

MATEMATIKA

O keltských uzlech

KAREL PAZOUŘEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Keltské uzly (anglicky *Celtic knots*), používané ve středověké Británii jako ozdoba předmětů denní potřeby, zbraní, šperků nebo jako součást ilustrací knih, jsou poměrně často matematicky zpracovávaným objektem, snad pro jejich krásu, (zdánlivou) složitost nebo opakované a někdy nečekané používání i v moderní době.

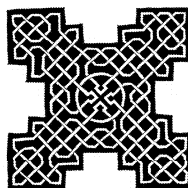
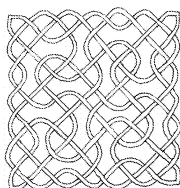
Pro „opracování“ ideje keltských uzlů budeme potřebovat osovou souměrnost a dělitelnost přirozených čísel – znalosti, které patří spíše do učiva základní školy, avšak jde o jejich nezvyklou aplikaci.

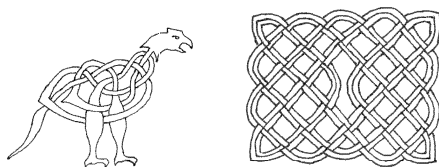
Je třeba zdůraznit, že v tomto článku slovo uzel *není* použito jako vžitý matematický termín teorie uzlů, čeština nemá ekvivalent, který by se pro takové tvary běžně používal.

Proto převezmeme toto pojmenování z běžného jazyka; jeho matematický obsah dále vymezíme.

Motivace

Keltské uzly použité v praxi mají rozmanité tvary. Jsou „splétány“ z různých počtů „provázků“ různých „tloušťek“, někdy jsou „provázky“ zdvojovány apod. Skutečný keltský uzel je uměleckým výtvozem. Uvedme si několik příkladů:





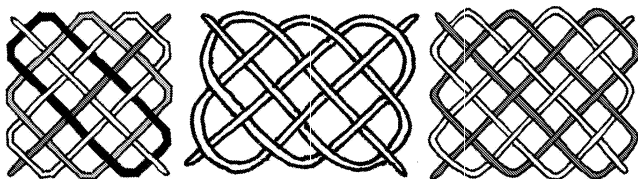
Jak odhadnout počet „provázků“, ze kterých je uzel „spleten“? Nejjednodušší je vzít pastelky a každý „provázek“ vybarvit jinou barvou.

Pokud se keltský uzel skládá z mnoha „provázků“, bude vybarvování zdoluhavý postup. Pokud se však omezíme na keltské uzly jednoho tvaru, můžeme sestavit následující matematický model takového keltského uzlu.

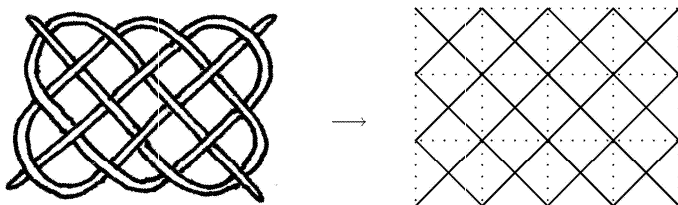
Pravoúhelníkové uzly (definice a značení)

Zaměříme se na keltské uzly, které mají „obdélníkový“ nebo „čtvercový“ tvar, tj. které mohou být „vepsány“ do pravoúhelníku, a ve kterých provázky mění směr jen na okrajích uzlu.

Některé z nich jsou na následujícím obrázku:



Pravoúhelníkové keltské uzly budeme značit zjednodušeně pomocí čtvercové sítě. Jednotlivé provázky budou znázorňovat lomené čáry. Nebudeme rozlišovat „tloušťku provázků“ a pokud máme více „provázků“ vedle sebe, budeme je považovat za jeden. Následující obrázek ukazuje takové zjednodušení:

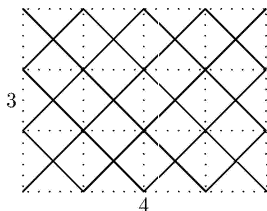


Nezáleží na pořadí křížení „provázků“, který „provázek“ je při křížení „nahore“ a který „dole“. Schématu vpravo tak odpovídají dva keltské uzly¹.

Co přesně pro nás bude pravoúhelníkový keltský uzel? Definujeme jej takto:

Mějme čtvercovou síť s jednotkovou délkou strany čtverce. Zvolme pravoúhelník se stranami délek p a q , jehož vrcholy leží v mřížových bodech sítě a jehož strany jsou rovnoběžné se stranami čtverců sítě. Pak *pravoúhelníkový keltský uzel* (p, q) (krátce *uzel*) je sjednocením úhlopříček čtverců sítě, které jsou částmi zvoleného pravoúhelníku.

Vrcholům zvoleného pravoúhelníka budeme říkat *rohy uzlu*. V některých případech budeme k uzlu připisovat dvojici (p, q) :



Provázek pak nazýváme lomenou čáru vzniklou sjednocením úhlopříček čtverců sítě, které:

- procházejí stejným vrcholem čtverce sítě a leží na jedné přímce nebo
- procházejí stejným vrcholem čtverce sítě, který leží na obvodu zvoleného pravoúhelníku.

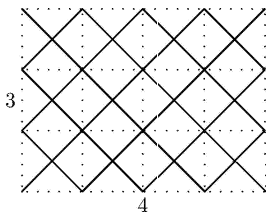
Zavedme ještě pojem *délka provázku*:

Za *jednotku délky provázku* vezmeme délku jedné úhlopříčky čtverce sítě. Pokud bychom brali za jednotku délku hrany čtverce sítě, zbytečně bychom počítali s odmocninou ze dvou. Navíc nesmíme zapomínat, že pracujeme jen s určitým matematickým modelem – skutečná délka provázků ve „skutečném keltském uzlu“ se může výrazně lišit!

¹Přesněji dva uzly, ve kterých nevede více „provázků“ vedle sebe. Pokud vezmeme v úvahu uzly s více „provázky“, popřípadě budeme rozlišovat tloušťky „provázků“ nebo jejich barvy, schématu na obrázku bude odpovídat mnohem více uzlů.

Příklad 1

Určete celkovou délku všech provázků v uzlu $(4, 3)$, resp. obecně v uzlu (p, q) .



Řešení. Uzel si překreslíme na zjednodušený tvar do čtvercové sítě. Čtverečků, kterými uzel $(4, 3)$ prochází, je pak $4 \cdot 3 = 12$. V každém takovém čtverečku procházejí provázky po úhlopříčkách, tedy každým čtverečkem vedou 2 jednotky provázku. Proto celková délka provázků v uzlu $(4, 3)$ je $12 \cdot 2 = 24$ jednotek.

Podobně v obecném případě dostáváme $p \cdot q \cdot 2 = 2pq$ jednotek provázku. $\square$

Osová souměrnost

Nyní zavedeme některé pojmy, abychom pravoúhelníkové keltské uzly mohli matematicky lépe popsat. Posléze do našich úvah zapojíme i osovou souměrnost. Začneme jednoduchou otázkou:

Příklad 2

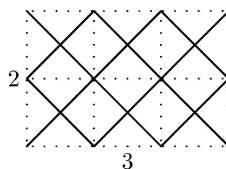
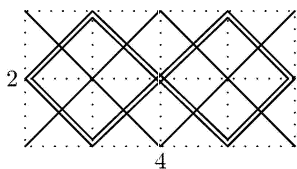
Může být pravoúhelníkový uzel složen pouze z jednoho provázku?

Řešení. Ne, poněvadž máme čtyři rohy uzlu, tedy čtyři konce provázků, potřebujeme tak alespoň dva provázky. $\square$

Uzel může obsahovat dva druhy provázků:

1. Provázký, které vedou z jednoho rohu uzlu do rohu jiného. Budeme jim říkat *cesty*.
2. Provázký, které nemají žádný konec, jsou tvořeny jednou smyčkou. Budeme jim říkat *cykly*.

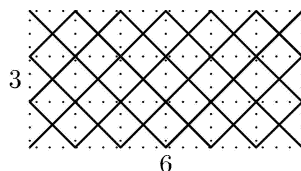
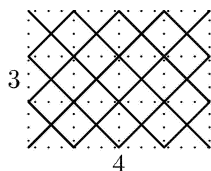
Na prvním obrázku (str. 261) je uzel $(4, 2)$ s jedním cyklem, oproti tomu uzel $(3, 2)$ na obrázku vpravo je tvořen pouhými dvěma cestami.



A nyní se dostáváme k základnímu problému: Jak dlouhé jsou cesty? A jak dlouhé jsou cykly? Jaký je mezi jejich délkami vztah?

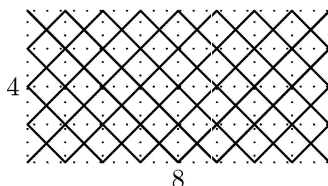
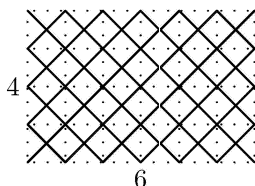
Uvedeme několik příkladů:

V uzlu $(4, 3)$ jsou pouhé dvě cesty, každá z nich dlouhá 12 jednotek. V tomto uzlu není žádný cyklus.



Uzel $(6, 3)$ tvoří dvě cesty (obě dlouhé 6 jednotek, a dva cykly, oba dlouhé 12 jednotek).

Uzlem $(6, 4)$ vedou dvě cesty (obě dlouhé 12 jednotek, a jeden cyklus dlouhý 24 jednotek):



Uzel $(8, 4)$ je tvořen dvěma cestami délek 8 jednotek a třemi cykly, každý z cyklů je dlouhý 16 jednotek.

Můžeme tak vyslovit následující tři hypotézy:

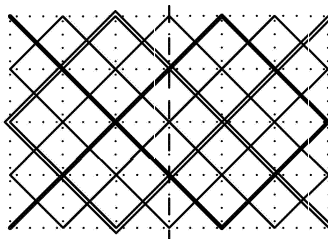
Hypotéza 1: Všechny cesty v uzlu jsou stejně dlouhé.

Hypotéza 2: Všechny cykly v uzlu jsou stejně dlouhé.

Hypotéza 3: Každá cesta má poloviční délku než cyklus.

Ověření hypotézy 1. Stejná délka cest v uzlu plyne ze symetričnosti uzlu:

Pokud v levém horním a levém dolním rohu začíná stejná cesta (tedy druhá cesta vede mezi pravým dolním a pravým horním rohem, tak jako na obrázku), pak použijeme osové souměrnosti podle svislé osy, která prochází středem uzlu:



Samotný uzel je souměrný podle této osy díky tomu, že pravoúhelník opsaný uzlu je podle ní souměrný a že provázky se skládají z úhlopříček čtverců sítě.

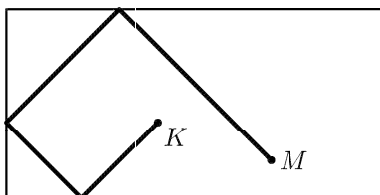
Vidíme, že cesty jsou souměrné podle této osy. Podobně pokud jedna cesta má konce v horních rozích a druhá v dolních rozích, použijeme osovou souměrnost s vodorovnou osou procházející středem uzlu.

Pokud jedna cesta vede z levého horního rohu do pravého dolního a druhá spojuje zbývající rohy, použijeme osu souměrnosti buď svislou, nebo vodorovnou, jako v předchozích případech. Cesty jsou totiž souměrné podle obou těchto os. $\square$

Pomocí osové souměrnosti pak můžeme určit i délku cest. Budeme postupovat jako v příkladech s kulečnickovou koulí, například v tomto:

Příklad 3

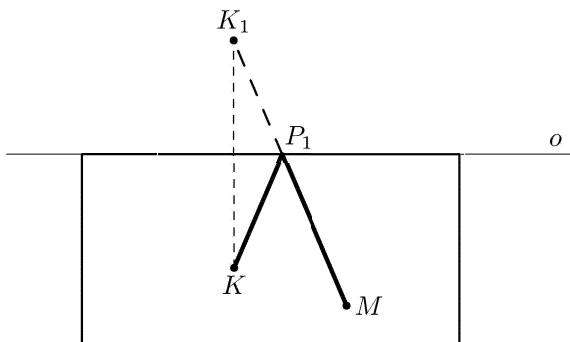
Na dolním obrázku je znázorněn kulečnickový stůl, na němž stojí koule K .



Nakreslete dráhu koule, jestliže se má nejdříve odrazit od dolního mantinelu, pak od levého mantinelu a odrazem od horního mantinelu se dostat do daného bodu M .

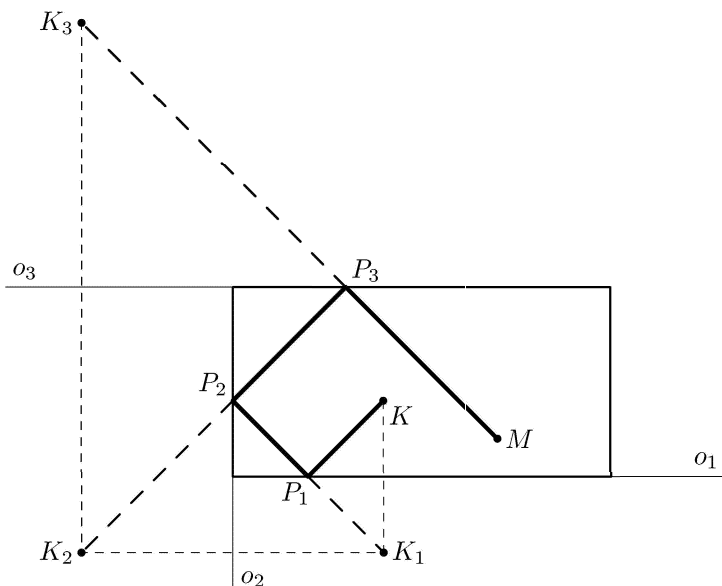
(Hraje se na karambolovém stole, tj. stole bez děr o rozměrech 10×5 stop. Rozměry koule zanedbejte, považujte ji za bod. Předpokládejte, že se koule pohybuje přímo, tj. po úsečkách.)

Řešení. Použijeme osovou souměrnost. Nejprve si úlohu ukažme v jednodušší verzi: Nechme kouli odrazit se pouze jednou, od horního mantinelu. Pak díky zákonu dopadu a odrazu je úhel mezi mantinelem a drahou koule před dopadem na něj stejně velký jako úhel mezi dráhou koule po odrazu a mantinelem:



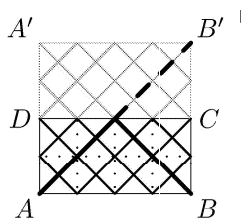
Pokud zobrazíme dráhu koule před odrazem v osové souměrnosti s přímkou o , na které leží horní mantinel, „natáhne“ se dráha koule do úsečky. To umožňuje i její konstrukci: Stačí počáteční bod K dráhy koule zobrazit v uvedené osové souměrnosti. Dostaneme tak bod K_1 a průsečík P_1 osy o (mantinelu) a úsečky K_1M je bodem odrazu koule. Drahou koule je tak lomená čára KP_1M .

Nyní vyřešíme danou úlohu: Použijeme opět osovou souměrnost, tentokrát opakovaně. Jako osy poslouží jednotlivé mantinely, důležité je však jejich pořadí. Osově souměrnosti následují v tom pořadí, v jakém se koule odráží od mantinelů, reprezentující jejich osy. Postupně tak dostáváme body K_1, K_2 a K_3 . Samotné body odrazu od stěn dostaneme zpětným postupem: Bod P_3 posledního odrazu je průsečík horního mantinelu s K_3M , druhý bod P_2 je průsečík levého mantinelu s K_2P_3 , první bod odrazu P_1 je průsečík dolního mantinelu s K_1P_2 . Dráha koule je tak lomená čára $KP_1P_2P_3M$.

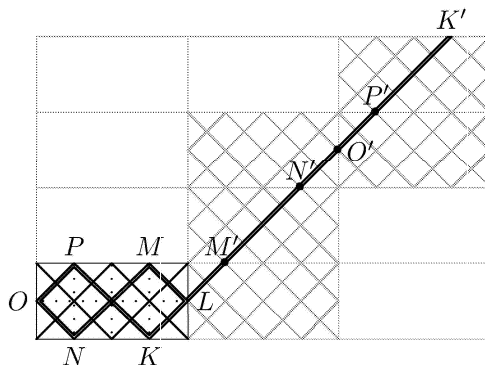


□

S uzly budeme postupovat podobně: Provázky „rozbalíme“ do úseček. Jako příklad si vezmeme uzel (2, 4). Rohy uzlu si označíme písmeny A , B , C , D . Použijeme pak osovou souměrnost: Budeme ale podle osové souměrnosti překlápět celý uzel tak, aby se daný provázek narovnal. Cesta z A do B je pak „rozbalena“ jako úsečka AB' :



Cyklos $KLMNOPK$ na následujícím obrázku je pak „rozbalen“ jako úsečka KK' . V tomto případě překlápíme uzel tak, aby se cyklus „narovnal“ do téže úsečky. Jednotlivé obrazy bodů, ve kterých cyklus mění směr, jsou vyznačeny na následujícím obrázku:

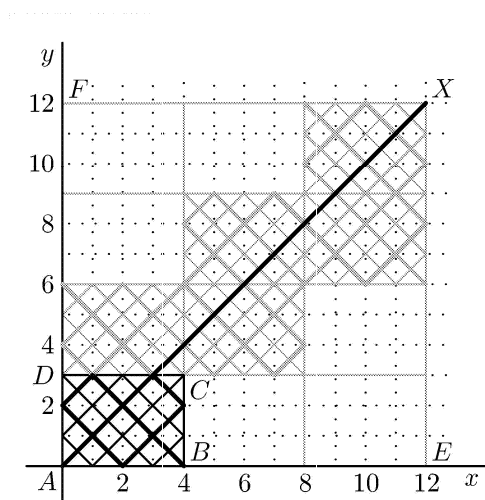


Nyní již dokážeme určit délku cesty.

Příklad 4

Určete délku cesty v uzlu (p, q) .

Řešení. Na dolním obrázku uvažujeme kartézskou soustavu souřadnic:



Pokud cestu, která vychází z levého dolního rohu A uzlu, „rozbalíme“ do úsečky AX , pak souřadnice bodu X musí být nutně celočíselné násobky

p , q , neboť X je obrazem jednoho rohu v několika složených osových souměrnostech a vzdálenost tohoto bodu od každé z os těchto souměrností byla násobkem příčného rozměru uzlu:

Pokud jsme použili svislou osu, pak byla násobkem p , pokud vodorovnou osu, pak byla násobkem q .

Označme tedy souřadnice body X jako $X[kp, lq]$, kde k, l jsou přirozená čísla. Ale my máme další informaci: Úsečka AX svírá s úsečkou AB úhel 45° , tedy tvoří úhlopříčku čtverce $AEXF$. Pak ale všechny strany čtverce $AEXF$ jsou stejně dlouhé, speciálně souřadnice bodu X se rovnají:

$$kp = lq.$$

Tudíž strany čtverce $AEXF$ musí mít nejmenší možnou délku, v opačném případě by cesta skončila dříve. Délka cesty je tedy rovna $n(p, q)$, kde $n(p, q)$ značí nejmenší společný násobek čísel p a q . $\square$

L i t e r a t u r a

- [1] *Fisher, G. – Mellor, B.*: On the Topology of Celtic Knot Designs. Visual Mathematics, Vol. 7, No. 1, 2005. <http://myweb.lmu.edu/bmellor/celticknots.pdf>
- [2] *Wallace, M.*: Celtic Knot Construction. <http://www.wallace.net/knots/howto/>

Nejen o zlatém řezu

MILOSLAV ZÁVODNÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pokud rozřezeme tyč na dvě nestejně části tak, že poměr délky a celé tyče k délce b její delší části je stejný jako poměr délky delší části b k délce kratší části $a - b$, tj. platí-li

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}, \tag{1}$$

rozřezali jsme tyč ve *zlatém poměru*². Hodnotu podílu a/b vyjádříme ze vztahu (1). Jeho postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{b}{a-b}, \\ a^2 - ab - b^2 &= 0, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Označíme-li $x = a/b > 0$, dostáváme kvadratickou rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2}$$

s neznámou x , jejímiž reálnými kořeny jsou čísla

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Podmínkám naší úlohy však vyhovuje pouze kladný kořen x_1 . Jeho převrácená hodnota $1/x_1 = b/a$ se nazývá *zlaté číslo* – označíme ho z .

Tedy

$$z = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 0,618\,033$$

Z teorie lineárních rekurentních vztahů je známo, viz např. [2], že kvadratická rovnice (2) je charakteristickou rovnicí příslušnou lineárnímu rekurentnímu vztahu

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0,$$

který charakterizuje číselnou posloupnost (a_n) , pro niž platí

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \tag{3}$$

²Zlatým poměrem bývá označován jak poměr $a : b$, tak poměr $b : a$.

přičemž první dva členy a_1, a_2 této posloupnosti mohou být libovolné (nikoliv však $a_1 = a_2 = 0$). Obecně platí: Jsou-li x_1 a x_2 dva navzájem různé reálné kořeny charakteristické rovnice příslušné lineárnímu rekurentnímu vztahu (3), pak n -tý člen číselné posloupnosti (a_n) daný tímto vztahem má tvar

$$a_n = d_1 x_1^n + d_2 x_2^n,$$

kde d_1, d_2 jsou vhodná reálná čísla.

Uvážíme-li nyní, že v našem případě platí $|x_2| < 1$, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2 x_2^n = d_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^n = 0.$$

Je tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_1 x_1^n + d_2 x_2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1 x_1^n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_2 x_2^n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1 x_1^n.$$

Uvedený výsledek můžeme využít při výpočtu zlatého čísla z . Platí

$$z = \frac{1}{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1 x_1^n}{d_1 x_1^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Zlaté číslo z lze tedy s danou přesností vypočítat jako podíl a_n/a_{n+1} dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti (a_n) , dané vztahem (3), a to pro dostatečně velká n .

Protože první dva členy této posloupnosti mohou být libovolné, může jí být také známá Fibonacciova posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... nebo Luca-sova posloupnost³ 1, 3, 4, 7, 11, ... nebo např. také posloupnost -3, -7, -10, -17, -27, ... Podíl a_n/a_{n+1} se s rostoucím n blíží číslu z poměrně rychle. V případě Fibonacciovy posloupnosti máme $(a_n/a_{n+1})_{n=1}^{\infty} = 1; 0,5; 0,6; 0,6; 0,625; 0,615; 0,619; 0,6176; 0,6181; 0,6179; 0,6180; \dots$ K výpočtu čísla z s danou přesností tak stačí papír a tužka.

Nyní nahradíme v rovnici (2) koeficient -1 v lineárním členu reálným parametrem $-k$. Získáme tak kvadratickou rovnici o neznámé x s parametrem k

$$x^2 - kx - 1 = 0. \quad (4)$$

³Posloupnost Fibonacciova typu s počátečními hodnotami $a_1 = 1, a_2 = 3$

Rovnice (4) je příslušná lineárnímu rekurentnímu vztahu

$$a_{n+2} = k \cdot a_{n+1} + a_n. \quad (5)$$

Kořeny rovnice (4) jsou

$$x_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} < 0.$$

Je-li parametr $k = 2$, má rovnice (4) kladný kořen

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}.$$

Je-li parametr $k = 3$, má rovnice (4) kladný kořen

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

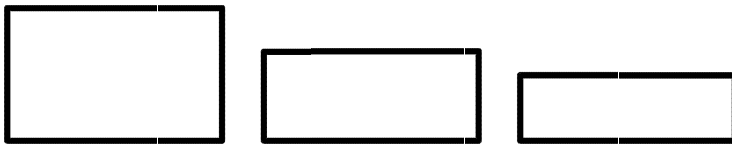
Převrácená hodnota kladného kořenu se v případě $k = 2$ nazývá *stříbrné číslo* s a v případě $k = 3$ *bronzové číslo* b , viz [1]. Je tedy

$$s = \sqrt{2} - 1, \quad b = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}.$$

Poměr $1 : s$ se nazývá stříbrný poměr, $1 : b$ je bronzový. Volba dalších celočíselných parametrů $k = 4$, $k = 5$ atd. již nepřináší do problematiky řezů nic zásadního.

K výpočtu čísel s a b lze (analogicky jako v případě zlatého čísla z) využít podíl a_n/a_{n+1} dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti dané vztahem (5). Pro menší hodnoty parametrů je však nutné použít k výpočtu větší n . Např. pro výpočet s přesností na 2 desetinná místa je v případě $k = 0,1$ nutné mít $n > 38$, zatímco v případě zlatého čísla ($k = 1$) stačí $n > 7$.

V řadě článků věnovaných zlatému řezu jsou vyzdvihovány jeho estetické kvality, zlatý řez je považován za ideální poměr. Útvary, do nichž se nějakým způsobem promítá zlaté číslo, jsou považovány za esteticky dokonalé. Estetické kvality zlatého, stříbrného a bronzového řezu můžete posoudit na tvarech obdélníků na obr. 1. Jejich strany jsou po řadě zleva v poměru čísel z , s , b .

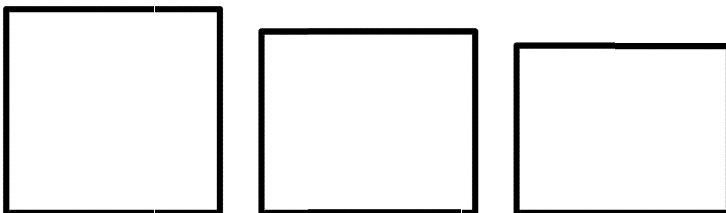


Obr. 1 Obdélníky se zlatým, stříbrným a bronzovým poměrem délek stran

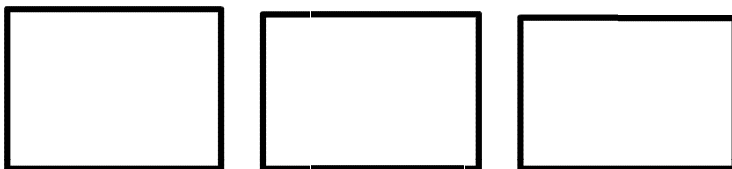
Nejen přirozená čísla naplňují „estetická kritéria“, svou roli hrají často i jejich poměry. V následující tabulce je uveden podíl a_n/a_{n+1} , zaokrouhlený na čtyři desetinná místa, pro některé hodnoty parametru k vztahu (5):

k	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	1	2	3
$\frac{a_{n-1}}{a_n}$	0,9512	0,8471	0,7808	0,7440	0,7208	0,7047	0,6180	0,4142	0,3028

Podívejme se, jak vypadají obdélníky pro některé z těchto poměrů (obr. 2, obr. 3).



Obr. 2 Obdélníky s poměrem délek stran po řadě $k = \frac{1}{10}$, $k = \frac{1}{3}$, $k = \frac{1}{2}$



Obr. 3 Obdélníky s poměrem délek stran po řadě $k = \frac{3}{5}$, $k = \frac{2}{3}$, $k = \frac{5}{7}$

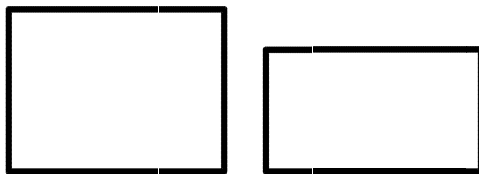
Srovnajte estetické kvality obdélníků na předchozích obrázcích s estetickými kvalitami obdélníků o poměru délek stran $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773$ a $\frac{1}{2}$ na obr. 4.



Obr. 4 Obdélníky s poměrem délek stran po řadě $1 : \sqrt{2}$, $1 : \sqrt{3}$ a $1 : 2$

Jak již bylo uvedeno výše, zlatý řez je mnohými považován za ideální poměr. Jeho projevy lidé hledají v přírodě, viz např. [3], v astronomii, zkrátka všude, kde to jen lze, viz např. [4]. A samozřejmě je nalézají, neboť příroda je „nevyčerpatelná“ a lze v ní nalézt cokoliv – jen se musí umět hledat.

Ale třeba poměr délek stran obrazovek klasických televizorů byl $4 : 3$, nově se užívá poměr $16 : 9$, tj. podíl délky kratší a delší strany je 0,75, resp. 0,5625. Zlaté číslo se od těchto podílů výrazně liší. Příslušné obdélníky a čtverec vidíte na obr. 5.



Obr. 5 Obdélníky s poměrem délek stran $4 : 3$ a $16 : 9$

Literatura

- [1] *Andres, J. – Fišer, J.*: Řez zlatý, stříbrný a bronzový. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 40 (1995), č. 6.
- [2] *Švrček, J.*: Úvod do kombinatoriky (učební text). Vyd. UP, Olomouc 2009.
- [3] *Zdeborová, L.*: Květ slunečnice a Fibonacciova čísla. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 82, č. 1.
- [4] <http://www.tichanek.cz/g11/zlaty-rez-XI.html> [cit. 14. 10. 2010]

Maturita nanečisto v 9. ročníku ZŠ

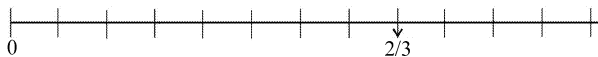
FRANTIŠEK JÁCHIM

Základní škola Volyně

Se zájmem jsem si prohlédl baterii příkladů pro matematickou maturitní generálku. Zatímco náročnější variantu nejsem schopen posoudit ve vztahu k rozsahu a náročnosti učiva střední školy, nad lehčí jsem žasnul. Z 90ti procent obsahovala učivo pouze základní školy a to ještě v té podobě, jak ho zadávám průměrným žákům. Celý obsah zkoušky mi přišel jako vhodný pro běžnou kontrolní práci na základní škole v 8. nebo 9. ročníku, nikoli pro „zkoušku dospělosti“. A když jsem zjistil, že téměř polovina k maturitě se chystajících středoškoláků neuspěla, rozhodl jsem se vyzkoušet maturitní test se svými žáky v 9. ročníku. Po menších úpravách (spíše vynechání těch několika příkladů s částečně středoškolským námětem) jsem ji svým žákům bez přípravy zadal. Učím běžnou třídu se schopnostmi žáků téměř gaussovsky rozloženými a klasifikací tomu přiměřenou.

Zde uvádím texty úloh, které byly žákům předloženy na vyřešení během obvyklých 40ti minut. Vůči originálnímu zadání jsem provedl jen nepatrné úpravy – vesměs v číselných hodnotách zadání.

- 1) Vyznačte na číselné ose obrazy čísel $\frac{3}{8}$ a $0,125$.



Obr. 1

- 2) Zjednodušte výrazy

$$3a + \frac{3}{5}a - \frac{1}{6}a = \quad 3x \cdot \frac{5}{2}x = \quad (a^3 - a) : (a - 1) =$$

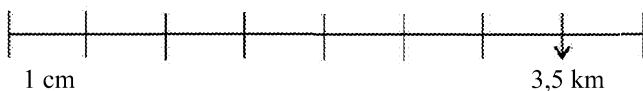
- 3) Řešte nerovnici $\frac{x-5}{2} \leq 2x+5$ a výsledek zapište intervalem.

- 4) Ze vztahu $s = 0,5(t-5)$ vyjádřete t .

- 5) Funkční závislost mezi čísly je dána vztahem $y = \frac{2}{x}$. Doplňte dolní řádek tabulky.

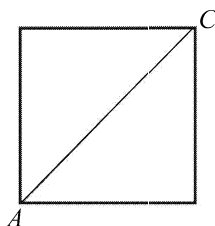
x	5	8
y		

- 6) Body $A[-5; 0]$ a $B[0; 5]$ jsou sousedními vrcholy čtverce $ABCD$. Vypočítejte obsah čtverce $ABCD$.
- 7) Měřítko mapy (viz obr. 2) vyjádřete ve tvaru $1 : x$ (Tedy 1 cm na mapě představuje x cm ve skutečnosti.)



Obr. 2

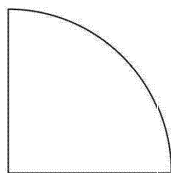
- 8) Kolik kroků ušetříte, půjdete-li ve čtverci mezi body A a C (obr. 3) po úhlopříčce, místo abyste šli po dvou stranách obvodu celkem 500 kroků?



Obr. 3

- 9) Zjistěte, zda číslo x vyhovující rovnici $\frac{2x+3}{3} = 0$ leží v intervalu $-3 < x < 5$.
- 10) Firma si účtuje za vybavení kanceláře žaluziemi celkem 4860 Kč. Z dodacího listu je patrné, že žaluzie byly o 954 Kč dražší než jejich instalace. Kolik procent z účtované ceny tvoří instalace žaluzií?

- 11) Pozemek tvaru čtvrtkruhu (obr. 4) je třeba oplotit. Na rovné části plotu se dohromady použije 28 m pletiva. Kolik metrů pletiva je potřeba na obloukovou část plotu?



Obr. 4

- 12) Jaká je výška nádoby tvaru šestibokého hranolu s podstavou o obsahu $0,5 \text{ dm}^2$, kterou tři čtvrtlitrové hrnky vody zcela naplní?

Během řešení směli žáci používat kalkulačky, ale nesměli se ptát, a to ani na srozumitelnost textu. Každý příklad jsem hodnotil pouze dvěma stupni – správně, nebo chybně, na čemž někteří žáci trčili. Např. v úloze 11 žáci dosazovali místo poloměru hodnotu 28 metrů, v úloze 12 někteří nesledovali jednotky a uváděli výsledek, za nějž psali k číselné hodnotě v decimetrech jednotky centimetry.

Celková úspěšnost při řešení jednotlivých příkladů je uvedena v následující tabulce.

Přehled úspěšnosti řešení jednotlivých příkladů												
Příklad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Úsp. %	77,5	72,5	60,0	15,0	65,0	20,0	50,0	80,0	45,0	75,0	30,0	40,0

Z tohoto pohledu se mi zadaná písemná práce jeví jako snadná, neboť celková úspěšnost při mnou konstruovaných písemných prací tohoto časového rozsahu bývá nižší.

Pro hodnocení práce byla použita stupnice stanovená pro maturitní generálku. Klasifikace tedy vypadala takto:

Výkonové výsledky a klasifikace		
Procentní rozpětí	Klasifikace	Počet žáků
100 % až 83 %	výborně	3
82 % až 67 %	chvalitebně	3
66 % až 50 %	dobře	7
49 % až 33 %	dostatečně	5
méně než 33 %	nedostatečně	2

V 9. ročníku by tedy se svými znalostmi u této maturitní zkoušky uspělo 18 z 20 žáků. To svědčí především o tom, že maturitní náročnost zde byla postavena velmi nízkou, a to jen s okrajovým vztahem k učivu střední školy (tento vztah jsem však velmi snadno výběrem úloh eliminoval). Obsah této lehčí verze je podle mne degradací středoškolské výuky a maturity jako takové. To, že 48 % studentů středních škol, kteří si matematiku zvolili, neuspělo, je výhradně jejich problém. Neumí, protože se neučí a nepracují. Není výmluvy. Někteří z nich v maturitních oborech vůbec studovat nemají. Nechtě si laskavě prohlédnou např. maturitní příklady sto let staré [1].

Zadáním této maturitní zkoušky jsem, bohužel, své žáky silně demotivoval pro další práci, neboť mi naznačili, že dosáhli úrovně střední školy a není třeba již v matematice pokračovat. Přesvědčit je, že tomu tak není a nebude (alespoň doufám), bude ode mne vyžadovat dosti značné úsilí, zejména v kombinaci se situací, že budou vesměs bez problémů a někteří bez schopnostních předpokladů přijati na zvolené střední školy. Usuzuji, že k obdobné situaci, tj. k zvětšení negativistických postojů žáků k výuce, dojde na základních školách v širším měřítku.

Následně mne také zajímal pohled na tuto písemnou práci i z jiného hlediska: jak ji vlastně žáci ve vztahu k náročnosti nastavené v naší škole vnímají. Při rozboru práce žáci dostali dotazník, v němž se po rozboru písemné práce k ní měli vyjádřit.

1) Písemná „maturitní práce“ ti připadala

a) velmi obtížná	0
b) obtížná	12
c) lehká	6
d) velmi lehká	2

2) Učivo v písemné práci

a) bylo náročnější než na ZŠ	5
b) odpovídalo náročnosti učiva ZŠ v 9. ročníku	11
c) odpovídalo náročnosti učiva na ZŠ i v nižších ročnících	4

3) Uveď nejobtížnější příklad

Příklad 12	9krát
Příklad 11	5krát

- 4) Čas na práci (1 vyučovací hodina) se ti zdál
- | | |
|--------------------|----|
| a) přiměřený | 15 |
| b) příliš krátký | 5 |
| c) zbytečně dlouhý | 0 |
- 5) Očekáváš, že maturitní zkouška z matematiky na střední škole bude
- | | |
|--|----|
| a) obtížná jako tato písemná práce | 1 |
| b) obtížnější, ale s obdobným učivem | 16 |
| c) obtížnější a výrazně z jiného učiva | 3 |
- 6) Považuješ výuku na ZŠ ve vztahu k této písemné práci
- | | |
|-------------------------|----|
| a) za přiměřenou | 14 |
| b) za zbytečně náročnou | 3 |
| c) za nedostatečnou | 3 |

Domnívám se, že při dalším vývoji obsahu státní maturity z matematiky by v lehčí verzi mělo dojít ke zvýšení náročnosti a zejména ke změně proporce učiva směrem k učivu středoškolskému.

Literatura

- [1] *Zahradník, J.*: Jak maturovali gymnazisté na přelomu 19. a 20. století. MFI, roč. 20 (2010/11), č. 2, s. 74.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2011 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 175

Dokažte, že číslo $2011^2 - 2010$ je dělitelem čísla $2011^{2010} - 1$.

Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 176

Kružnice k a l se protínají ve dvou různých bodech A a B . Tečna ke kružnici k v bodě A protíná kružnici l v bodě D a tečna ke kružnici l v bodě A protíná kružnici k v bodě C ($C \neq A \neq D$). Tečna ke kružnici l v bodě D a polopřímka AB se protínají v bodě E . Nechtě F je průsečík přímky AC s kružnicí opsanou trojúhelníku BCE . Dokažte, že body A , D , E , F leží na téže kružnici.

Ján Mazák (Košice)

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (17.) ročník této rubriky, který je zároveň sedmým ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce obdržela celkem 143 úplných nebo částečných řešení od 47 jednotlivců (alespoň jednu vyřešenou úlohu druhého cyklu přitom zaslalo 148 řešitelů). Za každou úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body; k -násobným laureátem druhého cyklu této rubriky se stane řešitel, který získá od 11. ročníku soutěže alespoň k -násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí řešitelů po šestém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže:

1. *Anton Hnáth* z Moravan (303 b.), 2. *Vladimír Pavel* z Blovic (198 b.),
3. *Karol Gajdoš* z Trnavy (186 b.), 4. *Miroslav Hübsch* z Prahy 5 (156 b.),
5. *Jozef Mészáros* z Jelky (147 b.), 6. *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R. (105 b.),
7. *Jaroslav Hančl* z MFF UK v Praze (102 b.), 8. *Jiří Steckbauer* z Květné (87 b.).

Trojnásobným laureátem druhého cyklu se stává *Anton Hnáth*, dvojnásobnými laureáty *Vladimír Pavel* a *Karol Gajdoš*, laureátem se stává dále *Josef Ondřej*. Srdečně jim blahopřejeme a posíláme knihy z nakladatelství Prometheus.

Pavel Calábek