \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{2a}{b} + \frac{a}{d} \right) &\geq a, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{c}{d} + \frac{2c}{b} + \frac{b}{a} \right) &\geq c, & \frac{1}{4} \left(\frac{c}{d} + \frac{2b}{c} + \frac{b}{a} \right) &\geq b, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{d}{a} + \frac{2d}{c} + \frac{c}{b} \right) &\geq d, & \frac{1}{4} \left(\frac{d}{a} + \frac{2c}{d} + \frac{c}{b} \right) &\geq c, \\ & & \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{2d}{a} + \frac{d}{c} \right) &\geq d. \end{aligned}$$

Sečtením všech osmi nerovností dostaneme nerovnost (1).

Nyní ukážeme sporem, že spolu s předpokladem

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} < a + b + c + d$$

nemůže současně platit

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \leq a + b + c + d,$$

protože sečtením obou těchto nerovností bychom dostali nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} < 2(a + b + c + d),$$

která je ve sporu s dokázanou nerovností (1). Proto platí nerovnost b).

Redakce neobdržela do uzávěrky tohoto čísla žádné úplné řešení této úlohy.

Neúplné řešení zaslal *Jiří Steckbauer* z Květné.

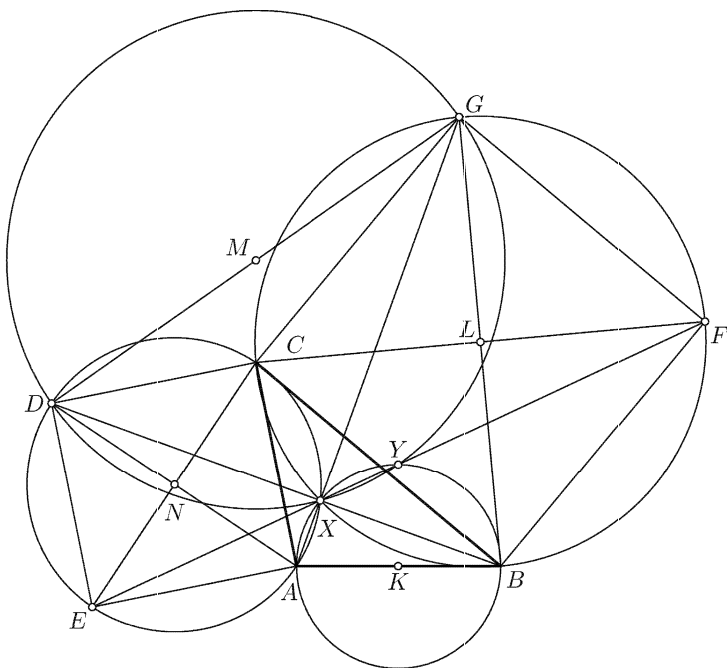
Úloha 172

Je dán trojúhelník ABC , v němž $|AC| \neq |BC|$, a čtverce $ACDE$, $BCGF$ vně sestrojené nad jeho stranami. Dokažte, že kružnice s průměry DG a AB se protínají na přímce EF .

Pavel Leischner

Řešení:

Označme K , M po řadě středy úseček AB , DG , dále L , N po řadě středy čtverců $BCGF$, $ACDE$ a X průsečík přímek AG a BD .



Trojúhelník ACG je obrazem trojúhelníku DCB v otočení kolem bodu C o úhel 90° , proto jsou přímky AG a BD (jako strany těchto trojúhelníků) vzájemně kolmé a platí $|AG| = |BD|$. Tedy podle Thaletovy věty leží jejich průsečík X na kružnicích sestavených nad průměry AB , BG , GD a DA . Tím jsme mimo jiné dokázali, že se kružnice s průměry DG a AB protínají.

Podle věty o obvodovém úhlu na kružnici opsané čtverci $ACDE$ má úhel AXE stejnou velikost jako úhel ACE , tedy 45° . Podobně velikost úhlu BXF je 45° . Velikost úhlu EXF je rovna součtu velikostí úhlů EXA , AXB a BXF , tedy tento úhel je přímý, proto bod X leží na přímce EF .

Úsečky MN a LK jsou středními příčkami trojúhelníků ADG a ABG , proto jsou rovnoběžné s přímkou AG a mají délku rovnou polovině délky úsečky AG . Podobně jsou úsečky KN a LM rovnoběžné s úsečkou BD a mají délku rovnou polovině délky úsečky BD . Ale úsečky AG a BD

jsou vzájemně kolmé a mají stejnou délku, proto je čtyřúhelník $KLMN$ čtverec. (Je to tzv. *Varignonův rovnoběžník* ve čtyřúhelníku $ABGD$.) Jeho úhlopříčky KM a LN jsou vzájemně kolmé. Úsečka LN je střední příčkou trojúhelníku EFC , je proto rovnoběžná s jeho stranou EF . Odtud již plyne, že přímky EF a KM jsou vzájemně kolmé.

Přímka KM prochází středy kružnic sestrojených nad průměry AB a DG , přímka EF prochází jedním jejich průsečíkem (X) a je k ní kolmá, proto prochází i (případným) druhým průsečíkem Y těchto kružnic.

Tím jsme dokázali tvrzení úlohy, tedy že průsečíky kružnic sestrojených nad průměry AB a DG se protínají na přímce EF .

Poznámka. Řešitelé této úlohy, kteří ji řešili způsobem podobným výše uvedenému řešení dokázali, že bod X leží na přímce EF , ovšem pak zapomněli ukázat, že na této přímce leží i bod Y .

Druhá skupina řešitelů dokázala, že body E a F mají stejnou mocnost ke kružnicím sestrojeným nad průměry AB a DG , tedy EF je jejich chordála. Potom však neukázali, že se tyto kružnice protínají.

Jako cvičení čtenářům přenecháme, že kružnice sestrojené nad průměry AB a DG se dotýkají, právě když $|AC| = |BC|$, tedy pro situaci popsanou v úloze vždy existují dva jejich průsečíky X a Y .

Redakce obdržela 7 řešení, žádné však nebylo úplné z důvodů uvedených v poznámce.

Neúplné řešení zaslali: *František Jáchim* z Volyně, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, Nár. mučedníků, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Hynek Jemelík* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Koblížek* z G v Žamberku, Nádražní, *Kateřina Medková* z BGBB v Hradci Králové, Orl. nábr. a *Jakub Solovský* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek